

# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRUNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN

IN LEIPZIG

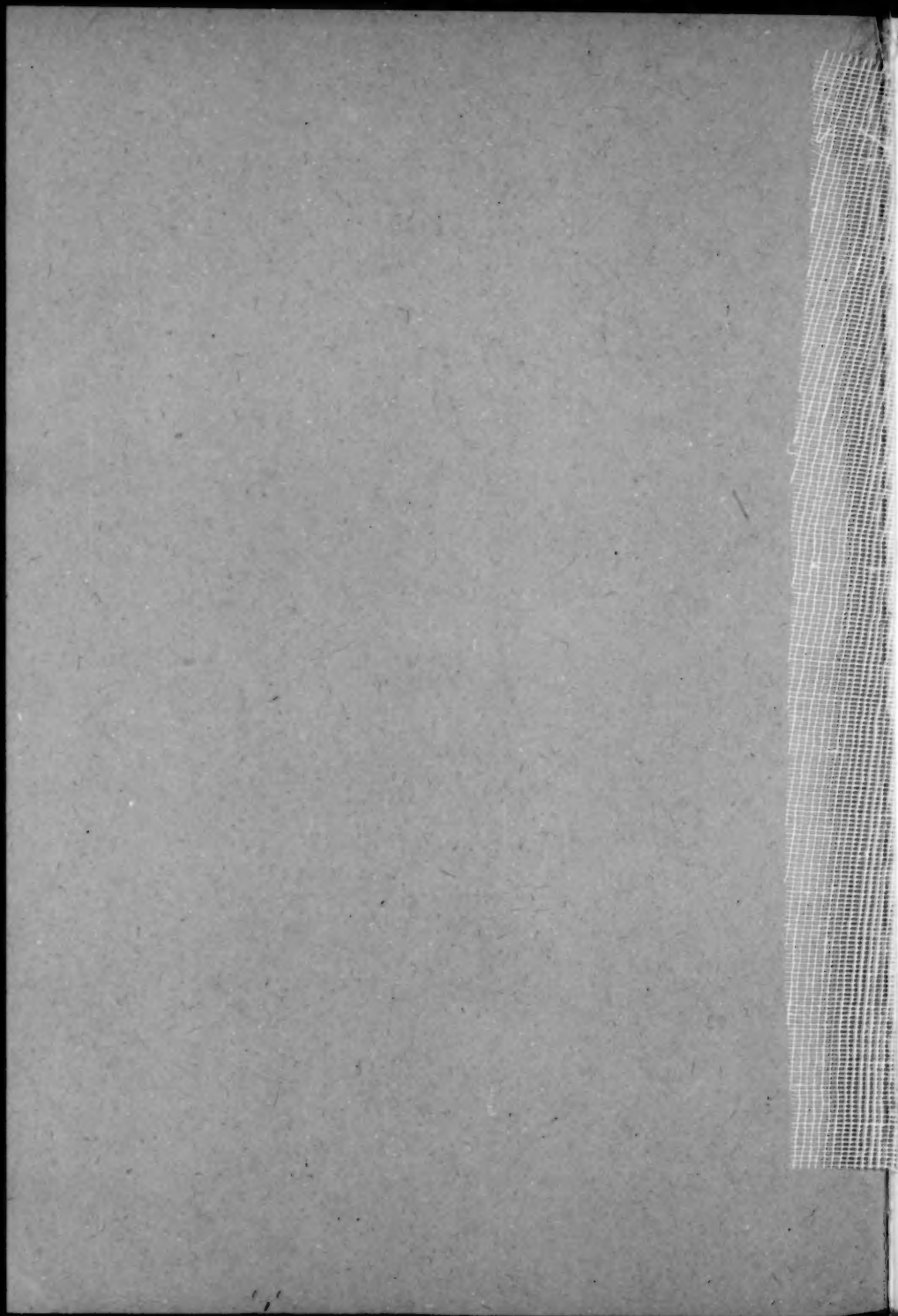
100. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1934





# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRUNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÜTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN

IN LEIPZIG

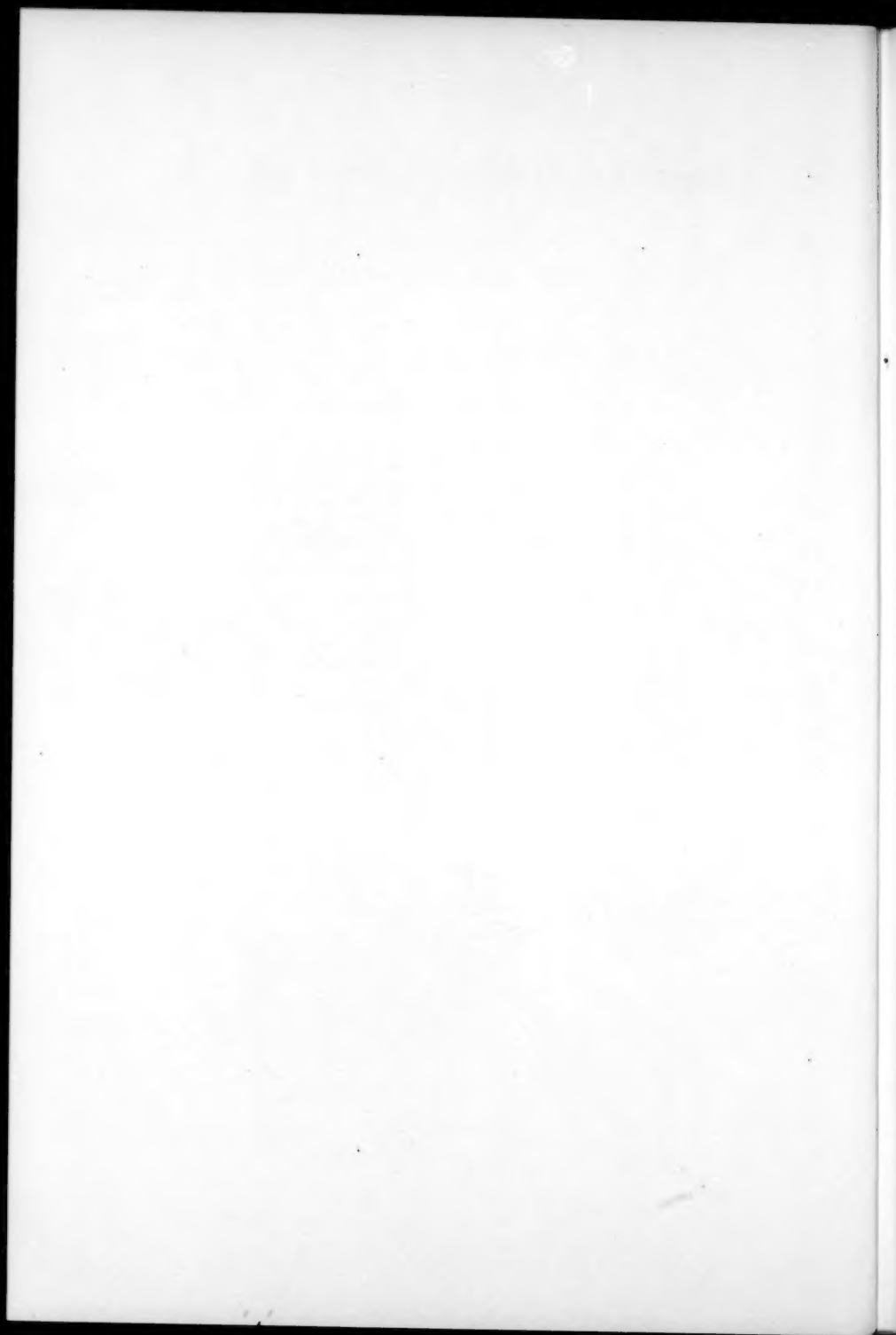
109. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1934



# Inhalt des einhundertundneunten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

	Seite
<b>Aumann, G.</b> , in München. Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. I. 235	
<b>Aumann, G.</b> , und <b>Carathéodory, C.</b> , in München. Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete . . . . .	756
<b>Behnke, H.</b> , und <b>Thullen, P.</b> , in Münster (Westf.). Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Über die Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes . . . . .	313
<b>Bergmann, St.</b> , in Berlin. Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen . . . .	324
<b>Borsuk, K.</b> , in Warschau. Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbaren Räume . . . . .	376
<b>Brailzew, I. R.</b> , in Gorkij (Nishnij-Nowgorod). Über die Singularitäten der durch eine Dirichletsche Reihe bestimmten analytischen Funktion . . . .	83
<b>Bruschlinsky, N.</b> , in Moskau. Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3 . . . . .	525
<b>Carathéodory, C.</b> , und <b>Aumann, G.</b> , in München. Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete . . . . .	756
<b>Danielsson, Ö.</b> , in Reykjavik (Island). Sätze über Scharen von Flächen zweiter Ordnung . . . . .	521
<b>Doetsch, G.</b> , in Freiburg i. B. Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und eine damit zusammenhängende Differentialdifferenzengleichung . . . . .	257
<b>Friedrichs, K.</b> , in Braunschweig. Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande . . . . .	60
<b>Friedrichs, K.</b> , in Braunschweig. Die Grenzümkehrprobleme positiv definiter unendlicher Matrizen. Neuer Beweis des Satzes von Toeplitz . . . . .	254
<b>Friedrichs, K.</b> , in Braunschweig. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren . .	465
<b>Friedrichs, K.</b> , in Braunschweig. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Zweiter Teil . . . . .	685
<b>Frommer, M.</b> , in Göppingen (Württemberg). Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln geschlossener und spiralförmiger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen . . . . .	395
<b>Garten, V.</b> , in Leipzig. Über die Bewegung von Wirbelfäden endlichen Querschnitts in einer zweidimensionalen idealen Flüssigkeit . . . . .	445
<b>Hasse, H.</b> , in Marburg. Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper . . .	191
<b>James, R. D.</b> , in Pasadena (USA.). The representation of integers as sums of pyramidal numbers . . . . .	196
<b>John, F.</b> , in Göttingen. Über die Vollständigkeit der Relationen von Morse für die Anzahlen kritischer Punkte . . . . .	381
<b>John, F.</b> , in Göttingen. Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten . . . . .	488
<b>Khintchine, A.</b> , in Moskau. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse . . . . .	604
<b>Kommerell, K.</b> , in Tübingen. Gebietsteilung durch eine Kurve zweiter Ordnung	307
Berichtigung dazu . . . . .	764

	Seite
Kurosch, A., in Moskau. Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen . . . . .	647
Lehmer, D. H., in Altadena (Cal., USA.). A machine for combining sets of linear congruences . . . . .	661
Lubelski, S., in Warschau. Über das Verhalten der Abschnitte von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis . . . . .	230
Magnus, W., in Frankfurt a. M. Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen . . . . .	617
McShane, E. J., in Göttingen. The Du Bois-Reymond Relation in the Calculus of Variations . . . . .	746
Menchoff, D., in Moskau. Sur les représentations qui conservent les angles . .	101
Motzkin, Th., in Basel. Bemerkung über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen . . . . .	95
Noack, A., in Schleswig. Die einseitige Lagerung orientierbarer Flächen . . .	681
Nöbeling, G., in Wien. Über die rationale Dimension . . . . .	353
Oppenheim, A., in Singapore. Quadratic fields with and without Euclid's Algorithm . . . . .	349
Petrowsky, I., in Moskau. Über das Irrfahrtproblem . . . . .	425
Rehbock, F., in Bonn. Über parabolische Risse . . . . .	17
Rellich, F., in Göttingen. Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen . . . . .	714
Romanoff, N. P., in Tomsk (Sibirien). Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie . . . . .	668
Rothe, E., in Breslau. Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = \lambda^2 \psi$ . . . . .	267
Schmidt, A., in Göttingen. Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung . . . . .	538
Scholz, A., in Freiburg i. Br. Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. I. Berichtigung dazu . . . . .	161 764
Schütte, K., in Göttingen. Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik . . . . .	572
Segre, B., in Bologna. Sulle curve algebriche che ammettono come trasformata razionale una curva piana dello stesso ordine, priva di punti multipli . .	1
Severi, F., in Rom. Sulle trasformate razionali di un'ipersuperficie algebrica priva di punti multipli . . . . .	4
Thullen, P., und Behnke, H., in Münster (Westf.). Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Über die Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes . . . . .	313
van der Waerden, B. L., in Leipzig. Zur algebraischen Geometrie. IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie . . . . .	7
van der Waerden, B. L., in Leipzig. Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt .	13
van der Waerden, B. L., in Leipzig. Noch eine Bemerkung zu der Arbeit „Zur Arithmetik der Polynome“ von U. Wegner in Math. Ann. 105, S. 628–631 . . .	679
Wajsborg, M., in Kowel (Polen). Beitrag zur Metamathematik . . . . .	200
Wildner, R. L., in Ann Arbor (Mich. USA.) On the properties of domains and their boundaries in $E_n$ . . . . .	273
Berichtigung zu H. Fitting, Bd. 107 . . . . .	616
Zusatz zu R. Sauer, Bd. 108 . . . . .	160

# Sulle curve algebriche che ammettono come trasformata razionale una curva piana dello stesso ordine, priva di punti multipli.

Von

Beniamino Segre in Bologna.\*

Consideriamo una forma  $f(x_1, x_2, x_3)$  di grado  $n$ , avente discriminante non nullo; posto le  $x_1, x_2, x_3$  uguali a tre forme di uno stesso grado in tre nuove variabili:

$$(1) \quad x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, y_3), \quad x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, y_3), \quad x_3 = \varphi_3(y_1, y_2, y_3),$$

la  $f(x_1, x_2, x_3)$  si trasforma, mediante le (1), in una forma  $F(y_1, y_2, y_3)$ . È possibile che la  $F(y_1, y_2, y_3)$  risulti divisibile per una forma  $g(y_1, y_2, y_3)$  ancora di grado  $n$ , senza, beninteso, che le (1) rappresentino — mod.  $g(y_1, y_2, y_3)$  — una sostituzione lineare omogenea fra le  $(x_1, x_2, x_3)$  e le  $(y_1, y_2, y_3)$ ? Questa domanda ammette sempre risposta negativa, salvo che sia  $n \leq 3$ , nel qual caso la suddetta possibilità sussiste, come agevolmente può riscontrarsi su esempi.

Tale notevole risultato è stato recentemente ottenuto da H. Kapferer<sup>1)</sup>, colla restrizione (superflua) che pure  $g(y_1, y_2, y_3)$  ammetta discriminante non nullo. La trattazione di questo A. — puramente algebrica — si svolge in 20 pagine dense di sviluppi algoritmici, poggiando su ben 8 proposizioni ausiliarie, qualcuna delle quali vien dimostrata in altri lavori.

In questa Nota, con procedimento algebrico-geometrico semplicissimo, io giungo ad un teorema che in particolare comprende il risultato suddetto; e precisamente stabilisco che:

*Una trasformazione unirazionale che faccia passare da una curva  $\Gamma^n$  irriducibile di uno spazio ad un qualunque numero di dimensioni, ad una*

<sup>1)</sup> H. Kapferer, *Ein Beweis für die Unmöglichkeit einer nicht linearen Korrespondenz zwischen doppelpunktfreien Kurven gleicher Ordnung  $n > 3$* , Sitzungsber. der Bayerischen Akad. d. Wissensch. zu München, 1931, S. 155—175.

curva piana  $C^n$  priva di punti multipli ed avente lo stesso ordine  $n > 3$  della prima, è necessariamente una trasformazione proiettiva; in particolare, dunque, anche  $\Gamma^n$  deve essere piana e priva di punti multipli.

La dimostrazione si basa su tre proposizioni, che possono presentare interesse a prescindere pure dall'applicazione che qui se ne trae.

1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché per  $n > 3$  punti distinti di un piano, passino (almeno)  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$  curve  $C^{n-3}$  d'ordine  $n-3$ , linearmente indipendenti, è che quegli  $n$  punti siano allineati.*

La condizione è evidentemente sufficiente, poichè le  $C^{n-3}$  passanti per  $n$  punti allineati si spezzano nella retta a cui questi appartengono ed in una  $C^{n-4}$  residua, del tutto arbitraria. Per stabilirne la necessità, poichè la cosa è ovvia per  $n = 4$ , potremo procedere per induzione completa, ed ammettere di aver già dimostrato la proposizione precedente per le  $C^{n-4}$ . Basterà allora provare che, se si hanno (almeno)  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$   $C^{n-3}$  indipendenti, passanti per  $n > 4$  punti  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  distinti del piano,  $n-1$  qualsiasi di questi punti, ad es.  $P_3, P_4, \dots, P_n$ , risultano fra loro allineati. Consideriamo all'uopo una retta  $r$  arbitraria passante per  $P_1$ , ma non per i punti restanti, e su di essa scegliamo  $n-3$  punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-3}$ , distinti fra loro e da  $P_1$ . Si hanno (almeno)

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) - (n-3) = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$$

$C^{n-3}$  indipendenti, passanti per i punti  $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-3}$ : queste curve si spezzano nella retta fissa  $r$  (che contiene  $n-2$  di tali punti), ed in altrettante  $C^{n-4}$  linearmente indipendenti, passanti per  $P_2, P_3, \dots, P_n$ . Dunque effettivamente, la suddetta proposizione essendo per ipotesi vera per le  $C^{n-4}$ , questi ultimi punti sono fra loro allineati.

2. *Una  $C^n$  piana priva di punti multipli e d'ordine  $n > 3$ , non possiede alcun'altra  $g_n^2$  all'infuori di quella delle sue sezioni rettilinee.*

Per ipotesi la  $C^n$  ha il genere:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2);$$

dunque, in base al teorema di Riemann-Roch, una  $g_n^2$  che le appartenga ha indice di specialità almeno uguale a

$$2 - n + p = \frac{1}{2}(n-2)(n-3),$$

ossia almeno tante sono le  $C^{n-3}$  che passano per gli  $n$  punti (generalmente distinti) di un suo gruppo. In forza del n° 1 questi punti risultano fra loro allineati, donde la tesi.

La proposizione così stabilita vale evidentemente pure per  $n = 2$ , ma non per  $n = 3$ , poichè su di una  $C^3$  piana di genere 1 si hanno  $\infty^1 g_3^2$ . Ad essa si può anche dare la seguente forma invariante:

Avendo su di una curva algebrica irriducibile due distinte  $g_n^2$ , con  $n \neq 3$ , entrambe queste serie lineari ammettono necessariamente qualche coppia neutra.

3. Date due curve  $C$  e  $\Gamma$  irriducibili, aventi rispettivamente per generi  $p$  e  $\pi$ , con  $p \geq \pi$ ,  $p > 1$ , se esiste una corrispondenza fra quelle che sia razionale nel senso che fa passare da  $\Gamma$  a  $C$ , essa lo è anche di conseguenza nel senso opposto, e le due curve hanno lo stesso genere.

Invero, se ad un punto di  $C$  corrispondono  $\alpha$  punti su  $\Gamma$ , in base alla formula di Zeuthen dev'essere:

$$(\pi - 1) - \alpha(p - 1) \geq 0;$$

e questa limitazione può coesistere colle  $p \geq \pi$ ,  $p > 1$ ,  $\alpha \geq 1$ , solo per  $p = \pi$ ,  $\alpha = 1^2$ ).

4. Si abbia infine una curva algebrica irriducibile  $\Gamma^n$ , appartenente ad uno spazio ad un qualunque numero  $d \geq 2$  di dimensioni, che ammetta come trasformata razionale una  $C^n$  piana priva di punti multipli ed avente lo stesso ordine  $n > 3$  di  $\Gamma^n$ . La  $C^n$  ha per genere:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) > 1,$$

mentre il genere  $\pi$  di  $\Gamma^n$  non può superare  $p$ , come risulta subito considerando la proiezione di  $\Gamma^n$  su di un piano. In base al n° 3, la corrispondenza fra  $\Gamma$  e  $C$  è addirittura *birazionale*, epperanto essa trasforma la  $g_n^d$  delle sezioni iperpiane di  $\Gamma$  in una  $\bar{g}_n^d$  su  $C$ . In virtù del n° 2 dev' essere  $d = 2$ , e quest'ultima  $\bar{g}_n^2$  deve coincidere con la serie lineare delle sezioni rettilinee di  $C$ ; in altri termini, come si trattava di provare, la curva  $\Gamma^n$  è piana e la data corrispondenza fra  $\Gamma^n$  e  $C^n$  è *proiettiva*.

Dalla proposizione così dimostrata, segue in particolare che:

*Una curva piana algebrica d'ordine  $n > 3$ , priva di punti multipli, non ammette trasformazioni razionali in sé che non siano trasformazioni proiettive.*

Bologna, 15 gennaio 1933.

<sup>2</sup>) Il primo membro della precedente relazione, in virtù della citata formula di Zeuthen, rappresenta la metà del numero dei punti di diramazione della corrispondenza esistenti su  $C$ . — Il risultato dianzi ottenuto comprende, quando già si sappia che è  $p = \pi$ , una nota osservazione di H. Weber, *Zur Theorie der Transformation algebraischer Funktionen*, Journ. für die reine und angew. Math. 76 (1873), S. 345. Per quest' ultima e per la formula di Zeuthen, cfr. pure ad es. F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (Bologna, Zanichelli, 1926), p. 207 e 210.



## Sulle trasformate razionali di un'ipersuperficie algebrica priva di punti multipli.

Von

Francesco Severi in Rom.

La precedente Nota<sup>1)</sup> stabilisce in modo semplice, e generalizza, coi metodi preferiti dalla scuola geometrica italiana, una proprietà acquisita da altro Autore con laboriosi calcoli<sup>2)</sup>. Nella mia recente conferenza di Zurigo io esprimevo l'augurio, confortato da quanto hanno già realizzato e stanno realizzando nella geometria algebrica taluni giovani e valenti matematici tedeschi, che quei metodi tornino in pieno onore anche nella Patria di Riemann, Clebsch, Brill, Noether, che di essi furono grandi antesignani. Colgo con piacere l'occasione per ripetere l'augurio in questo autorevole periodico e per mostrare come gli stessi metodi conducano, con estrema semplicità ed eleganza, al seguente teorema generale, la cui dimostrazione algoritmica sarebbe forse molto complicata:

*Una corrispondenza unirazionale, che muti un'ipersuperficie  $F$ , d'ordine  $n > r + 1$ , priva di punti multipli, appartenente allo spazio (proiettivo)  $S_r$ , in una varietà algebrica  $F'$ , dello stesso ordine, di uno spazio  $S_d$  ( $d \geq r$ ), è necessariamente birazionale, anzi omografica (sicchè  $d = r$  ed  $F'$  è priva di punti multipli)<sup>3)</sup>.*

<sup>1)</sup> B. Segre, *S'le curve algebriche che ammettono come trasformata una curva piana dello stesso ordine, priva di punti multipli.*

<sup>2)</sup> Kapferer, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. zu München, 1931, p. 155. Che due curve piane dello stesso ordine  $n > 3$ , prive di punti multipli, in corrispondenza birazionale, siano omografiche, era già stato osservato da Marletta (Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, 1905; Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1907). Anche questo Autore dimostra la proprietà per semplicissima via algebrico-geometrica.

<sup>3)</sup> In particolare: due ipersuperficie d'ordine  $n > r + 1$  di  $S_r$ , prive di punti multipli, in corrispondenza birazionale, son omografiche. Ciò trovasi in Marletta (nel primo dei lavori citati). La proprietà consegue pure ovviamente per  $r > 3$  dal fatto che un'ipersuperficie di  $S_r$ , priva di punti multipli, non contiene che varietà algebriche ad  $r - 2$  dimensioni, intersezioni complete. Ved. Severi, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2 dicem. 1906.

1. Per dimostrare il teorema enunciato premettiamo il lemma:

„Una varietà algebrica  $F'$ , d'ordine  $n > r + 1$  e dimensione  $r - 1$ , di uno spazio  $S_d$ , la quale sia rappresentabile come varietà  $v$ -pla ( $v \geq 1$ ) sopra una ipersuperficie  $F$  dello stesso ordine, priva di punti multipli, di un  $S_r$ , appartiene necessariamente ad un  $S_r$  ed i suoi eventuali punti multipli non presentano condizioni di aggiunzione alle ipersuperficie d'ordine  $n - r - 1$ .“

Osserviamo che, siccome la trasformazione  $(1, v)$  tra  $F, F'$  muta il sistema canonico di  $F$  in un sistema contenuto (parzialmente o totalmente) nel sistema canonico di  $F'^{(4)}$ , il genere geometrico  $P'$  di  $F'$  è almeno uguale al genere geometrico  $\binom{n-1}{r}$  di  $F$ . D'altronde la proiezione  $F''$  di  $F'$  da un generico  $S_{d-r-1}$  sopra un  $S_r$ , è di ordine  $n$  e di genere  $P'$ . Ma siccome il genere geometrico di una ipersuperficie d'ordine  $n$  di  $S_r$  non supera  $\binom{n-1}{r}$ , così risulta  $P' = \binom{n-1}{r}$ ; e la  $F''$ , se pur ha punti multipli, ne possiede soltanto di quelli che non abbassano il genere. Dunque i punti multipli di  $F''$  non possono che distribuirsi in varietà di dimensione  $\leq r - 3$ .

Perciò una sezione piana generica di  $F''$  è una curva di ordine  $n$  senza punti multipli, ossia di genere  $\binom{n-1}{2}$ . Dunque la curva sezione di  $F'$  con un generico  $S_{d-r+2}$  di  $S_d$  ha l'ordine  $n$  ed il genere  $\binom{n-1}{2}$ , epperò è piana<sup>5)</sup>. Ne deriva<sup>6)</sup> che  $F'$  appartiene ad un  $S_r$ .

2. Venendo al teorema oggetto di questa Nota, si può intanto affermare, in base al lemma, che  $F'$  appartiene ad un  $S_r$  e che il sistema canonico (completo e puro) è segato su  $F'$  dalle ipersuperficie d'ordine  $n - r - 1$  di  $S_r$ . La corrispondenza  $\omega, (1, v)$ , tra  $F, F'$  muta il sistema

<sup>4)</sup> Ved. Enriques, Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1893; Severi, Rend. del R. Istit. Lombardo, 1903. La somma di una varietà canonica di  $F$  e dell'eventuale varietà di diramazione ad  $r - 2$  dimensioni esistente su  $F$  si trasforma in una varietà canonica di  $F'$ . La proprietà è ovvia dal punto di vista trascendente. (Severi, l. c., p. 500).

<sup>5)</sup> Indipendentemente dal n° 4 della Nota di B. Segre, si riconosce subito che una curva irriducibile d'ordine  $n$  e genere  $\binom{n-1}{2}$  di un  $S_\varrho$ , è piana, perchè la varietà  $W$  delle sue corde non incontra un  $S_{\varrho-3}$  generico e quindi  $W$  è una superficie irriducibile con  $\infty^2$  rette, cioè un piano.

<sup>6)</sup> Se una  $V_{r-1}$  irriducibile di  $S_d$  appartiene ad un  $S_\varrho$  ( $\varrho \leq d$ ), la sua curva sezione con un  $S_{d-r+2}$ , cioè con un  $S_{\varrho-r+2}$  del suo spazio di appartenenza, appartiene allo  $S_{\varrho-r+2}$  e non ad uno spazio inferiore; perciò quella curva non può essere piana finchè non sia  $\varrho = r$ . Ved. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed., Messina, Principato, 1923, p. 227.

canonico  $|K|$  di  $F$  in un sistema  $|K'_0|$ , di dimensione  $\binom{n-1}{r} - 1$ , contenuto nel sistema canonico  $|K'|$  di  $F'$  ed appartenente all'involuzione  $J$ , d'ordine  $\nu$ , che si ha su  $F'$  come immagine dei punti di  $F$ . Siccome il genere geometrico di  $F'$  è  $\binom{n-1}{r}$ , il sistema  $|K'|$  differisce al più da  $|K'_0|$  per una componente fissa, costituita dall'eventuale varietà doppia ad  $r-2$  dimensioni di  $J$ . Ma  $|K'|$  non ha componenti fisse e la generica  $K'$ , se  $\nu > 1$ , non appartiene all'involuzione  $J$ , perchè si può sempre considerare in  $S'_r$  un'ipersuperficie d'ordine  $n-r-1$  passante per un generico punto  $P$  di  $F'$  e non contenente alcuno dei  $\nu-1$  coniugati di  $P$  nell'involuzione: dunque  $\nu = 1$  e la  $\omega$  è un'omografia, perchè  $|K|$  e  $|K'|$  si corrispondono e quindi il sistema delle sezioni iperpiane di  $F'$  mutasi nel sistema delle sezioni iperpiane di  $F$ .

**Osservazione.** Il teorema vale evidentemente anche se l'ipersuperficie  $F$  possiede punti multipli, che non abbassino il suo genere geometrico. Allora anche  $F'$  possiede altrettanti punti multipli analoghi.

Roma, 22 gennaio 1933-XI.

(Eingegangen am 27. 1. 1933.)

## Zur algebraischen Geometrie. IV.

### Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

In meiner Arbeit „Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie“<sup>1)</sup> habe ich gezeigt, daß das „Charakteristikenproblem“: die Bestimmung der „Anzahl“ der gemeinsamen Punkte zweier beliebiger Teilmannigfaltigkeiten einer singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeit  $M$ , zurückgeführt werden kann auf die Bestimmung der Homologiegruppen von  $M$  als topologische Mannigfaltigkeit. Diese Bestimmung soll nun durchgeführt werden für den Fall, daß  $M$  eine Quadrik  $Q_{2n}$  oder  $Q_{2n+1}$ , d. h. eine quadratische Hyperfläche im projektiven Raum ist. Als Spezialfall erhält man daraus, wenn  $M$  die Mannigfaltigkeit der Geraden des dreidimensionalen Raumes ist, die Halphenschen Formeln für die Anzahlen der gemeinsamen Strahlen zweier Geradensysteme.

Die Beweismethode ist im wesentlichen dieselbe, die in der „Topologischen Begründung“, Anhang II, zur Bestimmung der Homologiegruppe des projektiven Raumes benutzt wurde: Durch eine Deformation werden alle Zyklen in einen Teilraum von geringerer Dimension „hineingeschoben“. Während aber im Fall des projektiven Raumes die Deformation stetig war für alle Zyklen, die einen Punkt nicht enthalten, ist sie es hier nur für die Zyklen, die eine gewisse Teilmannigfaltigkeit  $P_n^*$  von der Dimension  $n$  nicht treffen, was eine Schwierigkeit mit sich bringt, die aber durch Anwendung eines Dualitätssatzes der kombinatorischen Topologie behoben werden kann. Dieser Dualitätssatz gibt nämlich ein Kriterium dafür, wann ein gegebener Zykel homolog einem solchen ist, der  $P_n^*$  nicht trifft: das Kriterium besteht in dem Nullsein aller Schnittpunktszahlen des gegebenen Zyklus mit den Zyklen von  $P_n^*$ .

Die eben skizzierte Deformationsmethode ist im wesentlichen nur eine Übertragung ins Topologische einer algebraisch-geometrischen Methode,

<sup>1)</sup> Math. Annalen 102 (1929), S. 337—362.

welche G. Schaake<sup>2)</sup> in vielen Fällen mit Erfolg zur Auffindung von Charakteristikenformeln angewandt hat. Die Umwandlung ins Topologische hat nur den Vorteil, eine bessere Beherrschung aller Multiplizitätsfragen zu ermöglichen. Es ist zu erwarten, daß mit einer ähnlichen Deformationsmethode noch eine Reihe von Charakteristikenproblemen exakt gelöst werden können. Als typisches Beispiel nenne ich das Charakteristikenproblem für die Mannigfaltigkeit aller linearen Unterräume  $P_m$  des Raumes  $P_n$ <sup>2a)</sup>.

### § 1.

#### Die Quadriken gerader Dimensionszahl.

Im folgenden bezeichnet ein Index rechts unten immer die algebraische, ein Index rechts oben die (doppelt so große) topologische Dimensionszahl.

Die Gleichung einer allgemeinen Quadrik  $Q_{2n}$  im komplexen projektiven Raum  $P_{2n+1}$  kann auf die Form

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0$$

gebracht werden. Auf der Fläche liegen zwei Scharen von linearen Räumen  $P_n$ . Die Räume  $P_n$  der einen Schar werden durch Gleichungen der Form

$$(1) \quad x_i = \sum a_{ik} y_k \quad (a_{ik} = -a_{ki})$$

gegeben, während die Gleichungen der Räume  $P'_n$  der anderen Schar daraus durch Vertauschung eines  $x_i$  mit einem  $y_i$  hervorgehen. Vertauscht man noch ein  $x$  mit einem  $y$ , so erhält man wieder einen Raum der ersten Schar usw. Zwei Räume  $P_n$  oder  $P'_n$  derselben Schar schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt, wenn  $n$  gerade, und schneiden sich nicht, wenn  $n$  ungerade ist. Zwei Räume  $P_n$  und  $P'_n$  aus verschiedenen Scharen schneiden sich umgekehrt nicht, wenn  $n$  gerade, und in einem Punkt, wenn  $n$  ungerade ist.

Die Räume  $P_n = P^{2n}$  sind  $(2n)$ -dimensionale Zyklen im  $(4n)$ -dimensionalen Raum  $Q_{2n} = Q^{4n}$ . Der Schnittpunktindex zweier sich in einem Punkt schneidender Räume  $P_n$  oder  $P'_n$  ist  $\pm 1$ . Um das einzusehen, genügt es auf Grund der topologischen Invarianz des Schnittpunktindex,

<sup>2)</sup> G. Schaake, Afbeeldingen van figuren op de punten eener lineaire ruimte. Diss. Amsterdam 1922, Kap. VI.

<sup>2a)</sup> Zusatz bei der Korrektur. Dieses Problem ist inzwischen für den Fall  $m=1$ , also für die Mannigfaltigkeit der Geraden des  $P_m$ , von Herrn Ehresmann (C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1932), p. 152) auf Grund einer ähnlichen, aber etwas einfacheren topologischen Methode gelöst worden. Damit ist insbesondere die Halphensche Regel neu bewiesen.

die Umgebung der betreffenden Stelle von  $Q_{2n}$  durch stereographische Projektion topologisch auf ein Stück des euklidischen Raumes  $E_{2n}$  abzubilden, wobei die Räume  $P_n$  in lineare Räume  $E_n$  übergehen, für welche definitionsmäßig ein isolierter Schnittpunkt immer den Index  $\pm 1$  hat. Bei passender Orientierung ist der Index sogar  $+1$ .

Die Matrix der Schnittpunktzahlen zweier Räume  $P_n, P'_n$  aus verschiedenen Scharen mit zwei ebensolchen lautet demnach:

$$\text{für } n \text{ gerade: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{für } n \text{ ungerade: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, daß  $P_n$  und  $P'_n$  im Sinn der Homologie linear-unabhängig sind.

In  $P_n$  liegen natürlich lineare Räume von allen kleineren Dimensionen:  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ . Unter  $Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_{2n-1}$  verstehen wir schließlich die ebenen Schnitte von  $Q_{2n}$  mit linearen Räumen der Dimensionen  $n+2, n+3, \dots, 2n$ . Jedes  $P_v = P^{2v}$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1$ ) schneidet  $Q_{2n-v} = Q^{2(2n-v)}$  in einem Punkt vom Index Eins, also ist kein Vielfaches von  $P_v$  oder  $Q_{2n-v}$  homolog Null.

Die Bestimmung der Homologiegruppe von  $Q_{2n}$  geschieht nun auf Grund der folgenden Überlegung.

Ist  $C^k$  ein Zykel von einer Dimension  $k < 2n$  auf  $Q^{2 \cdot 2n}$ , so kann man  $C^k$  durch einen Homologen ersetzen, der den Raum

$$P_n^*: y_0 = y_1 = \dots = y_n = 0$$

nicht trifft. Dieser Raum  $P_n^*$  wird von einem Raum  $P'_n$  der zweiten Schar in genau einem Punkte geschnitten. Ist  $C^{2n}$  ein Zykel von der Dimension  $2n$ , also von derselben Dimension wie  $P'_n$ , so kann man die Zahl  $j$  so bestimmen, daß

$$'C^{2n} = C^{2n} - j \cdot P'_n$$

mit dem Raum  $P_n^*$  die Schnittpunktzahl Null hat. Nach einem Dualitätssatz von van Kampen und Pontrjagin<sup>3)</sup> ist dann  $'C^{2n}$  einem Zykel  $''C^{2n}$ , der  $P_n^*$  nicht trifft, homolog mit erlaubter Division. In dieser Weise werden alle Zyklen mit  $k \leq 2n$  auf solche zurückgeführt, welche  $P_n^*$  nicht treffen. Das gleiche könnte man übrigens auch für die  $C^k$  mit  $k > 2n$  machen, indem man passende Vielfache von  $Q_{n+1}, \dots, Q_{2n-1}$  von ihnen subtrahiert, jedoch brauchen wir das für das folgende nicht.

<sup>3)</sup> E. R. van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Diss. Leiden 1929, S. 64 (Satz 4) und S. 72 (Schluß von § 4). L. Pontrjagin, Math. Ann. 105 (1931), S. 190, Formel (3).

Jetzt definieren wir eine Deformation, welche den Punkt

$$x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$$

in

$$\lambda x_0, \dots, \lambda x_n, y_0, \dots, y_n$$

überführt, wobei der reelle Parameter  $\lambda$  von 1 nach 0 geht. Für alle nicht zu  $P_n^*$  gehörigen Punkte bleibt diese Deformation eindeutig und stetig auch bei  $\lambda = 0$ , also werden unsere Zyklen  $C^k$  bzw. " $C^{2n}$ " stetig in solche übergeführt, welche dem Raum  $P_n$ :

$$x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$$

angehören. Für diesen projektiven Raum  $P_n$  bilden nun bekanntlich die Unterräume  $P_v = P^{2v}$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ) eine vollständige Homologiebasis.

Also bilden diese Zyklen  $P^{2v}$  ( $v = 0, \dots, n-1$ ) auch eine Homologiebasis für  $Q^{2n-1}$  für alle Dimensionen  $k < 2n$ , während für  $k = 2n$  die Zyklen  $P_n$  und  $P_n^*$  zusammen eine Basis im Sinne der Homologie mit erlaubter Division bilden.

Damit sind die Homologiezahlen  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1, \dots$ ,  $p_{2n-1} = 0$ ,  $p_{2n} = 2$  bestimmt, während sich gleichzeitig ergibt, daß für die Dimensionen  $k < 2n$  keine Torsion existiert. Aus dem Poincaréschen Reziprozitätsgesetz für die Homologiezahlen und Torsionskoeffizienten:

$$p_{4n-v} = p_v; \quad \tau_{4n-v} = \tau_{v-1}$$

bestimmen sich nun alle übrigen Homologiezahlen:

$$p_{2n+1} = 0, \quad p_{2n+2} = 1, \quad \dots, \quad p_{4n-1} = 0, \quad p_{4n} = 1,$$

während sich andererseits die völlige Torsionsfreiheit ergibt. Zieht man schließlich noch die Tatsache heran, daß die Determinanten der oben aufgestellten Schnitzzahlmatrizen gleich  $\pm 1$  sind, so folgt, daß die Zyklen

$$P_0, P_1, \dots, P_{n-1}; \quad P_n, P_n^*; \quad Q_{n+1}, \dots, Q_{2n}$$

eine vollständige Homologiebasis für  $Q_{2n}$  bilden.

## § 2.

### Die Quadriken ungerader Dimensionszahlen.

Die Gleichung einer allgemeinen Quadrik  $Q_{2n+1} = Q^{2(2n+1)}$  im komplexen projektiven Raum  $P_{2n+2}$  kann auf die Form

$$x_0 y_0 + \dots + x_n y_n + z^2 = 0$$

gebracht werden. Die Quadrik enthält lineare Räume  $P_n$ , z. B. die Räume

$$P_n^*: y_0 = y_1 = \dots = y_n = 0, \quad z = 0,$$

$$P_n: x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0, \quad z = 0,$$

und die Teilräume  $P_v$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1$ ) von  $P_n$ .



Jeder Zykel  $C^k$  von einer Dimension  $< 2(n+1)$  kann durch einen homologen ersetzt werden, der den Raum  $P_n^*$  nicht trifft. Sodann deformieren wir den Zykel innerhalb  $Q_{2n+1}$  dadurch, daß der Punkt

$$x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n, z$$

in

$$\lambda^2 x_0, \dots, \lambda^2 x_n, y_0, \dots, y_n, \lambda z$$

übergeführt wird, wobei  $\lambda$  von 1 nach 0 geht. Der Zykel  $C^k$  kommt dadurch innerhalb  $P_n$  zu liegen.

Also bilden die Zyklen

$$P_v = P^{2v} \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

eine Homologiebasis für alle Zyklen der Dimensionen  $k < 2(n+1)$ . Daß diese Zyklen nicht homolog Null sind, ergibt sich daraus, daß jeder Raum  $P_v$  mit einem ebenen Schnitt  $Q_{2n+1-v}$  genau einen Schnittpunkt vom Index 1 bestimmt. Die Homologiezahlen und Homologiebasen für die Dimensionen  $k \geq 2(n+1)$  bestimmen sich wie in § 1 auf Grund des Reziprozitätsprinzips. Die Homologiezahlen  $p_0, p_1, \dots, p_{2(n+1)}$  sind abwechselnd 1 und 0, und die Homologiebasis besteht aus den Zyklen

$$P^0, P^2, \dots, P^{2n}, Q^{2(n+1)}, \dots, Q^{2(n+1)}.$$

Bemerkung. Die in § 1 und § 2 angewandte Methode kann auch auf reelle Quadriken in reellen projektiven Räumen angewandt werden. Die Gleichungen dieser Quadriken können nämlich immer auf die Form

$$x_0 y_0 + \dots + x_l y_l + z_1^2 + \dots + z_m^2 = 0$$

gebracht werden; die zu benutzende Deformation führt den Punkt

$$\{x_0, \dots, x_l, y_0, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m\}$$

in

$$\{\lambda^2 x_0, \dots, \lambda^2 x_l, y_0, \dots, y_l, \lambda z_1, \dots, \lambda z_m\}$$

über und ist stetig außer für die Punkte des Teilraums

$$P_{l-1}^*; y_0 = \dots = y_l = 0, z_1, \dots, z_m = 0.$$

Diese Deformation führt zu einer vollständigen Bestimmung aller Homologiegruppen der Dimensionen  $k < l + m - 1$ . Falls die Quadrik  $Q_{2l+m}$  orientierbar ist, was aber nur für gerade Werte von  $m$  (und im trivialen Fall der Sphäre:  $l = 1$ ) der Fall ist, kann man weiter aus dem Reziprozitätsprinzip die fehlenden Homologiegruppen bestimmen.

### § 3.

#### Die Formel von Halphen.

Nachdem die Homologiebasen der Quadriken  $Q_{2n}$  und  $Q_{2n+1}$  bestimmt und ihre Schnittpunktmatrizen berechnet sind, kann man die „Schnittpunktzahl“ zweier algebraischer Teilmannigfaltigkeiten komplementärer

Dimensionszahl, d. h. im Fall isolierter Schnittpunkte die Summe ihrer Schnittpunktsindizes, ohne weiteres berechnen („Topologische Begründung“ § 8). Das Ergebnis läßt sich für beide Fälle  $Q_{2n}$  und  $Q_{2n+1}$  gemeinsam so formulieren:

Jede algebraische Teilmannigfaltigkeit  $M_k$  von  $Q_m$  hat eine Gradzahl, nämlich die Schnittpunktszahl von  $M$  mit dem Basiselement  $P_{m-k}$  oder  $Q_{m-k}$  der Homologiegruppe; nur im Fall  $m = 2n$ ,  $k = n$  hat  $M_k$  zwei Gradzahlen  $b$  und  $f$ , nämlich die Schnittpunktszahlen von  $M_n$  mit  $P_n$  und  $P'_n$ . Die Schnittpunktszahl zweier Mannigfaltigkeiten  $M_k$  und  $M_{m-k}$  ist gleich dem Produkt der Gradzahlen; nur im Fall  $m = 2n$ ,  $k = n$  wird die Schnittpunktszahl gegeben durch die Ausdrücke:

$$bb' + ff' \text{ für } n \text{ ungerade,}$$

$$b'f + fb' \text{ für } n \text{ gerade,}$$

wobei  $b, f$  die Grade von  $M_k$  und  $b', f'$  die von  $M_{m-k}$  sind.

Ein interessanter Fall ist der, wo  $Q_m$  die vierdimensionale Mannigfaltigkeit aller Geraden des Raumes  $P_3$  ist, deren Gleichung (in Plücker'schen Linienkoordinaten) lautet:

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Man erhält das Ergebnis, daß jede Regelschar und jeder Geradenkomplex eine Gradzahl besitzt, nämlich die Schnittzahl mit einem (eventuell speziellen) linearen Komplex bzw. mit einem Geradenbüschel, während eine Geradenkongruenz zwei Gradzahlen, nämlich den „Bündelgrad“  $b$  (Schnittzahl mit einem Geradenbündel) und den „Feldgrad“  $f$  (Schnittzahl mit einem ebenen Geradenfeld) hat. Die Schnittzahl einer Regelschar und eines Komplexes ist gleich dem Produkt der Gradzahlen, während die Schnittzahl zweier Kongruenzen mit den Gradzahlen  $b, f$  und  $b', f'$  durch die von Halphen<sup>4)</sup> gefundene Formel

$$bb' + ff'$$

geliefert wird.

<sup>4)</sup> G. Halphen, C. R. Ac. Paris 1872, S. 41. Vgl. auch H. Schubert, Math. Annalen 10, S. 96, sowie Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 62; H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, S. 268 und 275. Alle zitierten Beweise sind, da sie sich nicht auf eine klare Multiplizitätsdefinition beziehen, als ungenügend zu bezeichnen.

## Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Im folgenden soll bewiesen werden, daß asymptotisch 100 % aller ganzzahligen Gleichungen in bezug auf den rationalen Zahlkörper keinen Affekt haben. Das heißt, wenn man alle Gleichungen  $f(x) = 0$  bildet, wo

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ein ganzzahliges Polynom ist, dessen Koeffizienten dem Betrage nach  $\leq N$  sind, so strebt der Bruchteil dieser Gleichungen, deren Galoissche Gruppe die symmetrische ist, mit wachsendem  $N$  gegen Eins.

Die bisherigen Beweise ähnlicher Seltenheitssätze<sup>1)</sup> stützen sich meistens auf den Hilbertschen Irreduzibilitätsatz und erfordern daher transzendente Hilfsmittel. Der hier darzustellende Beweis dagegen ist rein elementar. Er beruht auf der bekannten Dedekind-Bauerschen Methode zur Bildung affektloser Gleichungen mittels Zerlegungen modulo verschiedener Primzahlen<sup>2)</sup>. Es läßt sich nämlich beweisen, daß die nach dieser Methode gebildeten Gleichungen schon 100 % aller ganzzahligen Gleichungen ausmachen. Das ist übrigens nicht verwunderlich, denn auf Grund der Kronecker-Frobeniusschen Dichtigkeitstheorie weiß man ja, daß das nachstehend zu erwähnende Dedekindsche Kriterium für Affektlosigkeit nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, sobald nur zu jeder Gleichung passende Primzahlen herangezogen werden.

Die erwähnte Methode beruht auf dem folgenden Dedekindschen Satz, für dessen elementaren Beweis ich auf mein Buch *Moderne Algebra I*, § 56 verweise:

*Wenn ein ganzzahliges Polynom  $f(x)$  vom Grade  $n$  modulo Primzahlen  $p_1, p_2, p_3$  folgendermaßen zerfällt: modulo  $p_1$  in irreduzible Faktoren*

<sup>1)</sup> Vgl. K. Dörge, Die Seltenheit der reduziblen Polynome und der Normalgleichungen, *Math. Annalen* 95 (1925), S. 247—256.

<sup>2)</sup> M. Bauer, Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt, *Math. Ann.* 64 (1907), S. 325—327.

der Grade  $n-1$  und 1, modulo  $p$ , in einen quadratischen Faktor und einen oder zwei Faktoren ungeraden Grades, während modulo  $p$ , das Polynom irreduzibel und vom Grade  $n$  ist, so hat die Gleichung  $f(x) = 0$  keinen Affekt.

Ich werde die drei im Satz genannten Arten der Zerfällung eines Polynoms Zerfällungen erster, zweiter und dritter Art nennen. Es soll nun gezeigt werden, daß asymptotisch 100 % aller ganzzahligen Polynome die Eigenschaft haben, daß es eine Primzahl gibt, modulo welcher sie in irgendeiner vorgeschriebenen Weise (also insbesondere von der ersten, zweiten oder dritten Art) zerfallen.

Zuerst möge die Anzahl der modulo  $p$  irreduziblen inkongruenten Polynome  $n$ -ten Grades berechnet werden. Diese zerfallen im Galoisfeld  $GF(p^n)$  vollständig in Linearfaktoren. Jedes Element  $\theta$  des  $GF(p^n)$ , das nicht schon einem Unter-Galoisfeld  $GF(p^m)$  angehört, ist Wurzel eines solchen irreduziblen Polynoms, genauer von  $p-1$  solchen Polynomen, da die Restklasse von  $a_0 \bmod p$  noch beliebig gewählt werden kann. Die Anzahl dieser  $\theta$  ist mindestens

$$p^n - \sum_{m|n} p^m \geq p^n - \sum_{m=1}^{n-1} p^m > p^n - \frac{p^n}{p-1} = \frac{p^n(p-2)}{p-1}.$$

Da jedes mod  $p$  irreduzible Polynom  $n$  solche Wurzeln  $\theta$  hat, so ist die Anzahl dieser Polynome gleich dem  $n$ -ten Teil der eben berechneten Anzahl der  $\theta$ , multipliziert mit  $(p-1)$  wegen der Willkür von  $a_0$ . Die Anzahl der irreduziblen Polynome mod  $p$  ist also größer als

$$\frac{p^n(p-2)}{n} = \frac{p^{n+1}}{n} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \geq \frac{p^{n+1}}{3n} \quad \text{für } p \geq 3,$$

also größer als der  $3n$ -te Teil aller mod  $p$  verschiedenen Polynome.

Um nun z. B. die Anzahl der Polynome abzuschätzen, die von der ersten Art sind, also in einen Linearfaktor und einen Faktor  $(n-1)$ -ten Grades zerfallen, hat man die Anzahl  $p$  der möglichen (normierten) Linearfaktoren  $x - a$  mit der eben berechneten Mindestzahl der irreduziblen Polynome  $(n-1)$ -ten Grades zu multiplizieren. Man findet so, daß von den  $p^{n+1}$  möglichen mod  $p$  verschiedenen Polynomen mehr als  $\frac{p^{n+1}}{3(n-1)}$ , also mehr als der Bruchteil  $\frac{1}{3(n-1)}$  von der ersten Art zerfällt.

In ganz entsprechender Weise findet man für jede mögliche Zerfällungsart (insbesondere für die drei im obigen Satz angeführten Zerfällungsarten) einen festen (von  $p$  unabhängigen) Bruch, der angibt, welcher Bruchteil von den  $p^{n+1}$  möglichen Polynomen mindestens diese Zerfällungsart besitzt, wobei eventuell einige sehr kleine Primzahlen ausgenommen sein

können. Für die erste, zweite und dritte Zerfällungsart sind diese Brüche z. B.

$$\frac{1}{3(n-1)}, \quad \frac{1}{6 \cdot 3(n-2)}, \quad \frac{1}{3n} \quad (p > 2).$$

Ist  $\frac{1}{k}$  der kleinste von diesen drei Brüchen, so können wir zusammenfassend den Satz aussprechen: *Modulo jeder Primzahl  $p > 2$  zerfallen mindestens  $\frac{1}{k}$  aller mod  $p$  inkongruenten Polynome  $n$ -ten Grades in einer vorgegebenen, ersten, zweiten oder dritten Art.*

Es seien jetzt  $p_1, p_2, p_3, \dots$  alle ungeraden Primzahlen. Wir fragen, wie viele modulo  $p_1 p_2$  inkongruente Polynome sowohl  $p_1$  als mod  $p_2$  nicht von der ersten Art zerfallen. Von den  $p_1^n$  Restklassen von Polynomen mod  $p_1$  zerfallen höchstens  $\frac{k-1}{k} p_1^n$  nicht von der ersten Art, ebenso mod  $p_2$  höchstens  $\frac{k-1}{k} p_2^n$ . Die  $(p_1 p_2)^n$  Restklassen von Polynomen mod  $p_1 p_2$  sind Durchschnitte von je einer Restklasse mod  $p_1$  und einer mod  $p_2$ ; unter diesen Durchschnitten gibt es höchstens

$$\frac{k-1}{k} p_1^n \cdot \frac{k-1}{k} p_2^n = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 (p_1 p_2)^n,$$

welche weder mod  $p_1$  noch mod  $p_2$  von der ersten Art zerfallen.

Ebenso gibt es unter den  $(p_1 p_2 p_3)^n$  Restklassen von Polynomen mod  $p_1 p_2 p_3$  höchstens  $\left(\frac{k-1}{k}\right)^3 (p_1 p_2 p_3)^n$ , welche weder mod  $p_1$ , noch mod  $p_2$ , noch mod  $p_3$  von der ersten Art zerfallen, usw.

Wir wählen nun bei gegebenem  $\varepsilon$  eine Zahl  $m$  so groß, daß

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^m < \varepsilon$$

ist. Dann haben von den  $P^n = (p_1 p_2 \dots p_m)^n$  Restklassen von Polynomen mod  $P = p_1 p_2 \dots p_m$  höchstens  $\varepsilon P^n$  die Eigenschaft, modulo keiner Primzahl  $p_i$  von der ersten Art zu zerfallen. Ebenso haben höchstens  $\varepsilon P^n$  die Eigenschaft, modulo keinem  $p_i$  von der zweiten bzw. dritten Art zu zerfallen. Die übrigen Restklassen, mindestens  $(1 - 3\varepsilon) P^n$  an Zahl, zerfallen modulo mindestens einer Primzahl  $p_i$  von der ersten, modulo einer anderen von der zweiten, modulo einer dritten von der dritten Art. Auf Grund des anfangs angeführten Satzes sind alle Gleichungen  $f(x) = 0$ , die zu diesen Restklassen mod  $P$  gehören, Gleichungen ohne Affekt.

Wir wählen jetzt  $2N + 1 \geq P$ . Von den  $2N + 1$  Zahlen  $a$  mit  $a \leq N$  liegen höchstens  $\left[\frac{2N+1}{P}\right] + 1$  in einer Restklasse modulo  $P$ ; also liegt in den  $3\varepsilon P^n$  Restklassen, welche Gleichungen mit Affekt

ergeben können, höchstens die folgende Anzahl von Polynomen mit Koeffizientenbeträgen  $\leq N$ :

$$3 \varepsilon P^n \left( \frac{2N+1}{P^n} + 1 \right)^n = 3 \varepsilon (2N+1+P)^n \leq 3 \cdot 2^n \varepsilon (2N+1)^n.$$

Die übrigen  $(1 - 3 \cdot 2^n \varepsilon) (2N+1)^n$  Polynome mit Koeffizientenbeträgen  $\leq N$  ergeben sicher Gleichungen ohne Affekt. Der Bruchteil  $(1 - 3 \cdot 2^n \varepsilon)$  kann aber beliebig nahe an Eins gebracht werden. Damit ist die am Anfang formulierte Behauptung bewiesen.

Die im vorstehenden Beweis enthaltene Abschätzung des Bruchteils der Gleichungen, welche einen Affekt besitzen können, ließe sich noch etwas verschärfen. Es hat aber wenig Sinn, das auszuführen, da die vermutlich richtige Größenordnung  $\frac{1}{N^2}$  dieses Bruchteils (vgl. die analogen Abschätzungen in der unter <sup>1)</sup> zitierten Arbeit) mit dieser Methode anscheinend nicht erreicht werden kann.

(Eingegangen am 24. 2. 1933).

## Über parabolische Risse.

Von

F. Rehbock in Bonn.

Um die bekannten Methoden der darstellenden Geometrie zu wenigen übergeordneten Typen zusammenzufassen, kann man — wie ich in drei früheren Arbeiten<sup>1)</sup> synthetisch ausgeführt habe — eine auf L. Eckhart<sup>2)</sup> zurückgehende Abbildung des Strahlenraumes benutzen: Gegeben sei eine reelle Bildebene  $\pi$  und eine reguläre,  $\pi$  nicht berührende Fläche zweiten Grades  $\Phi$ . Die eine Geradenschar auf  $\Phi$  werde als projizierende Schar  $S$  ausgezeichnet. Jede lineare Kongruenz, deren Brennpunkte  $S$ -Strahlen sind, heiße eine  $S$ -Kongruenz. Ein Raumstrahl  $G$ , der nicht der zweiten Geradenschar  $T$  von  $\Phi$  angehört, ist in genau einer  $S$ -Kongruenz enthalten. Als „Riß“ ordne man ihm den in  $\pi$  liegenden Strahl  $G'$  dieser  $S$ -Kongruenz zu. Die Strahlen  $T$  sind singulär.

Wird  $\Phi$  ein Kegel zweiten Grades mit der Spitze  $o$ , so erhält man für die nicht durch  $o$  gehenden Geraden die Zentralprojektion mit dem Zentrum  $o$ . Bei ihr besteht zwischen den Strahlen eines nicht durch  $o$  gehenden Feldes und der Gesamtheit der zugeordneten Risse eine reguläre Kollineation. Dagegen werden die Risse eines Bündels  $p$  zusammengedrängt zu einer einparametrischen Strahlengesamtheit, nämlich dem Büschel, dessen Scheitel die Zentralprojektion  $p'$  von  $p$  ist. Verwendet man eine Spurendarstellung, ordnet also jedem Strahl seinen Spurpunkt

<sup>1)</sup> I. F. Rehbock, Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), Nr. 5, S. 379—400. II. F. Rehbock, Projektive Aufgaben einer darstellenden Geometrie des Strahlenraumes. Ebenda 6 (1926), Nr. 6, S. 449—468. III. F. Rehbock, Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Monatshefte f. Math. u. Phys. 38, 2. Heft, S. 257—274.

<sup>2)</sup> L. Eckhart, Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-nat. Kl., Abt. IIa, 132 (1923), 5. und 6. Heft. Vgl. ferner L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsmethoden. Wien 1926.



mit der Bildebene  $\pi$  zu, so wird dual zwar im Bilde der zweidimensionale Charakter jedes nicht mit  $\pi$  vereinigten Bündels, nicht aber der eines beliebigen Feldes zum Ausdruck gebracht. Die geschilderten *allgemeinen* Risse dagegen haben die wichtige Eigenschaft, daß *zugleich* die Risse der Strahlenbündel und der Strahlenfelder über das Bildgebiet ausgebreitet werden, daß also zwischen jedem Bündel und seiner Rißgesamtheit, aber auch zwischen jedem Felde und seiner Rißgesamtheit eine reguläre Kollineation besteht, falls das Bündel oder Feld von singulären Strahlen frei ist.

Bei Verwendung von zwei projizierenden Scharen erhält man nur dann eine eindeutige Abbildung des Strahlenraumes auf die geordneten Strahlenpaare der Bildebene, wenn die zugehörigen singulären Scharen genau einen Strahl gemeinsam haben. In der folgenden Arbeit wird gezeigt, wie man eine derartige eindeutige Abbildung dadurch gewinnen kann, daß man  $\Phi$  in ein Ebenenpaar  $e_1, e_2$  ausarten läßt und die beiden auf  $\Phi$  liegenden Geradenscharen in zwei verschränkte Strahlbüschelpaare: Sind  $r_1$  und  $r_2$  ihre Scheitel auf dem Schnittstrahl  $R = e_1 e_2$ , so besteht die erste projizierende Schar aus den Büscheln  $[r_1, e_1]$  und  $[r_2, e_2]$ , die zweite aus den Büscheln  $[r_1, e_2]$  und  $[r_2, e_1]$ . Die entstehenden Risse sollen *parabolische Risse* genannt werden.

Legt man in  $\pi$  in geeigneter Weise eine *parabolische Maßbestimmung* von euklidischem oder pseudoeuklidischem Typus fest, so stellt sich heraus, daß den Strahlenfeldern des Raumes als Bilder die Bewegungen, den Strahlenbündeln die Umlegungen der betreffenden Geometrie eindeutig zugeordnet werden. Ersetzt man das ebene Bildgebiet durch ein Strahlenbündel<sup>3)</sup>, so wird die Rolle der Bewegungen und Umlegungen vertauscht, und man erhält nach einfacher Umformung den allgemeinsten Typus, der der kinematischen Abbildung von Blaschke und Grünwald<sup>4)</sup> zugrunde liegt.

## § 1.

### Erste Konstruktion und Struktur des parabolischen Risses.

1. Problemstellung. Bei der Abbildung der hyperbolischen und elliptischen ebenen Kinematik auf den Punkt- und Ebenenraum, die ich

<sup>3)</sup> Vgl. den Auszug eines vom Verfasser in Hamburg 1928 gehaltenen Vortrages. Jahresber. d. D. M. V. **38** (1929), S. 11.

<sup>4)</sup> W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nicht-euklidische Geometrie. Zeitschrift f. Math. Phys. **60** (1911), S. 61–91, 203 f. J. Grünwald, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sitzungsber. Akad. Wien, Abt. IIa, **120** (1911), S. 677–741.

in einer früheren Arbeit<sup>5)</sup> diskutiert habe, spielte eine reguläre „Fläche“ zweiten Grades die Hauptrolle. Um die analogen Betrachtungen für den *euklidischen* und *pseudoeuklidischen* Fall durchzuführen, gehe man von einer Fläche  $\Phi$  aus, die in ein *Doppelpaar*<sup>6)</sup> ausgeartet sei: Ihre Punktgesamtheit soll bestehen aus zwei Punktfeldern  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  durch den reellen Strahl  $R$ , ihre Ebenengesamtheit aus zwei Bündeln  $r_1$  und  $r_2$  auf  $R$ ; die Erzeugendenscharen arten aus in zwei *verschränkte Strahlbüschelpaare*: die Schar ( $S$ ) bestehe aus den Büscheln  $[r_1, \varrho_1]$  und  $[r_2, \varrho_2]$ , die Schar ( $T$ ) aus den Büscheln  $[r_1, \varrho_2]$  und  $[r_2, \varrho_1]$  (Fig. 1). Nur die Strahlen dieser Büschel sollen  $\Phi$ -Strahlen heißen. Wir betrachten im folgenden zwei Fälle: den „*pseudoeuklidischen Typus*“, bei dem  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $r_1, r_2$  reell, und den „*euklidischen Typus*“, bei dem  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $r_1, r_2$  je konjugiert imaginär sein sollen.

Gegeben sei ferner eine reelle Bildebene  $\pi$ , die keinen  $\Phi$ -Strahl enthalte; sie schneide  $R$  im Punkte  $r$ . Die „Kernkurve“  $\Delta$  besteht aus den  $\pi$ -Strahlen  $R_1$  und  $R_2$  von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , die beim euklidischen Typus konjugiert imaginär, beim pseudoeuklidischen reell sind.

Dieser „parabolische“ Fall erfordert eine besondere Betrachtung, weil die Polarität des Doppelpaares eine ausgeartete ist, so daß die Ergebnisse des in der zitierten Arbeit behandelten allgemeinen Falles gewisse Änderungen und Einschränkungen erfahren.

Man denke sich auf der Punktreihe  $R$  und im Ebenenbüschel  $R$  je die Involution mit den Doppelementen  $r_1, r_2$  bzw.  $\varrho_1, \varrho_2$  bestimmt, ferner im Strahlbüschel  $(r, \pi)$  die Involution mit den Doppelstrahlen  $R_1, R_2$ . Zwei Elemente, die sich in einer dieser Involutionen entsprechen, sollen hier kurz als *Spiegelbilder* bezeichnet werden. Die  $\Phi$ -Polarität sieht dann so aus: Der  $\Phi$ -Pol einer nicht durch  $R$  gehenden Ebene  $\alpha$  ist das

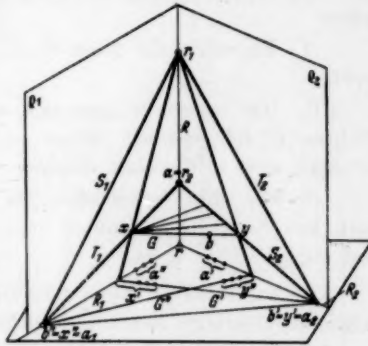


Fig. 1. Konstruktion der Abbildung  $G \rightarrow G', G''$ . (Zugleich: Eine zweifach singuläre  $\Delta$ -Kollineation als Bild einer Ebene  $\alpha$  durch  $r_2$ .)

<sup>5)</sup> F. Rehbock, Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinetik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Monatshefte f. Math. u. Phys. 38, 2. Heft, S. 257–274.

<sup>6)</sup> Vgl. über diese Bezeichnung: F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, bearbeitet von W. Rosemann, S. 90. Berlin 1928.

Spiegelbild  $a$  des Punktes  $R\alpha$ , die  $\Phi$ -Polarebene eines nicht auf  $R$  liegenden Punktes  $b$  ist das Spiegelbild  $\beta$  der Ebene  $bR$ . Umgekehrt sind also einer  $R$ -Ebene  $\beta$  alle Punkte der Spiegelebene von  $\beta$ , einem  $R$ -Punkt  $a$  alle Ebenen durch den Spiegelpunkt von  $a$  polar zugeordnet. Die  $\Phi$ -Polare eines nicht durch  $R$  gehenden Strahles ist stets  $R$ . Einem Strahl des Gebüsches  $R$ , der mit  $R$  das Büschel  $[c, \gamma]$  bestimmt, sind als Polaren alle Strahlen desjenigen Büschels zugeordnet, dessen Zentrum der Spiegelpunkt von  $c$  und dessen Feld die Spiegelebene von  $\gamma$  ist, kurz das Spiegelbild von  $[c, \gamma]$ .

Wie im allgemeinen Falle, stellen wir auch hier zunächst die Aufgaben:

I. Es sollen die Risse  $G', G''$  beliebiger Strahlen  $G$  angegeben werden.

II. Wie verschafft man sich sämtliche Originale, die zu einem Bildpaar  $G', G''$  gehören? Ist es auch hier so, daß einem Bildpaar als Originale zwei zu  $\Phi$  polare Strahlenmannigfaltigkeiten entsprechen?

III. Wie sieht insbesondere das Koinzidenzgebilde<sup>7)</sup> aus? und hat auch hier die Polarität von  $\Delta$  eine für das Koinzidenzgebilde wichtige Bedeutung?

2. Konstruktion der Abbildung. Um das Konstruktionsgesetz möglichst einfach zu formulieren, definieren wir:

*Jede lineare Kongruenz, die sämtliche T-Strahlen enthält, deren Brennnlinien also S-Strahlen sind, heiße eine S-Kongruenz; jede lineare Kongruenz, die alle S-Strahlen enthält, deren Brennnlinien also T-Strahlen sind, eine T-Kongruenz. Dann soll allgemein folgende Festsetzung gelten:*

*Einem Strahl  $G$  sollen als Risse die  $\pi$ -Strahlen  $G'$  und  $G''$  der S- und der T-Kongruenz zugeordnet werden, die  $G$  enthalten.  $G'$  heiße der S-Riß,  $G''$  der T-Riß von  $G$ . (Fig. 1.)*

Falls  $G$  den Strahl  $R$  nicht schneidet, sind diese Kongruenzen eindeutig festgelegt. Wählt man umgekehrt zwei nicht durch  $r$  gehende Bilder  $G'$  und  $G''$ , so schneiden sich die zu ihnen gehörenden Kongruenzen in einem dem Gebüsch  $R$  nicht angehörenden Strahl  $G$  und in  $R$ , d. h. der  $\Phi$ -Polaren von  $G$ . Setzt man fest, daß der für beide Risse singuläre Strahl  $R$  nie als Original gemeint sei, so erhält man nur ein Original<sup>8)</sup>. Wird  $G' = G''$ , aber nicht durch  $r$  gewählt, so gehört in diesem Sinne dazu nur das Original  $G = G' = G''$ . Ist ferner  $G$  ein

<sup>7)</sup> Das Koinzidenzgebilde ist die Gesamtheit jener Strahlen, deren Risse zusammenfallen:  $G' = G''$ .

<sup>8)</sup> F. Rehbock, Projektive Aufgaben einer darstellenden Geometrie des Strahlenraumes. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6 (1926), S. 449—468, § 8.

$\Delta$ -Strahl<sup>9)</sup>), aber kein  $R$ -Strahl,  $T$  der  $T$ -Strahl und  $S$  der  $S$ -Strahl durch seinen  $\pi$ -Punkt, so ist nach unserer Konstruktion  $G'$  der  $\pi$ -Strahl des Büschels  $TG$ ,  $G''$  der  $\pi$ -Strahl des Büschels  $GS$ .

Durch dieses Konstruktionsgesetz werden aber auch die Risse der  $R$ -Strahlen bestimmt. Unter den  $S$ -Kongruenzen befindet sich nämlich auch die einparametrische Schar parabolischer Kongruenzen mit der Achse  $R$ , die die Büschel der  $T$ -Strahlen  $[r_1, \varrho_2]$  und  $[r_2, \varrho_1]$  enthalten, unter den  $T$ -Kongruenzen die parabolischen Kongruenzen mit den Büscheln der  $S$ -Strahlen  $[r_1, \varrho_1]$  und  $[r_2, \varrho_2]$ . Ein  $R$ -Strahl  $G$  durch einen  $R$ -Punkt  $a \neq r_x$  und in einer  $R$ -Ebene  $\alpha \neq \varrho_x$  ( $x = 1$  und  $2$ ) gehört einer und nur einer parabolischen  $S$ -Kongruenz an; ihr  $\pi$ -Strahl ist also der erste Riß  $G'$  von  $G$  (Fig. 2), und ebenso ist der zweite Riß  $G''$  der  $\pi$ -Strahl der parabolischen  $T$ -Kongruenz, die  $G$  enthält.

Um sich diese Kongruenzen zu verschaffen, bestimme man die Projektivität

$$(1) \quad (r_1 r_2 a x) = (\varrho_2 \varrho_1 \alpha \xi)^{10)}$$

zwischen den  $R$ -Punkten  $x$  und den  $R$ -Ebenen  $\xi$  und die Projektivität

$$(r_1 r_2 a y) = (\varrho_1 \varrho_2 \alpha \eta)$$

zwischen den  $R$ -Punkten  $y$  und den  $R$ -Ebenen  $\eta$ . Die Gesamtheit der Büschel  $[x, \xi]$  bildet die  $S$ -Kongruenz, die der Büschel  $[y, \eta]$  die  $T$ -Kongruenz. Ist  $A = \alpha \pi$ , so sind also  $G'$  und  $G''$  durch die Gleichung

$$(2) \quad (r_1 r_2 a r) = (R_2 R_1 A G')$$

und

$$(r_1 r_2 a r) = (R_1 R_2 A G'')$$

<sup>9)</sup> D. h. ein Strahl, der  $R_1$  oder  $R_2$  schneidet!

<sup>10)</sup> D. h.: Die durch die Zuordnung  $r_1 \rightarrow \varrho_2$ ,  $r_2 \rightarrow \varrho_1$ ,  $a \rightarrow x$  bestimmte Projektivität  $x \rightarrow \xi$ . Im folgenden sei ferner stets das Doppelverhältnis der vier Elemente  $a, b, c, d$

$$(a b c d) = \frac{(a c) \cdot (b d)}{(a d) \cdot (b c)}.$$

Die Klammern rechts bedeuten zweireihige Determinanten in binären homogenen Koordinaten, also  $(a c) = a_0 c_1 - c_0 a_1$ .

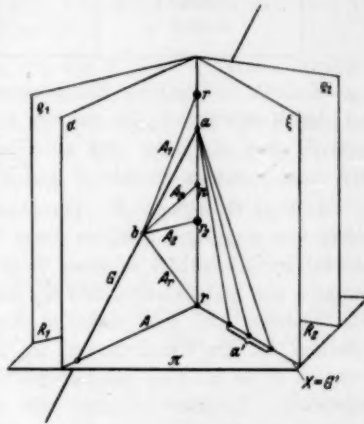


Fig. 2. Die Abbildung des Gebüsches  $R$ .

bestimmt. Speziell fallen für einen  $r$ -Strahl  $G$  die Risse zusammen:  $G' = G''$  ist der  $\pi$ -Strahl des Büschels  $RG$ .

Ist dagegen  $G$  etwa ein von den  $T$ -Strahlen verschiedener Strahl in  $\varrho_1$ , so gibt es nur eine ausgeartete  $S$ -Kongruenz, die  $G$  enthält, nämlich jene, die aus allen Strahlen des Feldes  $\varrho_1$  und des Bündels  $r_1$  besteht; ihr  $\pi$ -Strahl ist  $G' = R_1$ . So findet man allgemeiner:

Ein Strahl im	hat zum ersten Riß	zum zweiten Riß
Feld $\varrho_1$	$R_1$	$R_1$
Feld $\varrho_2$	$R_2$	$R_2$
Bündel $r_1$	$R_1$	$R_2$
Bündel $r_2$	$R_2$	$R_1$

Endlich sind bei der Konstruktion der ersten Risse alle  $T$ -Strahlen, bei der Konstruktion der zweiten Risse alle  $S$ -Strahlen *singulär*: Jeder  $\pi$ -Strahl darf als erster Riß eines gegebenen Strahles  $T$  oder als zweiter Riß eines gegebenen Strahles  $S$  angesehen werden.

3. Das Gebüsch  $R$ . Die Abbildungen  $G \rightarrow G'$  und  $G \rightarrow G''$  ordnen jedem von singulären Strahlen freien Büschel zwei zu ihm projektive Bildbüschel zu<sup>11)</sup>. Enthält es einen Strahl  $T$ , so erhalten alle nicht-singulären Strahlen ein und dasselbe Bild  $G'$ , enthält es einen Strahl  $S$ , so erhalten alle anderen ein und dasselbe Bild  $G''$ <sup>12)</sup>. Für das Folgende von Interesse ist die Konstruktion der Bilder derjenigen Büschel, die dem Gebüsch  $R$  (d. h. dem ausgearteten linearen Komplex mit der Achse  $R$ ) angehören. Zunächst erhalten alle nicht-singulären Strahlen des „*singulären*“ Büschels  $[a, \alpha]$ , bei dem also  $a$  ein  $R$ -Punkt und  $\alpha$  eine  $R$ -Ebene ist, dasselbe  $G'$  und dasselbe  $G''$  (im allgemeinen  $\neq G'$ ). Ist ferner  $b \neq a$  ein  $G$ -Punkt (Fig. 2),  $A = \alpha\pi$ ,  $A_x = br_x$  und  $A_r = br$ , so wird (wegen  $A_r' = A$ ) das Doppelverhältnis

$$(3) \quad (A, A_x, A, G) = (r_1, r_x, r, a) = (A_1' A_1' A_r' G') = (R_1 R_2 A G') \\ = (A_1'' A_1'' A_r'' G'') = (R_2 R_1 A G'').$$

Das Büschel  $[b, \alpha]$  wird mithin durch die Involution

$$(4) \quad (R_1 R_2 A G') = (R_2 R_1 A G'')$$

zwischen den Strahlen  $G'$  und  $G''$  im  $\pi$ -Büschel  $r$  abgebildet.

Ein Büschel  $[a, \beta]$ , bei dem  $a$  ein  $R$ -Punkt, aber  $\beta$  keine  $R$ -Ebene ist, enthält mindestens zwei Koinzidenzstrahlen, nämlich in  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ .

<sup>11)</sup> Vgl. die zitierte Arbeit I, § 3.

<sup>12)</sup> F. Rehbock, Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6, S. 379–400, § 3.

Handelt es sich also nur um die Abbildung des Gebüsches  $R$  und nehmen wir für den Augenblick an, daß allein das Büschel  $[r, \pi]$  als Bildgebiet zur Verfügung stehe, so kann man in einer in der nicht-euklidischen Geometrie zuweilen verwendeten Sprechweise das bisherige Ergebnis so formulieren:

**Satz 1:** Ist  $R$  der gemeinsame Strahl der projizierenden Regelscharen, so wird ein Strahlbüschel  $[a, \beta]$ , dessen Zentrum  $a$  ein  $R$ -Punkt, dessen Feld  $\beta$  aber keine  $R$ -Ebene ist, durch eine eigentliche automorphe Kollineation des Strahlenpaares  $R_1, R_2$  abgebildet.

Ein Strahlbüschel  $[b, \alpha]$ , dessen Feld  $\alpha$  eine  $R$ -Ebene, dessen Zentrum  $b$  aber kein  $R$ -Punkt ist, wird durch eine uneigentliche automorphe Kollineation des Paares  $R_1, R_2$  abgebildet<sup>13)</sup>.

4. Das Koinzidenzgebilde. Von den  $R$  nicht treffenden Strahlen gehören dem Koinzidenzgebilde gewiß nur die  $\pi$ -Strahlen an, von den  $R$ -Strahlen sind mindestens alle  $\varrho_1$ - und  $\varrho_2$ -Strahlen und alle  $r$ -Strahlen dazuzurechnen. Die Involution (4), die das Bild des Büschels  $[b, \alpha]$  war, enthält außer  $A$  den Spiegelstrahl  $\bar{A}$  von  $A$  als Doppelement. Ihm entspricht also in  $[b, \alpha]$  ein Koinzidenzstrahl, der auf  $R$  einen Punkt  $p$  so ausschneidet, daß

$$(r_1 r_2 r p) = (R_1 R_2 A \bar{A}) = -1;$$

$p$  ist daher der Spiegelpunkt von  $r$ , d. h. der von der Wahl des Büschels unabhängige  $\Phi$ -Pol von  $\pi$ . Damit sind jetzt alle dem Gebüsch  $R$  angehörenden Koinzidenzstrahlen ermittelt:

**Satz 2:** Das Koinzidenzgebilde bei zwei konjugierten parabolischen Rissen besteht aus dem Felde  $\pi$ , dem zu  $\pi$  in bezug auf  $\Phi$  polaren Bündel  $p$  und dem „ $\pi$ -Gürtel“, unter dem verstanden werden soll die Strahlengesamtheit der Felder  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  und des Bündels  $r = \varrho_1 \varrho_2 \pi$ .

5. Die Originalstrahlen zweier durch  $r$  gewählter Bilder. Es seien  $G'$  und  $G''$  beide  $\neq R_x$ , und  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die  $R$ -Ebenen durch  $G'$  und  $G''$ . Die  $G'$  enthaltende  $S$ -Kongruenz, die durch die Büschel  $[r_1, \varrho_2]$ ,  $[r_2, \varrho_1]$  und  $[r, \gamma_1]$  bestimmt ist, besteht aus den Büscheln  $[a, \alpha_1]$ , für die

$$(\varrho_2 \varrho_1 \gamma_1 \alpha_1) = (r_1 r_2 r a),$$

die  $G''$  enthaltende  $T$ -Kongruenz aus den Büscheln  $[a, \alpha_2]$ , für die

$$(\varrho_1 \varrho_2 \gamma_2 \alpha_2) = (r_1 r_2 r a).$$

<sup>13)</sup> Bei einer eigentlichen automorphen Kollineation des Strahlenpaares  $R_1, R_2$  bleiben  $R_1$  und  $R_2$  einzeln fest, bei einer uneigentlichen werden sie vertauscht. F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, bearbeitet von W. Rosemann, 1928, S. 94.

Um beide zu schneiden, bestimmt man die  $R$ -Punkte  $a$ , für die  $\alpha_1 = \alpha_2$  wird; sind also  $\xi$  und  $\eta$  die Doppelemente der Involution

$$(5) \quad (\varrho_2 \varrho_1 \gamma_1 \alpha_1) = (\varrho_2 \varrho_3 \gamma_3 \alpha_2)$$

und  $x$  und  $y$  die zugehörigen  $R$ -Punkte, so enthalten die Büschel  $[x, \xi]$  und  $[y, \eta]$  alle Strahlen, denen  $G', G''$  zugeordnet sind.  $\xi$  und  $\eta$  sind Spiegelbilder in bezug auf  $\varrho_1, \varrho_3$ ,  $x$  und  $y$  also in bezug auf  $r_1, r_3$ , d. h.:

Satz 3: Zu einem durch  $r$  gewählten Strahlenpaar  $G', G''$  gehören zwei in bezug auf  $\Phi$  polare Büschel von Originalstrahlen.

Ist speziell  $G' = G'' \neq R_x$ , so gehören dazu das Büschel  $[r, \gamma] = G' R$  und das dazu polare, dem Koinzidenzbündel  $p$  angehörende Büschel  $[p, \bar{\gamma}]$ , dessen Ebene  $\gamma$  also Spiegelebene von  $\gamma$  ist.

Zu beachten ist besonders, daß zu einem gegebenen reellen Bildpaar  $G', G''$  durch  $r$  dann und nur dann reelle Originalstrahlen gehören, wenn die von (5) in  $\pi$  ausgeschnittene Involution

$$(R_2 R_1 G' A_1) = (R_1 R_3 G'' A_2)$$

zwischen  $A_1$  und  $A_2$  reelle Doppelemente hat. Das ist für reelles  $R_1, R_2$  — d. h. beim pseudoeuklidischen Typus — nur dann der Fall, wenn die Involution gegensinnig, wenn also  $G', G''$  im selben Segment von  $R_1, R_2$  gewählt wurden. Dagegen existieren für konjugiert imaginäre  $R_1$  und  $R_2$  stets reelle Doppelstrahlen<sup>14)</sup>, so daß hier  $G', G''$  keiner Einschränkung zu genügen brauchen.

Wählt man  $G'$  durch  $r$ ,  $G''$  nicht durch  $r$ , so kommt als Original nur  $R$  in Frage.

6. Die Rolle der  $\Delta$ -Polarität. Zum Schluß ist nunmehr leicht einzusehen, daß auch bei diesem Typus die ausgeartete  $\Delta$ -Polarität den Zusammenhang zwischen den  $\pi$ -Punkten und den Rissen der eigentlichen (d. h. nicht in  $\pi$  liegenden) Koinzidenzstrahlen liefert. Ein  $\pi$  Punkt  $a$ , der kein  $\Delta$ -Punkt ist, enthält nur einen solchen Koinzidenzstrahl  $A = ap$ . Dessen Bild ist der Spiegelstrahl  $A' = A''$  von  $a\tau$ , d. h. die  $\Delta$ -Polare von  $a$ . Liegt  $a \neq r$  auf  $R_x$ , so gibt es zwar ein ganzes Büschel  $[a, \varrho_x]$  solcher Koinzidenzstrahlen durch  $a$ , aber sie alle werden in  $R_x$ , d. h. die Polare von  $a$  abgebildet. Ist endlich  $a = r$ , d. h. gleich dem singulären Punkt der  $\Delta$ -Polarität, so gehören zu ihm alle  $\pi$ -Strahlen als Polaren. In der Tat enthält ja  $r$  den doppelt-singulären Strahl  $R$ , dem alle  $\pi$ -Strahlen als erster und zweiter Riß zugeordnet werden können.

<sup>14)</sup> Eine Involution, die durch ein Paar konjugiert imaginärer und ein Paar reeller Elemente bestimmt ist, ist stets reell und hyperbolisch.



Die projektiven Raumaufgaben sind also im Bildgebiet  $\pi$  mit Hilfe parabolischer Risse zu lösen<sup>15)</sup>, wenn man in  $\pi$  eine nicht ausgeartete reelle Strahleninvolution in einem Büschel  $r$  gibt und jedem  $\pi$ -Punkt  $\alpha$  denjenigen  $r$ -Strahl als Polare zuordnet, der dem Strahl  $\alpha r$  in jener Involution entspricht. Ist die Involution *hyperbolisch*, so sind die Risse hergestellt zu denken durch *zwei reelle verschränkte Strahlbüschelpaare*, ist sie *elliptisch*, durch *zwei konjugiert imaginäre verschränkte Strahlbüschelpaare*.

Wir führen endlich noch den Satz an:

Satz 4: *Einer Umorientierung aller Rißpaare  $G', G''$  entspricht im Raume eine Spiegelung an  $p, \pi$ <sup>16)</sup>.*

Nimmt man nämlich mit dem Raum diese Transformation vor, so geht jede  $S$ -Kongruenz in die  $T$ -Kongruenz mit dem gleichen  $\pi$ -Strahl über, so daß der Spiegelstrahl von  $G$  jetzt  $G''$  zum ersten und  $G'$  zum zweiten Riß hat.

## § 2.

### Zweite Konstruktion des parabolischen Risses durch Netzprojektionen.

7. Netzprojektion für nicht-singuläre Ebenen. Ein Feld oder Bündel, welches  $\Phi$ -Strahlen enthält, heiße *singulär*, ein von  $\Phi$ -Strahlen freies Feld oder Bündel *nicht-singulär*. Jedem von  $\Phi$ -Strahlen freien Strahlenbüschel  $[x, b]$  werden zwei Bildbüschel mit den Zentren  $b'$  und  $b''$  zugeordnet. Enthält das Büschel aber beispielsweise einen  $T$ -Strahl, so daß also seine nicht-singulären Strahlen  $G$  ein und denselben Riß  $G'$  erhalten, so muß jeder Punkt auf  $G'$  als ein mögliches  $b'$  angesehen werden. Die Bilder  $b'$  (und in analoger Weise  $b''$ ) kann man sich nun durch die folgende zweite Konstruktionsvorschrift verschaffen, die auch im Falle einer nicht-ausgearteten Kernfläche<sup>17)</sup> gilt:

Satz 5: *Um den Bildpunkt oder die Bildpunkte  $b'$  (bzw.  $b''$ ) eines Flächenelements  $[x, b]$  zu bestimmen, dessen Zentrum  $b$  kein  $\pi$ -Punkt sei, suche man zunächst die  $T$ -Kongruenz (bzw.  $S$ -Kongruenz), die den  $\pi$ -Strahl  $A$  von  $\alpha$  enthält; sie heiße das „projizierende  $T$ -Netz“ (bzw.  $S$ -Netz) von  $\alpha$ .*

*Die durch  $b$  gehenden Strahlen dieser Kongruenz schneiden in  $\pi$  die gesuchten Bildpunkte  $b'$  (bzw.  $b''$ ) aus<sup>18)</sup>.*

<sup>15)</sup> F. Rehbock, Die linearen Punkt-, Ebenen- und Strahlabbildungen der darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6, S. 379–400, § 7; siehe auch S. 464; Satz 9.

<sup>16)</sup> D. h. die involutorische Perspektivität mit dem Fixbündel  $p$  und dem Fixfelde  $\pi$ .

<sup>17)</sup> F. Rehbock, Monatsh. f. Math. u. Phys. 33, S. 258 ff., Satz 2a.

<sup>18)</sup> Man beachte: Um den  $S$ -Riß von  $\alpha$  herzustellen, benutzt man jetzt eine  $T$ -Kongruenz.

Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich zunächst für nicht-singuläre Ebenen  $\alpha$ , die also nicht durch  $r_1$  und  $r_2$  gehen. Gehört nämlich  $\alpha$  nicht den Büscheln  $R_1$  oder  $R_2$  an, so ist das zu  $\alpha$  gehörende projizierende  $T$ -Netz nicht-ausgeartet; durch seine Strahlen werden daher die Felder  $\alpha$  und  $\pi$  kollinear aufeinander bezogen. Ist  $G$  ein  $R$  nicht schneidender  $\alpha$ -Strahl, so sind die Netzstrahlen durch seine  $\Phi$ -Punkte  $S$ -Strahlen, seine durch das Netz hergestellte Projektion ist also identisch mit unserer ursprünglichen Zuordnung  $G \rightarrow G'$ , bei der ja ebenfalls diese Netzstrahlen benutzt wurden. Daraus folgt weiter, daß auch die Netzprojektion des Büschels  $[\alpha, R]$  gleich ist dem ersten Riß dieses Büschels. *Beachtenswert ist, daß jetzt nach dieser zweiten Konstruktionsvorschrift der Riß eines reellen Strahles auch beim euklidischen Typus durch reelle Konstruktion hergestellt wird.*

Geht  $\alpha$  durch  $R_1$ , so ist das einzige zu  $\alpha$  gehörende projizierende  $T$ -Netz die ausgeartete Kongruenz, die aus dem Felde  $\varrho_1$  und dem Bündel  $r_2$  besteht. Die Netzprojektion wird jetzt zur Zentralprojektion des Feldes  $\alpha$  von  $r_2$  aus, und wieder sieht man, daß die dadurch definierte Zuordnung  $G \rightarrow G'$  identisch ist mit der ursprünglich eingeführten. Die analogen Fälle ergeben sich aus der tabellarischen Zusammenstellung:

Ebene durch	Erster Riß	Zweiter Riß
	= Zentralprojektion mit dem Zentrum	
$R_1$	$r_2$	$r_1$
$R_2$	$r_1$	$r_2$

8. Netzprojektion für singuläre Ebenen. Wir zeigen, daß die Konstruktion des Satzes 5 auch für singuläre Ebenen gilt.

Die projizierenden Netze sind allein durch den  $\pi$ -Strahl  $A$  von  $\alpha$  festgelegt. Hat  $A$  zwei  $\Delta$ -Punkte, so enthält das Ebenenbüschel  $A$  zwei singuläre Ebenen  $Ar_1$  und  $Ar_2$ . Geht  $A$  durch den  $\Delta$ -Punkt  $r$ , so ist im Büschel  $A$  nur die Ebene  $AR$  singulär, die im speziellen Falle  $\varrho_1$  oder  $\varrho_2$  sein kann.

Wir beginnen mit dem ersten Falle.  $\alpha$  gehe durch  $r_2$ , besitze zwei  $\Delta$ -Punkte  $a_1 = AR_1$  und  $a_2 = AR_2$ , und die  $\Phi$ -Strahlen  $T_1 = \alpha\varrho_1$  und  $S_2 = \alpha\varrho_2$  (Fig. 1).  $T_1$  und  $T_2 = r_1a_2$  sind die Brennlinien des projizierenden  $T$ -Netzes,  $S_1 = r_1a_1$  und  $S_2$  die des  $S$ -Netzes. Daher ist für jeden nicht auf  $A$  gewählten  $\alpha$ -Punkt  $b$  die Netzprojektion  $b' = a_2$ , falls  $b$  nicht auf  $T_1$ , und  $b'' = a_1$ , falls  $b$  nicht auf  $S_2$  liegt. Dagegen geht durch einen  $T_1$ -Punkt  $x$  ein Büschel von Strahlen des Netzes  $[T_1, T_2]$ , die also in  $\pi$  eine ganze Punktreihe von Bildern ( $x'$ ) ausschneiden: die  $\pi$ -Gerade  $G'$  der Ebene  $\alpha T_1$  (Fig. 1), also den nach der ursprünglichen

Vorschrift definierten ersten Riß der Strahlen  $G \neq T$ , des Büschels  $[x, \alpha]$ . D. h.: Bewegt sich  $b$  auf dem  $\alpha$ -Strahl  $G \neq A$ , so bleibt  $b' = a_2$  fest, bis  $b = x = \varrho_1 G$  wird: jetzt erst durchläuft  $b'$  die Punktreihe  $G'$ ; und es bleibt ebenso  $b'' = a_1$ , bis  $b = y = \varrho_2 G$  wird: jetzt erst wird  $G''$  durchlaufen<sup>19)</sup>. Ist  $a = R\alpha = r_2$ , so läßt sich das Ergebnis so zusammenstellen:

Originalpunkt in $\alpha = Ar_2$	Erster Riß	Zweiter Riß
$x \neq r_2$ auf $A_1 = T_1$	$x'$ jeder $G'$ -Punkt	$x'' = a_1$
$y \neq r_2$ auf $A_2 = S_2$	$y' = a_2$	$y''$ jeder $G''$ -Punkt
$a = r_2$	$a'$ jeder $R_2$ -Punkt	$a''$ jeder $R_1$ -Punkt

Als zweiter Fall werde eine Ebene  $\alpha \neq \varrho_2$  durch  $R$  gewählt. Es ist wieder zu zeigen, daß die  $\alpha$ -Strahlen durch die punktweise Projektion dieselben Bilder erhalten, wie durch die ursprüngliche Festsetzung. Das projizierende  $T$ -Netz ist bestimmt durch die Projektivität

$$(r_1 r_2 r x) = (\varrho_1 \varrho_2 \alpha \xi).$$

Für jeden nicht auf  $R$  und nicht auf  $A$  liegenden  $\alpha$ -Punkt  $b$  (Fig. 2) ist  $b r$  der projizierende Netzstrahl, also  $b' = r$  der erste Riß des Büschels  $[b, \alpha]$ , genau wie bei der ursprünglichen Konstruktionsvorschrift.  $b$  bewege sich nun auf  $G$  bis zum  $R$ -Punkt  $a$ . Ist  $\xi$  die dem Punkte  $a$  durch jene Projektivität zugeordnete Ebene, so schneidet das Büschel  $[a, \xi]$ , also die Gesamtheit der durch  $a$  gehenden projizierenden Netzstrahlen, in  $\pi$  wieder eine ganze Punktreihe von Bildern  $a'$  auf  $X = \xi\pi$  aus. Da

$$(r_1 r_2 r a) = (R_1 R_2 A X),$$

also

$$(r_1 r_2 a r) = (R_2 R_1 A X),$$

so ist nach Gleichung (2)  $X \equiv G'$  = dem nach der ersten Vorschrift definierten ersten Riß von  $G$ .

Die Netzprojektion liefert also, wenn man sie in der geschilderten Weise ausführt, auch für die nicht-singulären Strahlen singulärer Felder dieselben Risse wie früher.

9. Die Originalbüschel eines Bildpunktepaares. Anknüpfend an die Netzprojektion kann man sich zunächst die Aufgabe stellen, alle Büschel  $[x, \xi]$  zu ermitteln, die einen gegebenen ersten Rißpunkt  $x'$  haben.

$x'$  liege nicht auf  $A$ . Das projizierende  $T$ -Netz einer Ebene  $\xi$  ist durch deren  $\pi$ -Strahl  $X$  bestimmt. Jedem beliebig gewählten  $X$  ist ein

<sup>19)</sup> Dabei ist die Punktreihe  $(x)$  auf  $T_1$  projektiv zum Büschel  $(G')$  in  $a_2$ , die Punktreihe  $(y)$  auf  $S_2$  projektiv zum Büschel  $(G'')$  in  $a_1$ .

und nur ein Raumstrahl  $\bar{X}$  durch  $x'$  zugeordnet, der jenem  $T$ -Netz angehört. Für  $X$  durch  $x'$  ist  $\bar{X} = X$ . Da  $X$  offenbar als  $T$ -Riss von  $\bar{X}$  angesehen werden kann und das Bündel  $x'$  keinen  $T$ -Strahl enthält, so besteht zwischen dem Felde aller  $X$  und dem Bündel aller  $\bar{X}$  eine nicht-ausgeartete Kollineation  $\mathfrak{R}$ , in der sich die Strahlen des Büschels  $[x', \pi]$  einzeln entsprechen; deshalb ordnet  $\mathfrak{R}$  jedem Büschel  $[y, \pi]$  ein Bündel  $[x', \eta]$  so zu, daß  $y$  und  $\eta$  vereinigt liegen.

Das Aufsuchen aller Originalbüschel  $[x, \xi]$  geschieht nunmehr so:

Entweder: man wähle ein  $\xi$ , und zwar zunächst nicht durch  $x'$ , suche das zu  $X = \xi\pi$  gehörende  $\bar{X}$  und bestimme  $\bar{X}\xi = x$ ; oder man wähle ein  $x$ , und zwar zunächst nicht in  $\pi$ , suche das zu  $\bar{X} = xx'$  gehörende  $X$  und bestimme  $Xx = \xi$ . Dabei wird insbesondere einer  $\Phi$ -Ebene ein Punkt auf ihrem  $T$ -Strahl, einem  $\Phi$ -Punkt eine Ebene durch seinen  $\Phi$ -Strahl eindeutig zugeordnet. Wählt man schließlich einen  $\pi$ -Punkt  $y$  auf  $X$  und ist  $\eta = y\bar{X}$  die durch  $\mathfrak{R}$  zugeordnete Ebene, so ist auch  $[y, \eta]$  ein Originalbüschel. Dadurch sind auch die  $\pi$ -Punkte  $y$  und die  $x'$ -Ebenen  $\eta$  eineindeutig gepaart.

Die durch diese Konstruktionen definierte eineindeutige Zuordnung  $x \longleftrightarrow \xi$  ist aber ein *Nullsystem*, und zwar ein solches, das alle  $T$ -Strahlen als Gewindestrahlen enthält und dem Punkte  $x'$  die Nullebene  $\pi$  zuordnet. Gibt man nämlich ein derartiges Nullsystem und will die dadurch definierte Polare eines nicht durch  $x'$  gewählten  $\pi$ -Strahles  $X$  bestimmen, so muß diese durch  $x'$  gehen und alle  $X$  treffenden Gewindestrahlen schneiden, insbesondere also auch die  $X$  treffenden  $T$ -Strahlen; die gesuchte Polare ist daher  $\bar{X}$ , und daraus ergibt sich für die Herstellung des Nullsystems ebenfalls die geschilderte Konstruktion.

Ist  $x'$  ein  $\Delta$ -Punkt und  $S$  sein  $S$ -Strahl, so erhalten alle Büschel des ausgearteten Komplexes mit der Achse  $S$  und nur diese mindestens den Bildpunkt  $x'$ . Da auch dieser Komplex die  $T$ -Strahlen enthält, so gilt allgemein:

**Satz 6:** Die zu einem gegebenen Rißpunkt  $x'$  (bzw.  $x''$ ) gehörenden Originalbüschel sind die Büschel eines linearen Komplexes, der die  $T$ - (bzw. die  $S$ -) Strahlen und das Bündel  $[x', \pi]$  (bzw.  $[x'', \pi]$ ) enthält.

Zu einem Bildpaar  $x', x''$  gehören als Originalbüschel also die Büschel einer linearen Kongruenz. Für den Fall, daß  $x'$  und  $x''$  nicht auf demselben  $r$ -Strahl und nicht auf  $R_x$  gewählt werden, kann man ihre Brennpunkte, d. h. das beiden Nullsystemen gemeinsame Polarenpaar, folgendermaßen konstruieren (Fig. 3): Ein gemeinsamer Strahl beider Komplexe ist  $R$ . Wir suchen daher zunächst diejenigen  $R$  enthaltenden Büschel  $[a, \alpha]$ , die beiden Komplexen gemeinsam sind, denen also unter anderen Bildern auch  $x'$  als erster und  $x''$  als zweiter Bildpunkt zugeordnet werden. Alle

von  $R$  verschiedenen Strahlen eines solchen Büschels müssen dann also die Risse  $G' = x'r$  und  $G'' = x''r$  besitzen, so daß die gesuchten Büschel identisch sind mit den beiden nach Satz 3 festgelegten Originalbüscheln  $[a_1, \alpha_1]$  und  $[a_2, \alpha_2]$  dieses Rißpaares  $G', G''$ . Ferner ist auch  $x'x'' = H$  ein beiden Komplexen gemeinsamer Strahl. Ist  $f_1 = H\alpha_1$  und  $f_2 = H\alpha_2$ , so sind daher  $F_1 = a_1f_1$  und  $F_2 = a_2f_2$  die gesuchten Brennlinien. Da  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  spiegelbildlich in bezug auf das Ebenenpaar  $\varrho_1, \varrho_2$ , und  $a_1, a_2$  spiegelbildlich in bezug auf  $r_1, r_2$  liegen, so sind  $F_1$  und  $F_2$   $\Phi$ -polar. Jedes Büschel der nunmehr festgelegten Kongruenz  $[F_1, F_2]$  erhält (mindestens!) die Bildpunkte  $x', x''$ .

Wählt man speziell  $x' = x''$  (Fig. 4), so wird nach Satz 2  $a_1 = r$ ,  $\alpha_1 = Rx'$ , ferner  $a_2$  gleich dem  $\Phi$ -Pol  $p$  von  $\pi$ , und  $\alpha_2$  gleich der Spiegel-

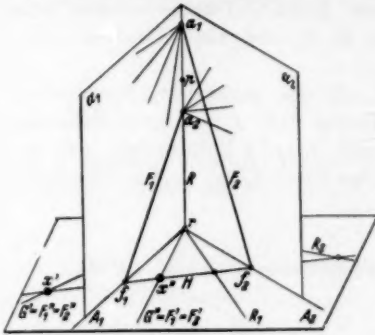


Fig. 3. Die Originalbüschel eines Punktepaares  $x', x'' \neq x'$ .

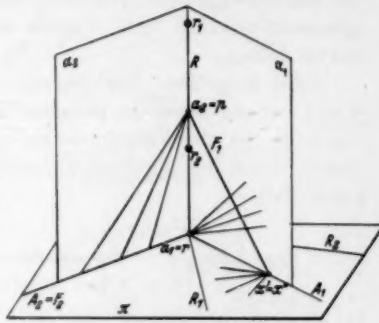


Fig. 4. Die Originalbüschel eines Punktepaares  $x', x'' = x'$ .

ebene von  $\alpha_1$ . Da jetzt das Büschel  $[x', \pi]$  beiden Komplexen angehört, so wird die eine Brennlinie  $F_1 = px'$ , die andere der Spurstrahl  $A_2 = F_2$  von  $\alpha_2$ , d. h. die  $\Delta$ -Polare von  $x'$ .

In ähnlicher Weise konstruiert man die Kongruenz der Originalbüschel auch für weitere spezielle Lagen des Bildpaares  $x', x''$ . Das Ergebnis lautet somit:

**Satz 7:** Die Originalbüschel eines Punktepaares  $x', x''$  sind die Büschel einer linearen Kongruenz, deren Brennstrahlen  $\Phi$ -polar sind.

### § 3.

#### Die Abbildung der Ebenen und Punkte des $R_3$ .

10. Übersicht über die  $\Delta$ -Kollineationen im parabolischen Falle. Ein nicht-singuläres Feld enthält einen  $\varrho_1$ - und einen  $\varrho_2$ -Strahl. Zwischen den beiden ihm zugeordneten Bildfeldern besteht

daher eine „*eigentliche  $\Delta$ -Kollineation*“, d. h. eine solche, die die Strahlen  $R_1$  und  $R_2$  einzeln fest läßt. Ein nicht-singuläres Bündel enthält einen  $r_1$ - und einen  $r_2$ -Strahl, und daher wird ihm als Bild eine „*uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation*“ zugeordnet, die die Strahlen  $R_1$  und  $R_2$  vertauscht. Bevor wir diese Zuordnung näher untersuchen, soll ein graphischer Überblick über die Struktur aller  $\Delta$ -Kollineationen gegeben werden<sup>20)</sup>.

Das Ordnungsgebilde des Kegelschnitts  $\Delta$  besteht aus dem reellen oder konjugiert imaginären Geradenpaar  $R_1, R_2$ , das Klassengebilde aus dem doppeltzählenden Schnittpunkt  $r$ . Die  $\Delta$ -Kollineationen sind also dual zu den Ähnlichkeitstransformationen der pseudoeuklidischen oder euklidischen ebenen Geometrie, in der ein Punktepaar  $r_1, r_2$  auf einer ausgezeichneten Geraden  $R$  als absolutes Gebilde gewählt ist. Daher sind die Bezeichnungen im folgenden diesen dualen  $\Delta$ -Transformationen entsprechend gewählt. Alle Punkte auf  $R_1, R_2$  und alle  $r$ -Strahlen sollen *isotrop* heißen.

Gibt man dem Strahlenpaar  $R_1, R_2$  die projektiven Koordinaten  $\pm \varepsilon : 1 : 0$  und setzt im pseudoeuklidischen Falle  $\varepsilon = 1$ , im euklidischen  $\varepsilon = i$ , so ist die Transformationsmatrix einer  $\Delta$ -Kollineation, also die Matrix, durch die die Geradenkoordinaten transformiert werden, im eigentlichen Falle:

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon^3 b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \text{ mit der Determinante } C = t(a^2 - \varepsilon^3 b^2),$$

im uneigentlichen Falle:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon^3 b & c \\ b & -a & d \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \text{ mit der Determinante } D = -t(a^2 - \varepsilon^3 b^2).$$

Dabei sind  $a, b, c, d$  und  $t$  unabhängige komplexe Parameter. Für alle nicht-singulären Kollineationen werde  $t = 1$  gesetzt.

Man ordne nun jeder Matrix in einem rechtwinkligen Koordinatensystem der Ebene einen Punkt mit den homogenen Koordinaten  $a : b : t$  zu. Dann entstehen für die *reellen*  $\Delta$ -Kollineationen die Bilder der Fig. 5 bis 8. Singuläre Kollineationen werden im euklidischen Falle nur durch den 0-Punkt 0 und die Punkte der uneigentlichen Geraden, im pseudoeuklidischen Falle überdies durch die Punkte der 45°-Geraden  $H_1$  und  $H_2$  durch 0 dargestellt. *Jeder andere Punkt repräsentiert eine zweiparametrische Schar nicht-singulärer  $\Delta$ -Kollineationen.*

<sup>20)</sup> Vgl. die im Jahresber. d. D. M. V. 1932, S. 255—269 erschienene Arbeit des Verfassers: Zur ebenen Strahlengeometrie vom euklidischen oder pseudoeuklidischen Typus.

Wir klassifizieren die  $\Delta$ -Kollineationen zunächst nach der Zahl ihrer Fixelemente und geben an, wie sich die möglichen Fälle auf die Punkte der Darstellungsebene verteilen. Zunächst betrachten wir die *eigentlichen Kollineationen*. Eine Kollineation mit drei und nur drei getrennten Fixstrahlen und -punkten heiße *Dreieckskollineation*. Im euklidischen Falle

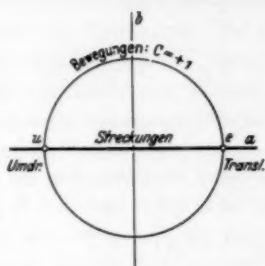


Fig. 5. Eigentliche euklidische  $\Delta$ -Kollineationen: Gleichsinnige Dehnungen.

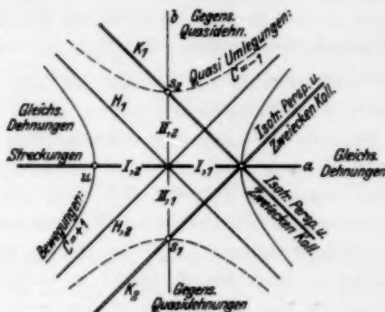


Fig. 6. Eigentliche pseudoeuklidische  $\Delta$ -Kollineationen.



Fig. 7. Uneigentl. euklidische  $\Delta$ -Kollineationen: Gegensinnige Dehnungen.

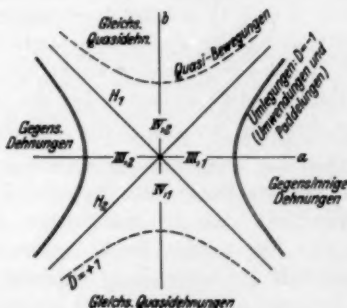


Fig. 8. Uneigentl. pseudoeuklidische  $\Delta$ -Kollineationen.

(Fig. 5) sind nur die Punkte der  $a$ -Achse *keine* Dreieckskollineationen, im pseudoeuklidischen (Fig. 6) berdies die Punkte der Geraden  $K_1$  und  $K_2$ , die unter  $45^\circ$  gegen die Achsen durch den Punkt  $e$  ( $a = 1, b = 0$ ) gehen<sup>21)</sup>.

<sup>21)</sup> In den Fig. 5 bis 8 sind die Linien, deren Punkte *keine* Dreieckskollineationen darstellen, doppelt gezeichnet.



In beiden Fällen sind die durch die Punkte der  $a$ -Achse repräsentierten Kollineationen Perspektivitäten mit dem Zentrum  $r$  und sollen *Streckungen* heißen.  $\epsilon$  repräsentiert die *Translationen*, bei denen ein  $r$ -Strahl punktweise fest bleibt; dazu gehört die Identität  $\mathcal{E}$ . Die Translation heiße isotrop, wenn die Perspektivitätsachse  $R_1$  oder  $R_2$  ist. Bei allen anderen Streckungen ist die Perspektivitätsachse nicht isotrop.  $u$  ( $a = -1$ ,  $b = 0$ ) repräsentiert die involutorischen Perspektivitäten, die *Umdrehungen* heißen sollen<sup>22)</sup>.

Die Punkte der Geraden  $K_1$  und  $K_2$  in Fig. 6 repräsentieren — je nach der Beschaffenheit von  $c$  und  $d$  — „isotrope Perspektivitäten“ oder „Zweieckenkollineationen“. Unter dem ersten Typus werde verstanden eine Perspektivität mit der Achse  $R_1$  (oder  $R_2$ ) und einem isotropen Zentrum  $q$  auf  $R_2$  (oder  $R_1$ ). Beim zweiten Typus sind von dem im allgemeinen Falle auftretenden Fixpunktdreieck zwei Ecken und zwei Seiten zusammengefallen: Liegt der Repräsentant etwa auf  $K_1$ , so ist  $r$  doppelt zählender und ein  $R_2$ -Punkt  $q$  einfach zählender Fixpunkt,  $R_1$  einfach zählender und  $R_2$  doppelt zählender Fixstrahl. Die Kollineation läßt sich dann zusammensetzen aus einer isotropen Perspektivität (mit dem Zentrum  $q$ ) und einer isotropen Translation (mit der Achse  $R_2$ ). Bei den  $K_2$ -Punkten ist die Rolle von  $R_1$  und  $R_2$  die umgekehrte. Speziell bedeuten  $s_1$  und  $s_2$  ( $a = 0$ ,  $b = \mp 1$ ) *isotrope Spiegelungen*, d. h. involutorische isotrope Perspektivitäten, oder aber „harmonische Zweieckenkollineationen“. Bei diesen wird im doppelt zählenden Punkt und auf der doppelt zählenden Geraden je eine Involution erzeugt. Bei den reellen euklidischen  $\Delta$ -Kollineationen treten diese  $K_1$ - und  $K_2$ -Typen nicht auf.

Bei den *uneigentlichen Kollineationen* stellen im pseudo-euklidischen Falle nur die Punkte der Hyperbel  $a^2 - b^2 = 1$  (Fig. 8) keine Dreieckskollineationen dar, im euklidischen Falle die des Kreises  $a^2 + b^2 = 1$  (Fig. 7). Ein solcher Punkt repräsentiert — wieder je nach der Beschaffenheit von  $c$  und  $d$  — entweder eine involutorische Perspektivität mit isotroper Achse  $Q$  und nicht isotropem Zentrum  $q$  (also eine „zentrale“ Spiegelung), die wir *Umwendung* nennen, oder aber eine Zweieckenkollineation von folgender Gestalt: Fest bleiben zwei mit  $R_1, R_2$  ein harmonisches Quadrupel bildende  $r$ -Strahlen  $P$  und  $Q$ , wobei  $P$  doppelt und  $Q$  einfach zu zählen ist; ferner ein einfach zählender Punkt  $q$  auf  $P$  und der doppelt zählende Punkt  $r$ . Diese Kollineation heiße *Paddeung*<sup>23)</sup>.

<sup>22)</sup> Der Name „Umdrehung“ muß für diese „axiale Spiegelung“ hier deshalb gewählt werden, weil der duale Fall der Punktgeometrie, die „zentrale Spiegelung“, dort zweckmäßig so genannt wird.

<sup>23)</sup> Die Bezeichnung stammt von Weyl.



Eine reelle  $\Delta$ -Kollineation soll je nach der im Büschel der reellen  $r$ -Strahlen erzeugten Projektivität *gleichsinnig* oder *gegensinnig* heißen. Im pseudoeuklidischen Falle kann man die Kollineationen auch danach unterscheiden, ob die durch das Paar  $R_1, R_2$  erzeugten Segmente in sich übergeführt oder vertauscht werden. Im euklidischen Falle stellt sich heraus, daß alle reellen eigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen gleichsinnig, alle uneigentlichen gegensinnig sind; im pseudoeuklidischen Falle treten dagegen vier Typen auf, die in den Fig. 6 und 8 durch die Punkte der Winkelräume I bis IV repräsentiert werden und denen wir (mit späterer Begründung) folgende Namen geben:

- I. Gleichsinnige Dehnungen: die Segmente gehen in sich über.
- II. Gegensinnige Quasidehnungen: die Segmente werden vertauscht.
- III. Gegensinnige Dehnungen: Die Segmente gehen in sich über.
- IV. Gleichsinnige Quasidehnungen: die Segmente werden vertauscht.

Jeder dieser Typen zerfällt in zwei Scharen 1 und 2, die sich nicht kontinuierlich ineinander überführen lassen, ohne daß die Kollineation singular wird. I, 1 erzeugt auf  $R_1$  und  $R_2$  je eine gleichsinnige Projektivität (Beispiel: die Identität), I, 2 je eine gegensinnige Projektivität (Beispiel: die Umdrehung); II, 1 auf  $R_2$  eine gleichsinnige, auf  $R_1$  eine gegensinnige Projektivität, II, 2 umgekehrt. In ähnlicher Weise lassen sich die vier uneigentlichen Typen unterscheiden.

Definiert man in der  $\Delta$ -Ebene nun eine *parabolische Metrik*, ordnet also jedem Strahlenpaar in geeigneter Weise ein Winkelquadrat  $\varphi^2$  (dual zum Entfernungsquadrat der Punktgeometrie) zu, so ergibt sich für das gewählte Koordinatensystem weiter: Bei Anwendung einer eigentlichen  $\Delta$ -Kollineation multipliziert sich das Winkelquadrat mit der Determinante  $C$ , bei einer uneigentlichen mit der negativen Determinante  $-D$ . Darum sollen die  $\Delta$ -Kollineationen mit den Determinanten  $C = +1$  bzw.  $D = -1$  *starre Transformationen*, die mit  $C = -1$  bzw.  $D = +1$  *quasi-starre Transformationen* heißen; allgemeiner bezeichnen wir die Transformationen mit  $C > 0$  und  $D < 0$  als *Dehnungen*, die mit  $C < 0$  und  $D > 0$  als *Quasidehnungen*. Dehnungen und Quasidehnungen zusammen bilden also nur einen Teil aller  $\Delta$ -Kollineationen. Beschränkt man sich aber auf reelle  $\Delta$ -Kollineationen, so gibt es im euklidischen Falle *nur Dehnungen*, weil hier ja stets  $C = a^2 + b^2 > 0$  und  $D = -(a^2 + b^2) < 0$  ist. Dagegen zerfallen die reellen pseudoeuklidischen  $\Delta$ -Kollineationen wegen  $C = a^2 - b^2$  und  $D = -(a^2 - b^2)$  in Dehnungen und Quasidehnungen. Schließlich ist es sinnvoll, weiter zu unterscheiden:

$C = +1$ : *Bewegungen*,

$C = -1$ : *Quasiumlegungen*,

$D = -1$ : *Umlegungen*,

$D = +1$ : *Quasibewegungen*.

Die zugeordneten Repräsentanten in den Fig. 5 bis 8 sind die Punkte der eingezeichneten Hyperbeln und Kreise. Daraus und aus der oben gegebenen Einteilung in gleichsinnige und gegensinnige  $\Delta$ -Kollineationen sieht man, daß die reellen Bewegungen und Quasibewegungen gleichsinnig, die reellen Umlegungen und Quasiumlegungen gegensinnig sind, so daß damit die Namengebung gerechtfertigt ist.

Im Rahmen dieser Geometrie ist ferner unter der Gesamtheit der Winkelkreise um den gegebenen nicht isotropen Strahl  $X$  das Büschel von Kurven zweiter Klasse zu verstehen, die sämtlich  $R_1$  und  $R_2$  enthalten und für die  $r$  und  $X$  polar sind. Dann läßt sich das Starrsein einer Kollineation rein geometrisch so erkennen<sup>34)</sup>:

*Eine eigentliche Dreieckskollineation ist dann und nur dann starr, d. h. eine Bewegung, wenn sie die Kreise um den nicht-isotropen Fixstrahl einzeln in sich überführt. Eine eigentliche  $\Delta$ -Kollineation, die keine Dreieckskollineation ist, ist dann und nur dann starr, wenn sie eine Translation oder Umdrehung ist. Eine uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation ist dann und nur dann starr, d. h. eine Umlegung, wenn sie keine Dreieckskollineation, also eine Umwendung oder Paddelung ist.*

11. Die Abbildung der Ebenen (Strahlenfelder). Es soll gezeigt werden, daß jeder Ebene  $\alpha$  eine eigentliche starre  $\Delta$ -Kollineation, also eine Bewegung als Bild zugeordnet wird. Wir untersuchen wieder drei Fälle.

1. Fall: Der  $\pi$ -Strahl  $A$  von  $\alpha$  habe zunächst zwei  $\Delta$ -Punkte  $a_1$  und  $a_2$ .  $\alpha$  schneidet aus dem Koinzidenzgebilde wenigstens die Strahlen  $A, A_1 = \alpha \varrho_1$  und  $A_2 = \alpha \varrho_2$  aus, so daß die Bildkollineation jeder  $A$ -Ebene wenigstens die Fixstrahlen  $A, R_1$  und  $R_2$  besitzt. Wählt man in  $\alpha$  einen Kegelschnitt  $\Delta_a$  durch  $a_1$  und  $a_2$  mit den Tangenten  $A_1$  und  $A_2$ , so wird diesem durch beide Netzprojektionen ein und derselbe Kegelschnitt  $\Delta'_a$  in  $\pi$  zugeordnet<sup>35)</sup>, der  $R_1$  und  $R_2$  in  $a_1$  und  $a_2$  berührt. Die zu  $\Delta'_a$  gehörende Kurve zweiter Klasse ist im oben angegebenen Sinne als Winkelkreis um  $A$  zu bezeichnen. Da also die der Ebene  $\alpha$  zugeordnete eigentliche  $\Delta$ -Kollineation jeden dieser Kreise in sich überführt, so ist sie nach der Schlußbemerkung von Nr. 10 starr, also eine *Bewegung*.

Bei der Drehung von  $\alpha$  um  $A$  erhält man alle Bewegungen mit den angegebenen Fixstrahlen. Denn ist etwa  $x$  ein  $A_1$ -Punkt einer dieser Ebenen  $\alpha$ , so erhält er die Risse  $x' = r_1 x \pi$  und  $x'' = r_2 x \pi$ . Nun ist

<sup>34)</sup> Vgl. die in Fußnote <sup>30)</sup> auf S. 30 zitierte Arbeit des Verfassers.

<sup>35)</sup> Rehbock, Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. Nr. 12, Satz 6.

die starre  $\Delta$ -Kollineation mit den Fixpunkten  $r$ ,  $a_1$  und  $a_2$  schon durch Angabe der Projektivität auf einer Fixgeraden  $R_1$  oder  $R_2$  festgelegt, also z. B. durch die Zuordnung

$$a_1 \rightarrow a_1, \quad r \rightarrow r, \quad x' \rightarrow x''.$$

Hält man bei der Drehung von  $\alpha$  den Punkt  $x'$  fest, so durchläuft  $x$  die Punktreihe  $S_\alpha = x'r_1, x''$  die Punktreihe  $R_1$ . Man erhält also so alle möglichen starren  $\Delta$ -Kollineationen mit jenen Fixelementen.  $\alpha = \pi$  liefert die Identität. Geht  $\alpha$  durch  $p$  (Fig. 9), so wird aus dem Koinzidenzgebilde noch das Büschel  $[p, \alpha]$  ausgeschnitten, die Kollineation läßt daher auch jeden  $r$ -Strahl fest, ist also nach der in Nr. 10 festgesetzten Terminologie eine *Streckung*, und zwar wegen  $(a_1 r x' x'') = (p r r_1 r_2) = -1$  eine *Umdrehung*.

Den beiden im  $A$ -Büschel enthaltenen singulären Ebenen

$$\alpha_1 = A r_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = A r_2$$

werden *singuläre  $\Delta$ -Kollineationen* zugeordnet. So entnimmt man aus der für  $\alpha_2$  ausführlich angegebenen Netzprojektion (Nr. 8), daß die zugeordnete  $\Delta$ -Kollineation in folgendem Sinne zweifach ausgeartet ist (Fig. 1): Jedem nicht auf  $R_2$  liegenden Punkt  $x'$  des ersten Feldes wird der Punkt  $x'' = a_1$ , jedem nicht auf  $R_1$  liegenden Punkt  $y''$  des

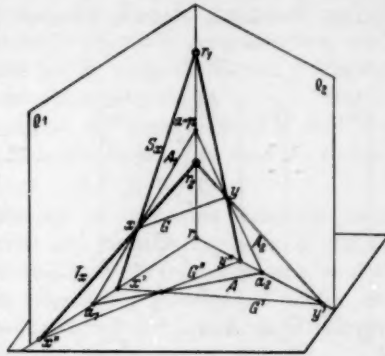


Fig. 9. Eine Umdrehung als Bild einer Ebene  $\alpha$  durch  $p$ .

zweiten Feldes der Punkt  $y' = a_2$  zugeordnet. Daher ist  $a_2$  zweifach<sup>26)</sup> *singulärer Punkt des ersten*,  $a_1$  *zweifach singulärer Punkt des zweiten Feldes*, d. h. jedem entsprechen alle Punkte des anderen Feldes. Ferner entsprechen jedem  $R_2$ -Punkt  $a'$  alle  $R_1$ -Punkte  $a''$  und umgekehrt, d. h. jedes Feld enthält noch eine Reihe einfach singulärer Punkte ( $a'$ ) bzw. ( $a''$ ). Für die zugehörigen Strahlenfelder sind  $R_2$  bzw.  $R_1$  zweifach, die Strahlen durch  $a_2$  bzw.  $a_1$  einfach singulär. Diese Kollineation darf als  $\Delta$ -Kollineation bezeichnet werden, weil jedem  $\Delta$ -Element<sup>27)</sup> wenigstens wieder ein  $\Delta$ -Element zugeordnet wird. Auch darf jedes der im nicht ausgearteten Fall fest bleibenden Elemente jetzt wiederum als Fixelement bezeichnet werden, weil wenigstens eines der ihm zugeordneten Elemente mit ihm zusammen-

<sup>26)</sup> Ein Punkt heiße  $k$ -fach singulär, wenn ihm in einer Punktverwandtschaft die Punkte einer  $k$ -parametrischen Punkteschar als Bilder zugeordnet werden.

<sup>27)</sup> D. h. jedem Punkt auf  $R_1$ ,  $R_2$  oder jedem Strahl durch  $r$ .

fällt.  $\alpha_1$  wird durch die analoge  $\Delta$ -Kollineation abgebildet, bei der  $a_1$  und  $a_2$  sowie  $R_1$  und  $R_2$  ihre Rollen vertauscht haben.

Betrachtet man bei der Bildkollineation von  $\alpha_2$  nur die Projektivität, die auf  $R_1$  erzeugt wird, so ist diese in folgendem Sinne ausgeartet: Jedem Punkt  $x' \neq r$  entspricht  $x'' = a_1$ , jedem Punkt  $a'' \neq a_1$  entspricht  $a' = r$ .  $r$  ist singulärer Punkt der ersten,  $a_1$  der zweiten Punktreihe. Bei  $\alpha_1$  ist die Rolle dieser Punkte vertauscht. Unter allen Projektivitäten auf  $R_1$  mit den Fixpunkten  $a_1$  und  $r$  sind dieses die beiden einzigen ausgearteten. So ergibt sich zunächst:

*Durch Wahl von  $a_1$  und  $a_2$  und einer beliebigen nicht singulären oder singulären Projektivität auf  $R_1$  mit den Fixpunkten  $r$  und  $a_1$  ist die dargestellte Raumebene eindeutig festgelegt.*

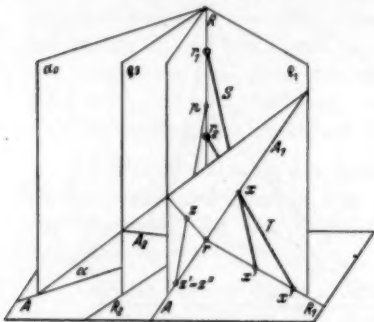


Fig. 10. Eine Translation als Bild einer Ebene  $\alpha$  durch  $r$ .

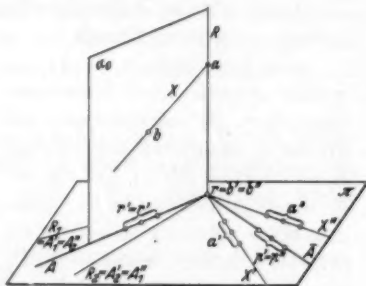


Fig. 11. Eine zweifach singuläre  $\Delta$ -Kollineation als Bild einer  $R$ -Ebene  $\alpha_0$ .

Im pseudoeuklidischen Fall sind bei reellem  $\Delta$  die beiden singulären Ebenen reell. Sie zerlegen das  $\Delta$ -Büschel in zwei Segmente, das „ $\pi$ -Segment“ und das die Ebene  $\bar{\alpha} = A p$  enthaltende „ $p$ -Segment“. Man erkennt so räumlich, daß die den reellen  $a$ -Ebenen zugeordneten starren Transformationen in zwei getrennte, nicht kontinuierlich ineinander überführbare Scharen zerfallen, die in der Fig. 6 durch die Punkte der beiden Hyperbeläste  $C = +1$  repräsentiert wurden. Im euklidischen Fall ist das nicht so.

2. Fall: Es werde nun der Spurstrahl  $A \neq R_1$  und  $A \neq R_2$  durch  $r$  gewählt (Fig. 10). Eine nicht singuläre Ebene  $\alpha$  schneidet aus dem Koinzidenzgebilde nur das Büschel  $[r, \alpha]$  aus: Die Bildkollineation läßt alle  $r$ -Strahlen und nur diese fest, ist also eine Perspektivität vom Typus der Translation. Der punktweise festbleibende  $r$ -Strahl ergibt sich folgender-

maßen durch Betrachtung beider Netzprojektionen. Ist  $\alpha_0$  die Ebene  $AR$ , so besteht das projizierende  $T$ -Netz aus den Büscheln  $[x_1, \xi]$ , für die

$$(\varrho_1 \varrho_2 \alpha_0 \xi) = (r_1 r_2 r x_1),$$

das projizierende  $S$ -Netz aus den Büscheln  $[x_2, \xi]$ , für die

$$(\varrho_1 \varrho_2 \alpha_0 \xi) = (r_2 r_1 r x_2).$$

Bei Drehung von  $\xi$  um  $R$  beschreiben  $x_1$  und  $x_2$  auf  $R$  zwei involutorische Punktreihen; ihren Doppelementen  $r$  und  $p$  sind die Ebenen  $\alpha_0$  und deren Spiegelebene  $\bar{\alpha}$  zugeordnet. Der von einer unserer Ebenen  $\xi$  in  $\alpha$  ausgeschnittene Strahl  $X_\alpha = \xi \alpha$  wird durch die Netzprojektionen punktweise von den Zentren  $x_1$  und  $x_2$  auf  $X = \xi \pi$  projiziert, so daß auf jedem  $r$ -Strahl eine parabolische Projektivität ausgeschnitten wird. Eine solche Projektivität wird speziell auf  $R_1$  durch die  $S$ - und  $T$ -Strahlen ausgeschnitten und ist das Bild der Punktreihe auf  $A_1 = \varrho_1 \alpha$ . Nur in der Ebene  $\bar{\alpha}$  sind beide Zentren gleich  $p$ , auf ihrem  $\pi$ -Strahl  $\bar{A}$  wird also die Identität erzeugt. *Die gesuchte Perspektivitätsachse ist daher der Spiegelstrahl  $\bar{A}$  von  $A$ .*

Die Translation ist nach Wahl von  $A$  und einer beliebigen nicht singulären parabolischen Projektivität auf einem  $r$ -Strahl, z. B. auf  $R_1$  festgelegt. Damit ist dann  $A_1$  und also auch die Originalebene  $\alpha = AA_1$  bestimmt, d. h. die nicht singulären Ebenen des Büschels  $\alpha \pi$  werden umkehrbar eindeutig auf die einparametrische Schar der Translationen mit derselben Achse  $\bar{A}$  abgebildet.

Es bleibt noch die Bildkollineation der singulären Ebene  $\alpha_0 = AR$  zu bestimmen. Nach Satz 1 wird jedes (Fig. 11) nicht singuläre Büschel  $[b, \alpha_0]$  dieser Ebene durch dieselbe Involution im Büschel  $r$  mit den Doppelstrahlen  $A$  und  $\bar{A}$  abgebildet. Ist  $a$  ein variabler  $R$ -Punkt,  $X$  ein Strahl des Büschels  $[a, \alpha_0]$ , so ergibt sich nach Satz 1 und nach der Tabelle in Nr. 2 auf S. 22 die folgende ausführliche Zusammenstellung, die man übrigens auch aus der für diese Ebene angegebenen Netzprojektion gewinnen kann (Fig. 11):

Original in $\alpha_0$	Erster Riß	Zweiter Riß
$X$	$X'$	$X''$
$[b, \alpha_0]$	$b' = r$	$b'' = r$
$[a, \alpha_0]$	jeder Punkt $a'$ auf $X'$	jeder Punkt $a''$ auf $X''$
$[r_1, \alpha_0] = (A_1)$	jeder Punkt auf $R_1$	jeder Punkt auf $R_1$
$[r_2, \alpha_0] = (A_2)$	jeder Punkt auf $R_2$	jeder Punkt auf $R_1$
$[r, \alpha_0]$	jeder Punkt $r'$ auf $A$	jeder Punkt $r''$ auf $A$
$[p, \alpha_0]$	jeder Punkt $p'$ auf $\bar{A}$	jeder Punkt $p''$ auf $\bar{A}$

Die ausgeartete Bildkollineation sieht danach folgendermaßen aus:

Ist  $X', X''$  (Fig. 11) ein Strahlenpaar der Involution im Büschel  $r$  mit den Doppelstrahlen  $A$  und  $\bar{A}$ , so sind jedem  $a'$  auf  $X'$  alle  $a''$  auf  $X''$  zugeordnet und umgekehrt.  $r$  ist zweifach singulärer Punkt beider Felder, jeder andere Punkt ist einfach singulär in bezug auf jedes Feld.

Durchläuft also  $a'$  eine beliebige Gerade, so kann dieser jede andere Gerade zugeordnet werden. Jeder  $\pi$ -Strahl ist zweifach singulär. Das ist erklärlich, weil für den  $\alpha_0$ -Strahl  $R$  jeder  $\pi$ -Strahl als erster und zweiter Riß in Frage kommt. Insbesondere gehört zu  $R_1$  (oder  $R_2$ ) unter anderem wieder  $R_1$  (oder  $R_2$ ), so daß auch dieser höchstausgeartete Grenzfall noch als eigentliche  $\Delta$ -Kollineation gedeutet werden kann. Sie ist nicht nur das Bild von  $\alpha_0$ , sondern auch von deren Spiegelebene. Jede uneigentliche Projektivität im Büschel  $r$  definiert also zugleich eine solche „hoch-singuläre“  $\Delta$ -Kollineation, die als Bild zweier zu den  $q_x$  harmonisch gelegenen  $R$ -Ebenen aufzufassen ist.

3. Fall: Wir wählen endlich  $A = R_1$ . Das erste Bildfeld ist die Zentralprojektion von  $r_2$ , das zweite die von  $r_1$  aus (Tabelle in Nr. 7). Die zwischen ihnen bestehende  $\Delta$ -Kollineation ist eine *isotrope Translation*, die  $R_1$  punktwise fest läßt. Bei Drehung von  $\alpha$  um  $R_1$  wird die einparametrische Schar dieser isotropen Translationen durchlaufen.

Die Zusammenfassung der Ergebnisse liefert die Sätze:

Satz 8: Durch parabolische Risse werden die nicht-singulären Ebenen des  $R_2$  umkehrbar eindeutig auf die euklidischen bzw. pseudoeuklidischen starren Transformationen vom projektiven Typus der Bewegungen abgebildet, und zwar die nicht-singulären Ebenen durch  $r = R\pi$  auf die Translationen, die nicht-singulären Ebenen durch den  $\Phi$ -Pol  $p$  von  $\pi$  auf die Umdrehungen, alle anderen auf Dreiecks-Kollineationen. Die singulären Ebenen lassen sich eindeutig festlegen durch gewisse zweifach-singuläre  $\Delta$ -Kollineationen.

Satz 9: Wird eine nicht-singuläre und nicht durch  $p$  gewählte Ebene  $\alpha \neq \pi$  auf eine Bewegung  $\mathfrak{A}$  abgebildet, so wird das Ebenenbüschel  $\alpha\pi$  umkehrbar eindeutig auf die einparametrische Schar von Bewegungen abgebildet, die (wenigstens) dieselben Fixelemente wie  $\mathfrak{A}$  besitzen.

Nach Wahl einer Bewegung in  $\pi$  ist es auch hier (wie bei hyperbolischen und elliptischen Rissen) so, daß sich noch außerhalb der durch jene Bewegung dargestellten Ebene  $\alpha$  Strahlen angeben lassen, deren Rißpaare der Bewegung angehören. Zu einem durch  $r$  gewählten Strahlenpaar  $G', G''$  gehört als Original zwar nur ein  $R$ -Strahl  $G$  in  $\alpha$ , außerhalb von  $\alpha$  aber das ganze Büschel  $GR$  und sein Spiegelbüschel; insbesondere gehören zu  $G' = G'' = R_1$  oder  $R_2$  alle  $q_1$ - und  $q_2$ -Strahlen. Ist  $a$  das





$y'_1 = a_2$ ,  $y'_2 = a_1$  und  $R_2$  die der Büschel  $y'_2 = a_1$ ,  $y'_1 = a_2$ . Wählt man umgekehrt also außer den Fixelementen ein der Involution auf  $A$  angehörendes Punktpaar  $y'_1 = a_2$ ,  $y'_2 = a_1$  als Bildpaar des Büschels  $[a, R_1]$ , so ist dadurch die Paddelung festgelegt und ebenfalls der Originalraum-punkt als Schnitt von  $a, r_1$  und  $a, r_2$  eindeutig festgelegt. Die Wahl  $y'_1 = y'_2 = q$  liefert den Spezialfall der *Umwendung*, also den Originalpunkt  $q$ , die Wahl  $y'_1 = y'_2 = r$  das Bild des Punktes  $p$ , eine *singuläre  $\Delta$ -Kollineation*, die noch zu diskutieren ist. Nennt man das System der Fixelemente  $A, \bar{A}, r, q$  ( $r$  und  $A$  doppelt gezählt) ein *Fixzweieck*, so wird mithin die Punktreihe  $A_p$  *umkehrbar eindeutig auf die Schar der Umlegungen mit demselben Fixzweieck abgebildet*.

Wir untersuchen nun die singulären Fälle. Es sei  $a$  ein nicht auf  $R$  gewählter  $\varrho_1$ -Punkt.  $a_1$  und  $a_2$  seien wieder die  $\pi$ -Punkte der Strahlen  $S = r_1 a$  und  $T = r_2 a$ . Da für die nicht-singulären  $a$ -Strahlen die ersten Risse durch  $a_1$ , die zweiten durch  $a_2$  gehen, so sieht die dem Bündel  $a$  zugeordnete zweifach singuläre  $\Delta$ -Kollineation so aus: *Jedem  $a_1$ -Strahl  $G' \neq R_1$  sind alle  $a_2$ -Strahlen  $G''$  und umgekehrt zugeordnet; sie sind einfach singulär.* Zu jedem  $X'$  nicht durch  $a_1$  gehört als Original nur  $T$ , also  $X'' = R_1$ , ebenso zu jedem  $Y''$  nicht durch  $a_2$  nur als Original  $S$ , also  $Y' = R_2$ ; d. h.:  $R_1$  ist in beiden Feldern zweifach singulär. Da  $R_2$  einer der dem  $R_1$  zugeordneten Strahlen ist, darf die Kollineation wieder als eine uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation bezeichnet werden. In den zugehörigen Punktfeldern sind zweifach singulär  $a_1$  und  $a_2$ , einfach singulär alle  $R_1$ -Punkte.

Endlich sei  $a_0$  ein  $R$ -Punkt. Da jedes seiner nicht-singulären Büschel  $[\beta, a_0]$  nach Satz 1 auf dieselbe Projektivität  $X' \longleftrightarrow X''$  im Büschel  $r$  mit den Doppelstrahlen  $R_1$  und  $R_2$  abgebildet wird, so ergibt sich zunächst wieder folgende Tabelle (vgl. Fig. 13), in der  $\alpha$  eine variable  $R$ -Ebene bedeutet:

Original in $a_0$	Erster Riß	Zweiter Riß
$X$	$X'$	$X''$
$[\beta, a_0]$	$b' = r$	$b'' = r$
$[\alpha, a_0]$	jeder Punkt $a'$ auf $X'$	jeder Punkt $a''$ auf $X''$
$[\varrho_1, a_0] = (A_1)$	jeder Punkt auf $R_1$	jeder Punkt auf $R_1$
$[\varrho_2, a_0] = (A_2)$	jeder Punkt auf $R_2$	jeder Punkt auf $R_2$

Danach sieht die zu  $a_0$  gehörende singuläre Kollineation so aus:

*Jedem  $X'$ -Punkt entspricht jeder  $X''$ -Punkt.  $r$  ist zweifach singulär, jeder  $\pi$ -Strahl ebenfalls. Auf dieselbe Kollineation wird auch der Spiegel-punkt von  $a_0$  abgebildet. Jede eigentliche Projektivität im Büschel  $r$  defi-*



niert also zugleich eine „hochsinguläre“  $\Delta$ -Kollineation, die als Bild zweier zu den  $r_x$  harmonischen Punkte anzusehen ist<sup>28)</sup>. Um diese Punkte wirklich zu ermitteln, hat man nur die Originale irgendeines Paares  $X', X''$  jener Projektivität aufzusuchen. Die Zentren der beiden Originalbüschel sind die gesuchten Punkte. — Die Gesamtergebnisse lauten also folgendermaßen:

Satz 11: Durch parabolische Risse werden die nicht-singulären Punkte des  $R_3$  umkehrbar eindeutig auf die euklidischen bzw. pseudoeuklidischen starren Transformationen vom projektiven Typus der Umlegungen abgebildet, und zwar die nicht-singulären  $\pi$ -Punkte auf die Umwendungen, alle anderen auf Paddelungen.

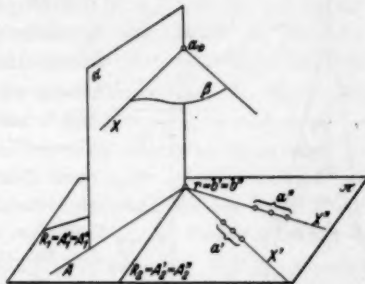


Fig. 13. Eine zweifach singuläre  $\Delta$ -Kollineation als Bild eines  $R$ -Punktes  $a_0$ .

Die singulären Punkte lassen sich festlegen durch gewisse zweifach singuläre  $\Delta$ -Kollineationen.

Satz 12: Wird ein nicht-singulärer und nicht in  $\pi$  gewählter Punkt  $a$  auf eine Umlegung  $\mathfrak{A}$  abgebildet, so wird die Punktreihe  $a p$  umkehrbar eindeutig auf die einparametrische Schar von Umlegungen abgebildet, die wenigstens dieselben Fixelemente wie  $\mathfrak{A}$  besitzen.

Nach Wahl einer Umlegung in  $\pi$  lassen sich — genau wie für den Fall der Bewegung — wiederum noch außerhalb des dargestellten Raumpunktes Strahlen angeben, deren Rißpaare der Umlegung angehören. Bei einer Bewegung mußten wir zu der Originalenebene  $\alpha$  noch deren  $\Phi$ -Pol  $\bar{a}$  sowie den Gürtel (nämlich das Bündel  $a = \alpha R, \varrho_1$  und  $\varrho_2$ ) hinzunehmen. Dual ergibt sich jetzt außer dem Originalpunkt  $a$  noch sein „ $a$ -Gürtel“, d. h. das Feld  $\alpha = a R$  nebst den Bündeln  $r_1$  und  $r_2$ , ferner die Spiegelenebene  $\bar{\alpha}$  von  $\alpha$ . Denn jeder durch einen  $R$ -Punkt  $x$  gehende  $\alpha$ -Strahl erhält dieselben Risse wie der Strahl  $a x$ , und diese selben Risse erhalten auch die Strahlen des Spiegelbüschels von  $[x, \alpha]$ . So gilt der

<sup>28)</sup> Vgl. auch die Schlußbemerkung in Nr. 17.

Satz 13: Der Gesamtheit der Strahlenpaare einer gegebenen Umlegung in  $\pi$  entspricht als Originalgebilde im Raum ein Bündel  $a$ , das zu  $a$  in bezug auf  $\Phi$  polare Feld  $\bar{a}$  und der  $a$ -Gürtel.

## § 4.

Die Originalkongruenzen beliebiger  $\Delta$ -Kollineationen.

13. Das Bild einer Kongruenz, deren Brennnlinien in  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  liegen. Es sei  $\S$  eine lineare Kongruenz, deren Brennnlinien  $A_1$  und  $A_2$  in  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  liegen;  $A_1$  und  $A_2$  seien zunächst keine  $\Phi$ -Strahlen, ihre  $\pi$ -Punkte seien  $a_1$  und  $a_2$ , ihre  $R$ -Punkte  $u_1$  und  $u_2$  (Fig. 14). Die

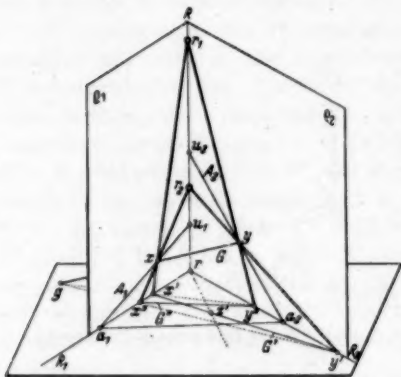


Fig. 14. Eigentliche  $\Delta$ -Kollineation:  
Bild einer Kongruenz mit den Brennnlinien  $A_1$  in  $\varrho_1$ ,  $A_2$  in  $\varrho_2$ .

zu einem nicht durch  $r$  gewählten Riß  $G'$  gehörende  $S$ -Kongruenz schneidet  $\S$  außer in  $R$  in einem Strahl  $G$ , dem also eindeutig ein  $G''$  zugeordnet wird. Wie erhält man die Zuordnung  $G' \leftrightarrow G''$ ? Läuft der Scheitel  $x$  eines Büschels  $[x, A_1]$  auf  $A_1$ , so schneiden die projizierenden Strahlen  $xr_1$  bzw.  $xr_2$  auf  $R_1$  eine Projektivität  $x' \leftrightarrow x''$  mit den Doppelpunkten  $a_1$  und  $r$  aus; ebenso wird auf  $R_2$  eine Projektivität  $y' \leftrightarrow y''$  erzeugt, die das Bild einer Büschelreihe  $[y, A_2]$  ist, deren Scheitel  $y$  auf  $A_2$  liegen. Sind  $x', y'$  die  $\Delta$ -Punkte eines ersten Risses  $G'$ ,

so sind  $x'', y''$  die von  $G''$ . Die Verwandtschaft  $G' \leftrightarrow G''$  ist also eine eigentliche  $\Delta$ -Kollineation, die außer  $R_1$  und  $R_2$  den Fixstrahl  $A = a_1 a_2$  besitzt. Beschreibt  $G'$  ein Bündel mit dem (zunächst nicht auf  $\Delta$  gewählten) Scheitel  $z'$ ,  $G''$  also ein Bündel  $z''$ , so sind die Punktreihen  $x', y'$  perspektiv, die Punktreihen  $x, y$  projektiv. Die Originalschar  $(G) = (xy)$  ist also eine Regelschar zweiten Grades. Wird  $G' = z'r$ , so wird im Grenzfall  $G = R$ . Dem singulären Strahl  $R$ , dem an sich alle  $\pi$ -Strahlen als Bilder zugeordnet werden dürfen, sollen also jetzt — wenn man ihn durch stetigen Übergang aus den Strahlen jener Regelschar gewinnt — die sich in der  $\Delta$ -Kollineation entsprechenden Strahlen  $z'r$  und  $z''r$  zugeordnet werden. Sind die Brennnlinien gegeben, so ist natürlich schon durch  $z'$  dieser Regulus festgelegt.

Dreht sich  $G'$  um einen  $R_1$ -Punkt  $x'$ , so durchläuft  $G$  das Büschel  $[x, A_2]$  bei festem  $x$ . Wird  $G' = R_1$ , so gehören dazu als  $\S$ -Strahlen die Strahlen des Büschels  $[u_2, \varrho_1]$ . Der Originalregulus zerfällt also in die Büschel  $[x, A_2]$  und  $[u_2, A_1]$  und enthält wieder  $R$ . So gehört insbesondere zum Fixpunkt  $a_1$  das Büschelpaar  $[a_1, A_2]$  und  $[u_2, A_1]$ , zum Fixpunkt  $a_2$  das Büschelpaar  $[a_2, A_1]$  und  $[u_1, A_2]$ . Endlich entspricht dem Fixpunkt  $r$  — d. h. also: der in  $r$  durch die Kollineation festgelegten Projektivität  $G' \leftrightarrow G''$  — als Originalregulus das Büschelpaar  $[u_2, \varrho_1]$  und  $[u_1, \varrho_2]$ <sup>29)</sup>.

Gibt man umgekehrt auf  $R_1$  und  $R_2$  je eine nicht-singuläre Projektivität  $x' \leftrightarrow x''$  bzw.  $y' \leftrightarrow y''$  mit dem Doppelpunkt  $r$  und damit also eine eigentliche  $\Delta$ -Kollineation  $\mathfrak{C}$ , so erzeugen die dadurch perspektiv aufeinander bezogenen Büschel  $[r_1, \varrho_1]$  und  $[r_2, \varrho_1]$  einerseits, die Büschel  $[r_2, \varrho_2]$  und  $[r_1, \varrho_2]$  andererseits je eine Gerade  $A_1$  bzw.  $A_2$  als Brennlinien einer Kongruenz  $\S$ , die  $\mathfrak{C}$  zum Bilde hat. Das bisherige Ergebnis lautet also:

Satz 14: Die linearen Kongruenzen  $\S$ , deren Brennlinien in  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  liegen, aber keine  $\Phi$ -Strahlen sind, werden durch parabolische Risse umkehrbar eindeutig auf die nicht-singulären eigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen  $\mathfrak{C}$  abgebildet. Jedem Punktepaar einer solchen Kollineation entspricht eine der Kongruenz angehörende Regelschar, die den Strahl  $R$  enthält, die also — falls sie nicht zerfällt —  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  zu Tangentialebenen hat.

Daraus folgt insbesondere, daß einer der Kongruenz  $\S$  angehörenden Regelschar, die  $R$  nicht enthält, zwei projektiv aufeinander bezogene Kurven zweiter Klasse zugeordnet werden, die beide  $R_1$  und  $R_2$  enthalten.

Durchläuft  $z'$  einen nicht durch  $r$  gehenden Riß  $G'$ , zu dem der  $\S$ -Strahl  $G$  mit den  $\Phi$ -Punkten  $x$  und  $y$  und dem Spurpunkt  $g$  gehört, so bilden die Originalregelscharen ein die Strahlen  $G$  und  $R$  enthaltendes Büschel von Flächen zweiten Grades; es ist in das Tangentialtetraeder  $x, y, u_1, u_2$  eingespannt und schneidet in  $\pi$  das durch die Punkte  $a_1, a_2, r$  und  $g$  bestimmte Kegelschnittbüschel aus.

Läßt man den Strahl  $G'$ , der von  $z'$  durchlaufen werden sollte, gegen  $z'r$  konvergieren, so erhält man für diese Punktreihe  $z'r$  ein Büschel von Regelscharen, die sich längs  $R$  berühren, deren Spurkurven also in  $r$  eine gemeinsame Tangente  $Q'$  haben. Diese Tangente hat folgende Bedeutung: Zu jeder Regelschar gehört eine konjugierte (die Strahlen  $A_1$  und  $A_2$  enthaltende) Erzeugendenschar. Sämtliche durch  $r$

<sup>29)</sup> Dreht sich  $G'$  um  $r$ , so bleibt also der einzige in Frage kommende Originalstrahl — nämlich  $R$  — zunächst fest, bis  $G = R_1$  wird. Jetzt beschreibt  $G$  das Büschel  $[u_2, \varrho_1]$ , bleibt dann wieder fest =  $R$ , bis  $G' = R_2$  wird und  $G$  also das Büschel  $[u_1, \varrho_1]$  durchläuft. Man beachte besonders: Dem Büschel  $[u_2, \varrho_1]$  werden zwar alle  $R_1$ -Punkte als erster Riß zugeordnet, einem zerfallenden Regulus aber, der dieses Büschel enthält, nur ein  $R_1$ -Punkt.

gehenden Erzeugenden dieser Scharen haben  $Q'$  zum ersten und zweiten Riß. Als Ergebnis halten wir fest:

*Sind  $G'$  und  $G''$  zwei sich in einer  $\Delta$ -Kollineation entsprechende durch  $r$  gehende Punktreihen, so bilden die Originalregelscharen ein Büschel von Flächen zweiten Grades, die sich längs  $R$  berühren.*

Da das Ziel unserer Abbildung, wie bei allen darstellend-geometrischen Abbildungen, darin besteht, Raumkonstruktionen durch ebene Konstruktionen in der Bildebene zu ersetzen, so wird man im Zusammenhang mit den Ergebnissen dieses Paragraphen oft die Aufgabe zu lösen haben: Es sollen die Risse  $G', G''$  eines  $\S$ -Strahles  $G$  angegeben werden, dessen Spurpunkt  $g$  gegeben ist. Die Kongruenz  $\S$  sei durch eine eigentliche  $\Delta$ -Kollineation  $\mathfrak{C}$  gegeben. Da das Bündel mit dem Zentrum  $g$  durch eine Umwendung abgebildet wird, d. h. durch eine involutorische Perspektivität, die  $g$  zum Zentrum und die  $\Delta$ -Polare von  $gr$  zur Achse hat, so muß man das gemeinsame Elementenpaar  $G', G''$  von  $\mathfrak{C}$  und dieser durch  $g$  festgelegten Umwendung konstruieren. Für  $g \neq a_1$  und  $\neq a_2$  gibt es nur ein solches Paar, weil  $G$  eindeutig festliegt. Die Konstruktion ist elementar durchführbar. Dabei beachte man auch: Ist umgekehrt ein Rißpaar  $G', G''$  nicht durch  $r$  gehend gegeben, so ist der zugehörige Spurpunkt  $g$  der Schnittpunkt der Geraden  $(G' R_1)(G'' R_2)$  und  $(G' R_2)(G'' R_1)$  (Fig. 14).

Es entsteht ferner folgende Frage. Zu einer der Kongruenz  $\S$  angehörenden und den Strahl  $R$  enthaltenden Regelschar gehört eine konjugierte Schar. Die Bilder  $X', X''$  ihrer Strahlen  $X$  sind  $r$ -Strahlen. Welche Verwandtschaft besteht zwischen ihnen? Ist  $x$  der Punkt  $XR$  und  $\xi$  die Ebene  $XR$ , so gehört jener Regulus der parabolischen Kongruenz an, die aus allen Büscheln  $[x, \xi]$  besteht. Die gesuchte Beziehung ist also festgelegt, wenn man das Bild einer parabolischen Kongruenz mit der Achse  $R$  angeben kann. Das soll in Nr. 18 geschehen.

14. Die verschiedenen Typen eigentlicher  $\Delta$ -Kollineationen und ihre Originale. In den Fig. 5 und 6 wurde ein schematischer Überblick über die Struktur der eigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen gegeben. Es soll gezeigt werden, wie diese verschiedenen Typen sich auf die möglichen Originalkongruenzen verteilen.

Wir betrachten eine nicht-singuläre eigentliche  $\Delta$ -Kollineation  $X'' = \mathfrak{C}(X')$  und die dazugehörige Kongruenz  $\S$ .  $x'$  und  $x''$  seien zwei sich entsprechende Punkte auf  $R_1, y'$  und  $y''$  auf  $R_2$ , ferner  $a_1$  und  $a_2$  Ruhepunkte auf  $R_1$  bzw.  $R_2$ , die mit  $r$  zusammenfallen, falls die Projektivität auf  $R_1$  bzw.  $R_2$  parabolisch ist. Dann ist das Doppelverhältnis

$$(1) \quad \lambda = (ra_1 x' x'') = (ru_1 r_1 r_2) \\ \text{und} \quad \mu = (ra_2 y' y'') = (ru_2 r_2 r_1).$$

Es seien  $\varrho$  und  $\sigma$  die zu den Fixstrahlen  $R_1$  bzw.  $R_2$  gehörenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $|\mathfrak{C} - \varrho \mathfrak{E}| = 0$ ,  $\tau$  die dritte Wurzel. Dann zeigt eine kurze Rechnung, daß bei jeder eigentlichen  $\Delta$ -Kollineation

$$(2) \quad \lambda = \frac{\sigma}{\tau} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\varrho}{\tau}$$

ist. Bei Zugrundelegung der in Nr. 10 erwähnten parabolischen Metrik in  $\pi$  mit Hilfe der Fundamentalkurve  $\Delta$  wird jedem Rißpaar  $X', Y'$  ein Winkelquadrat  $\varphi'^2$ , dem Rißpaar  $X'' = \mathfrak{C}(X')$ ,  $Y'' = \mathfrak{C}(Y')$  ein Winkelquadrat  $\varphi''^2 = \gamma \varphi'^2$  zugeordnet. Für den „Dehnungsfaktor“  $\gamma$  findet man allgemein<sup>30)</sup>

$$(3) \quad \gamma = \frac{\varrho \sigma}{\tau^2}.$$

Die starren Transformationen waren (vgl. Nr. 10) durch  $\gamma = +1$ , die quasistarren durch  $\gamma = -1$  definiert.

Aus (2) folgt, daß  $\gamma = \lambda \mu$ , und da nach (1) andererseits

$$(4) \quad \lambda \mu = (u_1 u_2 r_2 r_1)$$

wird, so gilt der

**Satz 15:** Die Brennlinsen der Originalkongruenz, die zu einer nicht-singulären eigentlichen  $\Delta$ -Kollineation  $X'' = \mathfrak{C}(X')$  gehört, mögen auf  $R$  die Punkte  $u_1$  und  $u_2$  ausschneiden. Dann ist der Dehnungsfaktor jener  $\Delta$ -Kollineation gleich dem Doppelverhältnis

$$\gamma = (u_1 u_2 r_2 r_1).$$

Ist nun unsere  $\Delta$ -Kollineation  $\mathfrak{C}$  starr, also  $\gamma = +1$ , so wird (wegen  $r_1 \neq r_2$ )  $u_1 = u_2$ ; die Brennlinsen schneiden sich, und man erhält als Original eine ausgeartete Kongruenz, die als Bestandteil ein ebenes Feld enthält. Den Ebenen werden also, wie auf anderem Wege bereits ausführlich gezeigt, starre eigentliche  $\Delta$ -Kollineationen als Bilder zugeordnet.

Quasistarre eigentliche  $\Delta$ -Kollineationen dagegen sind die Bilder jener Kongruenzen, für die  $(u_1 u_2 r_2 r_1) = -1$ , für die also das Paar  $u_1, u_2$  harmonisch zum Paar  $r_1, r_2$  liegt.

Welche Kongruenzen werden auf die Streckungen abgebildet? Unter Streckungen verstanden wir<sup>31)</sup> Perspektivitäten, mit dem Zentrum  $r$  und einer Achse  $A$ . Für sie ist  $\lambda = \mu$ , d. h.

$$(r u_1 r_1 r_2) = (r u_2 r_2 r_1).$$

Diese Gleichung stellt bei veränderlichem  $u_1$  und  $u_2$  eine Involution dar, die das Paar  $r_1 \leftrightarrow r_2$  enthält und in der  $r$  und mithin auch  $p$  Doppelpunkt ist. Für die zu den Streckungen gehörigen Kongruenzen ist also

$$(5) \quad (u_1 u_2 r p) = -1.$$

<sup>30)</sup> Vgl. Rehbock, Zur ebenen Strahlengeometrie vom euklidischen oder pseudo-euklidischen Typus. Jahresber. d. d. M. V. 41 (1932), S. 255–269.

<sup>31)</sup> Vgl. Nr. 10.

Speziell wird für den Doppelpunkt  $u_1 = u_2 = p$  dieser Involution  $\lambda = \mu = -1$ ,  $\mathfrak{C}$  also — wie wir ebenfalls schon wissen! — eine *Umdrehung* Für den anderen Doppelpunkt  $u_1 = u_2 = r$  wird  $\lambda = \mu = +1$ . In diesem Fall sind die auf  $R_1$  und  $R_2$  von  $\mathfrak{C}$  erzeugten Projektivitäten also parabolisch oder Identitäten; d. h.  $\mathfrak{C}$  ist eine Perspektivität mit dem Zentrum  $r$  und einer durch  $r$  gehenden Achse, in unserer Bezeichnung also eine „*Translation*“. Es gehören schließlich zu den durch (5) festgelegten Kongruenzen zwei Ausartungen, nämlich  $u_1 = r_1$ ,  $u_2 = r_2$  und  $u_1 = r_2$ ,  $u_2 = r_1$ . Sie werden, da die Brennlinien in diesem Fall  $\Phi$ -Strahlen sind, in Nr. 17 besprochen.

Im pseudoeuklidischen Fall interessieren besonders jene  $\Delta$ -Kollineationen, die durch Punkte der Geraden  $K_1$  und  $K_2$  in der Fig. 6 repräsentiert werden, die also vom Typus einer isotropen Perspektivität oder einer Zweieckenkollineation sind<sup>33)</sup>. Eine isotrope Perspektivität ist eine Perspektivität, deren Achse  $R_1$  (bzw.  $R_2$ ) und deren Zentrum ein Punkt  $a_2 \neq r$  auf  $R_2$  (bzw.  $a_1 \neq r$  auf  $R_1$ ) ist. Für sie ist  $\lambda = 1$ ,  $\mu \neq 1$ , d. h. es ist die Brennlinie  $A_1 = R_1$ ; die Brennlinie  $A_2$  hat allgemeine Lage durch  $a_2$ .  $a_2$  ist erster und zweiter Riß des Regulus, der aus dem Büschelpaar  $[a_2, \pi]$  und  $[r, \varrho_2]$  besteht. Der Spezialfall  $\mu = -1$  liefert die isotrope Spiegelung, für die also  $u_2 = p$ , d. h.  $A_2 = a_2 p$  ein  $p$ -Strahl wird. Sie ist quasistarr und wird durch den Punkt  $s_1$  in der Fig. 6 repräsentiert.

Bei einer Zweieckenkollineation war etwa  $R_1$  einfach zählender,  $R_2$  doppelt zählender Fixstrahl,  $r$  doppelt zählender und ein  $R_2$ -Punkt  $a_2$  einfach zählender Fixpunkt. Wieder ist  $\lambda = 1$ ,  $\mu \neq 1$ . Die Projektivität  $x' \leftrightarrow x''$  auf  $R_1$  ist parabolisch; daher wird  $A_1$  ein  $r$ -Strahl,  $A_2$  hat allgemeine Lage durch  $a_2$ .  $\mu = -1$  liefert den Spezialfall der harmonischen Zweieckenkollineation. So erhalten wir schließlich die Zusammenfassung

**Satz 16:** *Das Bild einer linearen Kongruenz  $\mathfrak{S}$ , deren Brennlinien in  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  liegen, aber keine  $\Phi$ -Strahlen sind, ist dann und nur dann eine Streckung, wenn die  $R$ -Punkte der Brennlinien harmonisch zu  $r$  und  $p$  liegen; dann und nur dann eine isotrope Perspektivität oder Zweieckenkollineation, wenn wenigstens eine Brennlinie durch  $r$  geht, in allen anderen Fällen eine Dreieckskollineation. Die Bildkollineation ist dann und nur dann starr, d. h. eine Bewegung, wenn die Brennlinien sich schneiden; dann und nur dann quasistarr, d. h. eine Quasiumlegung, wenn die  $R$ -Punkte der Brennlinien harmonisch zu  $r_1, r_2$  liegen.*

<sup>33)</sup> Im euklidischen Fall sind diese Typen imaginär. Doch gelten natürlich auch hierfür die folgenden Betrachtungen.



Beschränkt man sich im pseudoeuklidischen Fall auf die *reellen* eigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen, so kann man leicht angeben, wie sich die in der Fig. 6 repräsentierten beiden Scharen I, 1 und I, 2 der Dehnungen und die beiden Scharen der Quasidehnungen auf die Kongruenzen verteilen. Liegt nämlich  $u_x$  im  $\pi$ -Segment, d. h. in demjenigen Segment  $r_1 r_2$ , in dem  $r$  liegt, so ist die auf  $R_x$  erzeugte Projektivität gleichsinnig ( $\lambda$  bzw.  $\mu > 0$ ; Fig. 14,  $R_1!$ ), liegt  $u_x$  im  $p$ -Segment, so ist sie gegensinnig ( $\lambda$  bzw.  $\mu < 0$ ; Fig. 14,  $R_2!$ ). So ergeben sich folgende Kombinationen:

	$\lambda$	$\mu$	$u_1$	$u_2$	Beispiel
			liegt in demselben Segment wie		
Dehnungen I, 1 . . .	+	+	$r$	$r$	Translation, also $u_1 = u_2 = r$
Dehnungen I, 2 . . .	—	—	$p$	$p$	Umdrehung, also $u_1 = u_2 = p$
Quasidehnungen II, 1	+	—	$r$	$p$	Isotrope Spiegelung $s_1$ $u_1 = r, u_2 = p$
Quasidehnungen II, 2	—	+	$p$	$r$	Isotrope Spiegelung $s_2$ $u_1 = p, u_2 = r$

15. Das Bild einer Kongruenz, deren Brennnlinien durch  $r_1$  und  $r_2$  gehen. Wir betrachten jetzt eine lineare Kongruenz  $R$ , deren Brennnlinien  $A_1$  und  $A_2$  durch  $r_1$  und  $r_2$  gehen, aber keine  $\Phi$ -Strahlen seien: ihre  $\pi$ -Punkte seien  $a_1$  und  $a_2$ , die Ebenen, die sie mit  $R$  ausspannen,  $\omega_1$  und  $\omega_2 \neq \omega_1$  (Fig. 15). Dann ist  $A = a_1 a_2$  kein  $r$ -Strahl. Die zu einem nicht durch  $r$  gewählten ersten Riß  $G'$  gehörende  $S$ -Kongruenz schneidet  $R$  außer in  $R$  nur in einem Strahl  $G$ , der  $R$  nicht schneidet und dem daher nur ein  $G''$  zugeordnet wird. Ebenso gehört zu jedem  $G''$  nur ein  $G'$ . Wir wollen wieder die Verwandtschaft  $G' \leftrightarrow G''$  bestimmen. Eine Ebene  $\xi$  durch  $A_2$  schneide  $A_1$  in  $x$  und  $\pi$  in  $X \neq A$ . Dem Büschel  $[x, \xi]$  wird mithin (etwa nach der für  $\xi$  geltenden Netzprojektion) der erste Riß  $x' = X R_2$  und der zweite Riß  $x'' = X R_1$  zugeordnet. Dreht sich  $\xi$  um  $A_2$ , so beschreiben  $x'$  und  $x''$  zwei perspektive

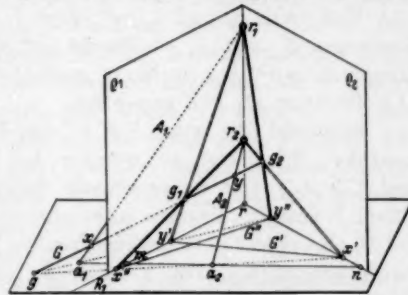


Fig. 15. Uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation: Bild einer Kongruenz mit den Brennnlinien  $A_1$  durch  $r_1$ ,  $A_2$  durch  $r_2$ .

Punktreihen auf  $R_2$  bzw.  $R_1$  mit dem Perspektivitätszentrum  $a_2$ . Betrachten wir ebenso eine Reihe von Büscheln  $[y, \eta]$ , deren Scheitel auf  $A_2$  und deren Ebenen durch  $A_1$  gewählt werden, so beschreiben die zugehörigen Risse  $y'$  und  $y''$  zwei perspektive Punktreihen auf  $R_1$  bzw.  $R_2$  mit dem Perspektivitätszentrum  $a_1$ . Faßt man den  $\mathfrak{R}$ -Strahl  $G$  als Schnitt zweier Büschel  $[x, \xi]$  und  $[y, \eta]$  auf, so erhält man die verlangte Verwandtschaft in  $\pi$  so: Ist  $x'$  der  $R_2$ -Punkt und  $y'$  der  $R_1$ -Punkt eines ersten Risses  $G'$ , so bestimme man die perspektiv zugeordneten Punkte  $x'' = x' a_2 R_1$  und  $y'' = y' a_1 R_2$ , und man erhält  $G'' = x'' y''$ .

Diese Konstruktion definiert aber eine Kollineation, in der  $R_1$  und  $R_2$  vertauscht werden, also eine uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation. In ihr entspricht sich das Punktepaar  $a_1, a_2$  involutorisch. Gibt man umgekehrt eine beliebige uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation, bei der also im Büschel  $r$  eine Involution erzeugt wird, so entspricht einer Punktreihe des ersten Feldes auf  $R_1$  eine dazu perspektive Reihe des zweiten Feldes auf  $R_2$  mit einem gewissen Perspektivitätszentrum  $a_1$ ; einer Punktreihe des ersten Feldes auf  $R_2$  eine dazu perspektive Reihe des zweiten Feldes auf  $R_1$  mit einem Perspektivitätszentrum  $a_2$ . Wählt man diese Zentren beliebig, aber nicht auf  $\Delta$ , so ist dadurch stets eine nicht-singuläre uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation festgelegt. Zu ihr gehört nur eine Kongruenz, nämlich die mit den Brennpunkten  $A_1 = a_1 r_1$  und  $A_2 = a_2 r_2$ , die gerade diese Kollineation zum Bilde hat.

Wählt man  $a_1$  und  $a_2$  auf einem  $r$ -Strahl  $A \neq R_1$  und  $A \neq R_2$ , so bestimmen  $A_1$  und  $A_2$  ein Bündel und ein  $R$ -Feld. Dieser ausgearteten Kongruenz wird, wie in Nr. 12 gezeigt wurde, die in diesem Fall starre  $\Delta$ -Kollineation als Bild zugeordnet.

Beschreibt der erste Riß  $G'$  ein Büschel mit dem nicht auf  $\Delta$  gewählten Scheitel  $z'$ , so erzeugen die Büschel der Ebenen  $\xi = A_2 x'$  und  $\eta = A_1 y'$  eine  $\mathfrak{R}$  angehörende Regelschar zweiten Grades, die den Strahl  $R$  enthält. Dagegen entspricht einem Büschel mit dem Scheitel  $x'$  auf  $R_2$  als Original in  $\mathfrak{R}$  zunächst das Büschel  $[x, \xi]$  in der Ebene  $\xi = A_2 x'$ ; ferner gehören aber zum  $x'$ -Strahl  $R_2$  als  $\mathfrak{R}$ -Originale die Strahlen des Büschels  $[r_2, \omega_1]$  (vgl. die Tabelle in Nr. 2), so daß für diesen Bildpunkt  $x'$  der Originalregulus in ein Büschelpaar  $[x, \xi]$  und  $[r_2, \omega_1]$  zerfällt. Die Originalreguli der auf  $\Delta$  liegenden Bildpunktepaare zerfallen also in dieser Weise in Strahlbüschelpaare, die den Strahl  $R$  enthalten. Insbesondere hat der aus dem Paar  $[a_1, A_2]$  und  $[r_2, A_1]$  bestehende Regulus die Risse  $a' = A R_2 = n$  und  $a'' = A R_1 = m$ , der aus  $[a_2, A_1]$  und  $[r_1, A_2]$  bestehende Regulus die Risse  $a'_2 = m$ ,  $a''_2 = n$ .

Endlich interessieren uns die Reguli, die dem Punktepaar  $a_1, a_2$  sowie den Doppelpunkten  $h$  und  $k$  der auf  $A$  erzeugten Involution entsprechen.



Ist zunächst  $G$  ein  $R_1$  schneidender  $\mathcal{R}$ -Strahl mit dem Spurpunkt  $g$ , so gehen beide Risse durch  $g$ , so daß  $x'' = y' = g$  wird. Bestimmt man  $x' = x'' a_2 R_2$  und  $y' = y' a_1 R_2$ , so wird  $G' = x' x'' = a_2 g$ ,  $G'' = y' y'' = a_1 g$ . Daher erhält der Regulus  $[R_1, A_1, A_2]$  den ersten Riß  $a_2$  und den zweiten Riß  $a_1$ ; die beiden Bildbüschel sind perspektiv, Perspektivitätsachse ist  $R_1$ . Ebenso erhält der Regulus  $[R_2, A_1, A_2]$  den ersten Riß  $a_1$  und den zweiten Riß  $a_2$ ; die Büschel sind perspektiv, Perspektivitätsachse ist  $R_2$ .

Ferner betrachten wir die Doppelpunkte  $h$  und  $k$  der  $\Delta$ -Kollineation. Sie sind das gemeinsame harmonische Paar der Paare  $m, n$  und  $a_1, a_2$ . Einem der Kollineation angehörenden Rißpaar  $Z', Z''$  durch  $h$  (Fig. 16) entspricht ein Original  $Z$ , dessen Spurpunkt  $z$  auf der  $\Delta$ -Polaren von  $h$

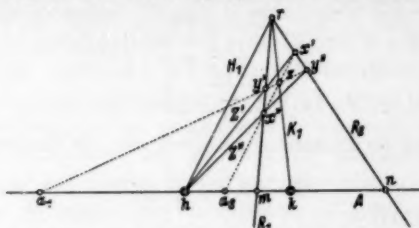


Fig. 16. Uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation in  $\pi$ .

liegen muß, also wegen  $(h k m n) = -1$  auf der Geraden  $K_1 = rk$ . Der Regulus, der  $h$  zum ersten und zweiten Riß hat, schneidet mithin  $\pi$  in  $K_1$  und enthält den Strahl  $A$ . Da die konjugierte Regelschar auf  $A$  und  $R$  projektive Punktreihen ausschneidet, muß wegen  $(h k a_1 a_2) = -1$  der durch  $h$  gehende Strahl  $H$  dieser konjugierten Schar durch  $p$  gehen. Ist also  $H = hp$ ,  $H_1 = hr$ ,  $K = kp$ ,  $K_1 = kr$ , so gehört zum Doppelpunkt  $h$  der Originalregulus  $[H, A, A_2] \equiv [H_1, A_1, A_2]$ , zum Doppelpunkt  $k$  der Originalregulus  $[K, A_1, A_2] \equiv [K_1, A_1, A_2]$ .

Das bis jetzt gewonnene Ergebnis lautet:

Satz 17: Die linearen Kongruenzen  $\mathfrak{R}$ , deren Brennpunkte durch  $r_1$  bzw.  $r_2$  gehen, aber keine  $\Phi$ -Strahlen sind, werden durch parabolische Risse auf die nicht-singulären uneigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen  $\mathfrak{D}$  abgebildet. Jedem Punktepaar einer solchen Kollineation entspricht eine der Kongruenz angehörende und den Strahl  $R$  enthaltende Regelschar. Den von  $r$  verschiedenen Doppelpunkten  $h$  und  $k$  der Kollineation entsprechen Regelscharen, die den Strahl  $hk$  enthalten und  $\pi$  außerdem in den Strahlen  $hr$  bzw.  $kr$  schneiden.

Die in Nr. 13 ausgeführten Betrachtungen über Regelscharenbüschel lassen sich in gleicher Weise auf die Kongruenzen  $\mathfrak{R}$  übertragen.

16. Die uneigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen und ihre Originale. Der Satz 15 zeigte uns, in welcher Weise der Dehnungsfaktor einer eigentlichen  $\Delta$ -Kollineation mit einem Doppelverhältnis, das der Originalkongruenz zugeordnet ist, zusammenhing. Eine analoge Beziehung soll für die Kongruenzen  $\mathfrak{R}$  und ihre Bilder abgeleitet werden.

Die Zusammenstellung der verschiedenen Typen uneigentlicher  $\Delta$ -Kollineationen in Nr. 10 zeigte, daß es stets zwei getrennte Fixstrahlen  $H_1$  und  $K_1$  durch  $\tau$ , und auf einem von ihnen — z. B. auf  $H_1$  — wenigstens einen von  $r$  verschiedenen Fixpunkt  $h$  gibt. Ist  $X'' = \mathfrak{D}(X')$  die gegebene uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation, so seien  $\varrho$  und  $\sigma$  die zu  $H_1$  bzw.  $K_1$  gehörenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $|\mathfrak{D} - \varrho \mathfrak{E}| = 0$ ,  $\tau$  die dritte Wurzel, die also wenigstens einen weiteren durch  $h$  gehenden Fixstrahl  $A$  festlegt, wobei unter Umständen  $A$  mit  $H_1$  zusammenfällt (Zweiecken-Kollineation!). Sind  $Z'$  und  $Z''$  zwei sich entsprechende Strahlen durch  $h$ , so ist das Doppelverhältnis  $\lambda = (H_1 A Z' Z'')$  konstant, und es ist — wie eine kurze, schon in Nr. 14 erwähnte Rechnung zeigt —  $\lambda = \frac{\varrho}{\tau}$ . Für die in Nr. 10 gewählte Parameterdarstellung für die Matrizen  $\mathfrak{D}$  wird nun

$$\lambda^3 = \frac{\varrho^3}{\tau^3} = -D.$$

Diese negativ genommene Determinante ist aber andererseits bei dieser Parameterdarstellung auch der Dehnungsfaktor der  $\Delta$ -Kollineation<sup>23)</sup>.

Es sei ferner wieder

$$x' = Z' R_3, \quad y' = Z' R_1, \quad x'' = Z'' R_1, \quad y'' = Z'' R_3.$$

Da  $x' x''$  durch  $a_3$  und  $y' y''$  durch  $a_1$  geht, so überzeugt man sich an Hand der Fig. 16, daß

$$\lambda = (H_1 A Z' Z'') = (r m y' x'') = (n m h a_3)$$

und ebenso

$$\lambda = (n m a_1 h),$$

also

$$\lambda^2 = (n m h a_3) (n m a_1 h) = (m n a_2 a_1) = (\varrho_1 \varrho_2 \omega_2 \omega_1) = (\omega_1 \omega_2 \varrho_2 \varrho_1).$$

So ergibt sich der zum Satz 15 analoge

Satz 18: Die Brennpunkte der Originalkongruenz, die zu einer uneigentlichen nicht-singulären  $\Delta$ -Kollineation  $X'' = \mathfrak{D}(X')$  gehört, mögen mit  $R$  die Ebenen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ausspannen. Dann ist der Dehnungsfaktor jener  $\Delta$ -Kollineation gleich dem Doppelverhältnis

$$\delta = (\omega_1 \omega_2 \varrho_2 \varrho_1).$$

<sup>23)</sup> Vgl. die in Fußnote <sup>20)</sup> auf S. 30 zitierte Arbeit des Verfassers, § 3, II.

Für die starren uneigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen, die wir *Umlegungen* nennen (und die Umwendungen oder Paddelungen sein können), ist  $\delta = +1$ , also  $\omega_1 = \omega_2$ . Dagegen werden die quasistarren  $\Delta$ -Kollineationen, die wir *Quasibewegungen* nannten, durch  $(\omega_1 \omega_2 \varrho_1 \varrho_2) = -1$  charakterisiert. Auch hier lassen sich im pseudoeuklidischen Fall, wenn man sich auf reelle Transformationen beschränkt, die vier in der Fig. 8 auftretenden Typen dadurch deuten, daß man  $\omega_1$  und  $\omega_2$  entweder im selben von  $\varrho_1, \varrho_2$  gebildeten Segment oder in verschiedenen Segmenten wählt.

Satz 19: *Das Bild einer linearen Kongruenz  $\mathfrak{R}$ , deren Brennnlinien durch  $r_1$  bzw.  $r_2$  gehen, aber keine  $\Phi$ -Strahlen sind, ist dann und nur dann starr, d. h. eine Umlegung (und also keine Dreieckskollineation), wenn die Brennnlinien sich schneiden, dann und nur dann quasistarr, d. h. eine Quasibewegung, wenn die von den Brennnlinien und  $R$  ausgespannten Ebenen zu  $\varrho_1, \varrho_2$  harmonisch liegen.*

17. Die singulären Kongruenzen mit getrennten Brennnlinien. Von besonderem Interesse sind jene linearen Kongruenzen, für die wenigstens eine Brennnlinie ein  $\Phi$ -Strahl ist. Es wird sich herausstellen, daß sie umkehrbar eindeutig auf gewisse Typen singulärer Kollineationen abgebildet werden, die als eigentliche oder uneigentliche  $\Delta$ -Kollineationen angesehen werden können. Gerade die Struktur dieser singulären Kollineationen wird durch das Studium der dazugehörigen „singulären“ Originalkongruenzen besonders deutlich.

Es sind, wenn wir von den schon erledigten Fällen der singulären Bündel und singulären Felder absehen, vier Typen solcher Kongruenzen zu betrachten. Der erste Typus umfaßt jene Kongruenzen  $\mathfrak{H}$ , für die die erste Brennnlinie ein  $\Phi$ -Strahl in  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$ , die zweite kein  $\Phi$ -Strahl in  $\varrho_2$  bzw.  $\varrho_1$  ist. Dual dazu bilden den zweiten Typus jene Kongruenzen  $\mathfrak{R}$ , deren erste Brennnlinie ein  $\Phi$ -Strahl durch  $r_1$  bzw.  $r_2$  und deren zweite Brennnlinie kein  $\Phi$ -Strahl durch  $r_2$  bzw.  $r_1$  ist. Den dritten Typus bilden die  $S$ - und  $T$ -Kongruenzen mit getrennten Brennnlinien, den vierten alle parabolischen Kongruenzen mit der Achse  $R$  (also nicht nur die parabolischen  $S$ - und  $T$ -Kongruenzen!).

Als Beispiel für den ersten Typus werde eine Kongruenz  $\mathfrak{H}$  betrachtet, für die  $A_1 = a_1 r_1$  ein  $T$ -Strahl und  $A_2 = a_2 u_2$  kein  $\Phi$ -Strahl sei (Fig. 17). Die Projektivität  $y' \leftrightarrow y''$  auf  $R_2$  ist also nicht ausgeartet. Der Übergang von einem der beiden Reißfelder zum Raumoriginal und von da aus zum anderen Reißfeld ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Wird einem Element eine  $k$ -parametrische Mannigfaltigkeit des anderen Feldes zugeordnet, so heiße es vom Singularitätsgrad  $k$ ; wird ihm nur ein Element zugeordnet, so sei sein Singularitätsgrad 0. Der in der zweiten Spalte

stehende Singularitätsgrad ergibt sich also aus dem in der vierten Spalte stehenden Ergebnis.

Ausgangselement	Singularitätsgrad	Raumoriginal in $\mathfrak{H}$	Zugeordneter Riß
Erstes Feld			
$G' = x' y'$	0	ein $G$	$G'' = a_1 y''$
$G' = R_2$	2	jedes $G$ in $[r_2, \varrho_2]$	jeder $\pi$ -Strahl $G''$
$z'$ nicht auf $\Delta$	0	ein nicht zerfallender Regulus	$z'' = a_1$
$z' = y'$ auf $R_2$	1	$[y_1, A_1]$ und $[r_2, \varrho_2]$	jedes $z''$ auf $a_1 y''$ (also u. a. auch $z'' = a_1$ und $z'' = y''$ )
Zweites Feld			
$G''$ nicht durch $a_1$	0	jedes $G$ in $[r_2, \varrho_2]$	$G' = R_1$ (falls $G = R$ ausgeschlossen wird)
$G'' = a_1 y''$	1	jedes $G$ in $[y, A_1]$ und in $[r_2, \varrho_2]$	jedes $G'$ durch $y'$
$z''$ auf $a_1 y''$	0	$[y, A_1]$ und $[r_2, \varrho_2]$	$z' = y'$
$z'' = a_1$	2	jeder Regulus der Kongruenz $\mathfrak{H}$	jedes $z'$

Daraus folgt: Die Bildkollineation ist einfach ausgeartet:  $a_1$  ist zweifach singulärer Punkt des zweiten,  $R_2$  zweifach singulärer Strahl des ersten

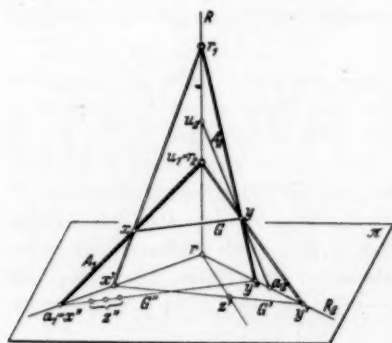


Fig. 17.  $\mathfrak{H}$ -Kongruenz mit einem  $\Phi$ -Strahl als Brennlinie.

Feldes. Die Kollineation ist dadurch festgelegt, daß das Büschel der Strahlen  $G'' = a_1 y''$  projektiv zur Punktreihe  $y'$  auf  $R_2$  ist. Aber nicht jede einfach ausgeartete Kollineation von diesem Typus (also: zweifach singulärer Punkt  $\neq r$  auf  $R_1$ , zweifach singulärer Strahl  $= R_2$ !) kommt als Bild in Frage. Dreht sich nämlich  $G'$  um  $z'$  (nicht auf  $\Delta$ ), so wird für  $G' = z'r$  das Original  $G = R$ , der zweite Riß im Grenzfall  $G'' = R_1$ ; d. h. dem Strahl  $R$  soll, wenn er durch stetigen Übergang aus den Strahlen

der zu  $z'$  gehörenden Originalregelschar gewonnen wird, das Rißpaar  $R' = z'r$ ,  $R'' = R_1$  zugeordnet werden.  $r$  muß also auch in diesem Fall Doppelpunkt der Projektivität  $y' \leftrightarrow y''$  auf  $R_2$  sein, wenn die singuläre Kollineation Bild einer solchen Kongruenz sein soll. Ist das der Fall, so darf diese Kollineation als eigentliche  $\Delta$ -Kollineation betrachtet werden, weil

dem Strahl  $R_2$  des zweiten Feldes ja unter anderen auch wieder  $R_2$  zugeordnet wird, dem  $a_1$ -Strahl  $R_1$  des ersten Feldes jeder  $r$ -Strahl, also unter anderen wieder  $R_1$  selbst. Dagegen darf eine einfach ausgeartete Kollineation, die den von  $R_2$  verschiedenen Strahlen des Büschels  $r$  im ersten Felde (also auch dem Strahl  $R_1$ !) eindeutig einen von  $R_1$  verschiedenen  $a_1$ -Strahl des zweiten Feldes zuordnet, *nicht* als eigentliche  $\Delta$ -Kollineation betrachtet werden.

Betrachtet man in gleicher Weise die anderen Möglichkeiten für die Kongruenzen des ersten Typus, so ergeben sich folgende Fälle:

R-Punkte der Brennnlinien		Zweifach singuläres Element im		Die singuläre Kollineation ist festgelegt durch die Projektivität
		ersten Feld	zweiten Feld	
$u_1 = r_2$ ( $A_1 = T$ -Strahl)	$u_2 \neq r_x$	$R_1$	$a_1$ auf $R_1$	$y' \leftrightarrow y''$ auf $R_2$
$u_1 = r_1$ ( $A_1 = S$ -Strahl)	$u_2 \neq r_x$	$a_1$ auf $R_1$	$R_2$	$y' \leftrightarrow y''$ auf $R_2$
$u_1 \neq r_x$	$u_2 = r_1$ ( $A_2 = T$ -Strahl)	$R_1$	$a_2$ auf $R_2$	$x' \leftrightarrow x''$ auf $R_1$
$u_1 \neq r_x$	$u_2 = r_2$ ( $A_2 = S$ -Strahl)	$a_2$ auf $R_2$	$R_1$	$x' \leftrightarrow x''$ auf $R_1$

Daraus erkennt man: Gibt man eine einfach ausgeartete *eigentliche*  $\Delta$ -Kollineation derart vor, daß ein Strahl des Paares  $R_1, R_2$  zweifach singulär in einem der beiden Reißfelder, ein Punkt  $\neq r$  auf dem anderen Strahle zweifach singulär in dem anderen Reißfeld ist, so gehört dazu stets eine und nur eine Originalkongruenz vom Typus  $\mathfrak{S}$ . Beispielsweise läßt sich die Originalkongruenz, die der als gegeben aufzufassenden Kollineation in der dritten Zeile entspricht, so konstruieren: Durch die nicht ausgeartete Projektivität  $x' \leftrightarrow x''$  auf  $R_1$  werden die Strahlen der Büschel  $[r_1, \varrho_1]$  und  $[r_2, \varrho_1]$  perspektiv aufeinander bezogen und erzeugen eine Brennnlinie  $A_1$ , die gewiß kein  $\Phi$ -Strahl ist; die zweite Brennnlinie ist  $A_2 = a_2 r_1$ . Für den ersten Typus singulärer Kongruenzen gilt also

Satz 20: Die Gesamtheit derjenigen Kongruenzen  $\mathfrak{S}$ , deren erste Brennnlinie ein  $\Phi$ -Strahl in  $\varrho_1$  (bzw.  $\varrho_2$ ), deren zweite Brennnlinie jedoch kein  $\Phi$ -Strahl in  $\varrho_2$  (bzw.  $\varrho_1$ ) ist, wird umkehrbar eindeutig abgebildet auf die Gesamtheit derjenigen einfach ausgearteten *eigentlichen*  $\Delta$ -Kollineationen, für die ein Strahl des Paares  $R_1, R_2$  und ein von  $r$  verschiedener Punkt auf dem anderen Strahl zweifach singulär sind.

Um eine Kongruenz vom Typus  $\mathfrak{R}$  zu erhalten, sei  $A_1 = a_1 r_1$  ein  $T$ -Strahl in  $\varrho_1$ ,  $A_2 = a_2 r_2$  kein  $\Phi$ -Strahl. An Hand der Fig. 18 überzeugt man sich durch die gleichen Überlegungen wie im vorigen Fall, daß die

Bildkollineation einfach ausgeartet ist:  $R_2$  ist zweifach singulärer Strahl des ersten Feldes,  $a_1$  zweifach singulärer Punkt des zweiten. Die Projektivität zwischen der Punktreihe  $x'$  auf  $R_2$  und dem Büschel der Strahlen  $G'' = a_1 x'$  ist durch die nicht ausgeartete Perspektivität  $x' \leftrightarrow x''$

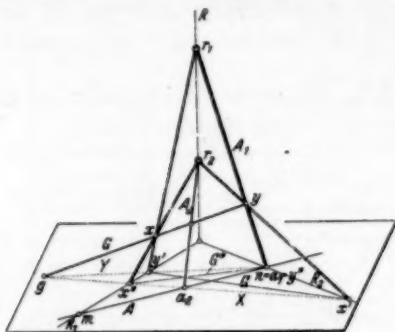


Fig. 18.  $\mathcal{R}$ -Kongruenz mit einem  $\Phi$ -Strahl als Brennlinie.

mit dem Perspektivitätszentrum  $a_2$  festgelegt. Wieder kommt also nicht jede einfach ausgeartete Kollineation von diesem Typus (also: zweifach singulärer Strahl  $= R_2$ , zweifach singulärer Punkt  $\neq r$  auf  $R_2$ ) als Bild in Frage. Vielmehr muß auf Grund jener Perspektivität den von  $R_2$  verschiedenen  $r$ -Strahlen des ersten Feldes eindeutig der Strahl  $R_2$  des zweiten Feldes zugeordnet werden. Dann darf die singuläre Kollineation aber wiederum als uneigentliche  $\Delta$ -

Kollineation angesehen werden. Faßt man  $R_2$  als Strahl des ersten oder zweiten Feldes auf, so wird ihm in jedem Fall wenigstens  $R_1$  im anderen Reißfeld zugeordnet. Das wäre nicht der Fall, wenn dem Büschelscheitel  $r$  des ersten Feldes ein von  $R_2$  verschiedener  $a_1$ -Strahl im zweiten Felde zugeordnet würde.

So ergeben sich wieder folgende Möglichkeiten:

$R$ -Ebenen der Brennlinien		Zweifach singuläres Element im		Die singuläre Kollineation ist festgelegt durch die Perspektivität
		ersten Feld	zweiten Feld	
$\omega_1 = \varrho_2$ ( $A_1 = T$ -Strahl)	$\omega_2 \neq \varrho_x$	$R_2$	$a_1$ auf $R_2$	$x' \leftrightarrow x''$ , Perspektivitätszentrum $a_2$
$\omega_1 = \varrho_1$ ( $A_1 = S$ -Strahl)	$\omega_2 \neq \varrho_x$	$a_1$ auf $R_1$	$R_1$	dasselbe
$\omega_1 \neq \varrho_x$	$\omega_2 = \varrho_1$ ( $A_2 = T$ -Strahl)	$R_1$	$a_2$ auf $R_1$	$y' \leftrightarrow y''$ , Perspektivitätszentrum $a_1$
$\omega_1 \neq \varrho_x$	$\omega_2 = \varrho_2$ ( $A_2 = S$ -Strahl)	$a_2$ auf $R_2$	$R_2$	dasselbe

Zu jeder uneigentlichen  $\Delta$ -Kollineation dieser Typen kann man die Originalkongruenz bestimmen. Ist beispielsweise die vorhin betrachtete Kollineation gegeben, deren Bestimmungsstücke in der ersten Zeile der Tabelle stehen, so weiß man: Die Strahlen  $G''$  schneiden auf  $R_1$  eine zu

der Reihe der  $z'$  perspektive Punktreihe aus. Man bestimme das Perspektivitätszentrum  $a_2$  und erhält also  $A_2 = a_2 r_2$ ,  $A_1 = a_1 r_1$ . So gilt dual zu Satz 20 der

**Satz 21:** Die Gesamtheit derjenigen Kongruenzen  $\mathcal{R}$ , deren erste Brennnlinie ein  $\Phi$ -Strahl durch  $r_1$  (bzw.  $r_2$ ), deren zweite Brennnlinie jedoch kein  $\Phi$ -Strahl ist, aber durch  $r_2$  (bzw.  $r_1$ ) geht, wird umkehrbar eindeutig abgebildet auf die Gesamtheit derjenigen einfach ausgearteten uneigentlichen  $\Delta$ -Kollineationen, für die ein Strahl des Paares  $R_1, R_2$  und ein auf demselben Strahl liegender, von  $r$  verschiedener Punkt zweifach singulär sind.

Der dritte Typus wird durch eine  $T$ -Kongruenz repräsentiert. Brennnlinien seien  $A_1 = a_1 r_2$  in  $\varrho_1$  und  $A_2 = a_2 r_1$  in  $\varrho_2$ . Zu jedem nicht durch  $r$  gewählten  $G'$  gehört  $G'' = A = a_1 a_2$ , zu jedem Büschel  $z' \neq r$  zunächst eindeutig wieder ein Regulus der Kongruenz. Wird  $G' = z' r$ , so läßt sich für  $G''$  nicht, wie in den früheren Fällen, eine Grenzlage  $G''$  angeben, vielmehr ist wieder jeder  $\pi$ -Strahl als zweiter Riß von  $R$ , jeder Punkt auf  $A$  als zweiter Riß  $z''$  jener Regelschar anzusehen. Demnach ist die entstehende ausgeartete Transformation in folgender Weise charakterisiert:

**Satz 22:** Einer  $T$ -Kongruenz wird eine ausgeartete (als eigentlich und als uneigentlich zu bezeichnende)  $\Delta$ -Kollineation zugeordnet, für die der Übergang von einem Rißfelde zum anderen durch folgende Tabelle angegeben wird.

Erstes Feld	→	Zweites Feld
	Singul.-Grad:	
Strahl nicht durch $r$	0	$A = \pi$ -Strahl der Kongruenz
$r$ -Strahl	2	jeder Strahl
Punkt $\neq r$	1	jeder $A$ -Punkt
$r$	2	jeder Punkt
Zweites Feld	→	Erstes Feld
	Singul.-Grad:	
Punkt nicht auf $A$	0	$r$
$A$ -Punkt	2	jeder Punkt
Strahl $\neq A$	1	jeder $r$ -Strahl
$A$	2	jeder Strahl

Um diesen Typus, der offenbar als weitere Ausartung einer einfach ausgearteten Kollineation auftritt, noch als Kollineation deuten zu können, erscheint es zweckmäßig, den Kollineationsbegriff im Rahmen synthetischer Darstellungen allgemein so zu fassen:



Eine Verwandtschaft in der Ebene heiße eine Kollineation, wenn jedem Punkt  $p'$  und jedem Strahl  $G'$  des einen Feldes wenigstens ein Punkt  $p''$  bzw. ein Strahl  $G''$  des anderen Feldes mit folgender Bedingung zugeordnet wird: Liegen  $p'$  und  $G'$  vereinigt, so soll jedes zu  $p'$  gehörige  $p''$  mit wenigstens einem  $G''$ , jedes zu  $G'$  gehörige  $G''$  mit wenigstens einem  $p''$  vereinigt liegen.

Dieser Bedingung genügen offenbar alle singulären Typen. Die vorliegende Ausartung darf als eigentliche und als uneigentliche  $\Delta$ -Kollineation angesehen werden, weil die Strahlen  $R_1$  und  $R_2$  zweifach singulär sind, so daß jeder sich selbst, aber auch jeder dem anderen zugeordnet wird. Dem entspricht es, daß die Originalkongruenz zugleich vom Typus  $\S$  und vom Typus  $\Re$  ist<sup>34)</sup>. Für die  $S$ -Kongruenzen gilt ein dualer Satz.

18. Parabolische Kongruenzen mit der Achse  $R$ . Endlich soll die Beziehung abgeleitet werden, die zwischen den ersten und zweiten Rissen einer parabolischen Kongruenz mit der Achse  $R$  besteht. Die Kongruenz sei festgelegt durch eine nicht-singuläre Projektivität zwischen den  $R$ -Punkten  $x$  und den  $R$ -Ebenen  $\xi$

$$(1) \quad (r_1 r_2 r x) = (\alpha \beta \gamma \xi).$$

Dabei seien die den Punkten  $r_1$  und  $r_2$  zugeordneten Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  von beiden Ebenen  $\varrho_x$  verschieden. Die Risse  $X'$  und  $X''$  der Strahlen eines Büschels  $[x, \xi]$  sind die  $\pi$ -Strahlen der  $S$ -Kongruenz bzw. der  $T$ -Kongruenz, die  $[x, \xi]$  enthält. Ist  $\eta$  die Ebene  $RX'$ , die also die  $r$ -Strahlen der  $S$ -Kongruenz, und  $\zeta$  die Ebene  $RX''$ , die mithin die  $r$ -Strahlen der  $T$ -Kongruenz enthält, so ist

$$(2) \quad (r_1 r_2 r x) = (\varrho_1 \varrho_2 \eta \xi)$$

und

$$(3) \quad (r_1 r_2 r x) = (\varrho_1 \varrho_2 \zeta \xi).$$

Zwischen den  $R$ -Ebenen  $\xi$  und den die Risse ausschneidenden Ebenen  $\eta$  und  $\zeta$  bestehen also die Beziehungen

$$(\alpha \beta \gamma \xi) = (\varrho_2 \varrho_1 \eta \xi)$$

<sup>34)</sup> Es könnte eingewendet werden, daß eine Ausartung, wie die vorliegende, „trivial“ und für praktische Zwecke nutzlos ist. Diese Auffassung erscheint mir verfehlt. Die immer wiederkehrende Frage bei Zwei-Risystemen der darstellenden Geometrie ist die folgende: Man kennt den ersten Riß eines Raumgebildes (in diesem Falle z. B.  $z'$  als Bild einer Regelschar), und man möchte, ohne in den Raum zurückzugehen, eine präzise Aussage darüber haben, welche Elemente des Bildgebietes als zweite Risse in Frage kommen. Diese Aussage wird in den vorliegenden Fällen gegeben, indem man  $z'$  mit Hilfe der auftretenden Bildkollineation transformiert. Gerade die unter Umständen dabei auftretende Mehrdeutigkeit von  $z''$  ist dann für Konstruktionszwecke wesentlich, etwa für die Frage, ob eine bestimmte, mit den Rissen vorzunehmende Konstruktion ausführbar ist oder nicht.



und

$$(\alpha \beta \gamma \xi) = (\varrho_1 \varrho_2 \zeta \xi)$$

oder ausführlicher:

$$(4) \quad (\alpha \gamma) (\beta \xi) (\varrho_2 \xi) (\varrho_1 \eta) - (\beta \gamma) (\alpha \xi) (\varrho_1 \xi) (\varrho_2 \eta) = 0$$

und

$$(5) \quad (\alpha \gamma) (\beta \xi) (\varrho_1 \xi) (\varrho_2 \zeta) - (\beta \gamma) (\alpha \xi) (\varrho_2 \xi) (\varrho_1 \zeta) = 0,$$

wobei die Klammern in üblicher Weise Determinanten in binären homogenen Koordinaten darstellen.

Jede dieser Gleichungen definiert eine [1-2]-Korrespondenz zwischen den  $\eta$  und  $\xi$  bzw. den  $\zeta$  und  $\xi$ , und zwar werden die ausgezeichneten Ebenen  $\varrho_1, \varrho_2, \alpha, \beta$  und  $\gamma$  in folgender Weise einander zugeordnet:

(6)

$\xi$		$\eta$	$X' = \eta \pi$
$\beta$	$\varrho_2$	$\varrho_2$	$R_2$
$\alpha$	$\varrho_1$	$\varrho_1$	$R_1$
$\gamma$	$\bullet$	$\gamma$	$C$

(7)

$\xi$		$\zeta$	$X'' = \zeta \pi$
$\beta$	$\varrho_1$	$\varrho_1$	$R_1$
$\alpha$	$\varrho_2$	$\varrho_2$	$R_2$
$\gamma$	$\bullet$	$\gamma$	$C$

Durchläuft  $\eta$  (bzw.  $\zeta$ ) das Büschel  $R$ , so bilden die zugeordneten Ebenenpaare  $\xi$  eine Involution, die nicht ausgeartet ist, weil die Ebenen  $\alpha, \beta, \varrho_1, \varrho_2$  paarweise verschieden sind. Beide Korrespondenzen (4) und (5) haben die gleichen Doppelemente, nämlich  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $\gamma$ .

Gesucht wird nun die Korrespondenz  $\eta \leftrightarrow \zeta$ , die ja die Korrespondenz  $X' \leftrightarrow X''$  ausschneidet. Zu jedem gegebenen  $\eta$  gehören zwei Ebenen  $\xi$ , zu ihnen je ein  $\zeta$ , und ebenso umgekehrt. Es liegt also eine [2-2]-Korrespondenz vor. Zum Element  $\eta = \varrho_1$  gehört das Paar  $\zeta = \varrho_1$  und  $\zeta = \varrho_2$ ; aber auch zum Element  $\eta = \varrho_2$  gehört dasselbe Paar. Dann sind aber die Ebenen  $\eta$  (und in gleicher Weise die Ebenen  $\zeta$ ) derart involutorisch gepaart<sup>35)</sup>, daß jedem Element eines  $\eta$ -Paares dasselbe  $\zeta$ -Paar zugeordnet wird; oder: Die [2-2]-Korrespondenz ist eine Projektivität zweier Involutionen. So erhält man als Ergebnis

**Satz 23:** *Zwischen den Rissen  $X'$  und  $X''$  der Strahlen einer parabolischen Kongruenz mit der Achse  $R$ , die außer  $R$  keine  $\Phi$ -Strahlen enthält, besteht eine [2-2]-Korrespondenz, die eine Projektivität zweier Involutionen ist. In ihr entspricht jedem Strahl des Paares  $R_1, R_2$  wieder das Paar  $R_1, R_2$ .*

<sup>35)</sup> Vgl. etwa Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, 1908, I, § 29.

Will man die [2-2]-Korrespondenz  $\eta \leftrightarrow \zeta$  explizit hinschreiben, so gehe man so vor: Es sei  $\zeta$  eine der beiden Ebenen, die einer Ebene  $\eta$  zugeordnet werden. Die  $\eta$  zugeordnete quadratische Form (4) und die  $\zeta$  zugeordnete Form (5) haben dann eine Nullstelle  $\xi$  gemeinsam. Also muß die Resultante von (4) und (5) verschwinden. Man hat also diese Resultante auszurechnen und gleich Null zu setzen. Die Gleichung enthält außer den Koordinaten der fünf gegebenen Ebenen nur die von  $\eta$  und  $\zeta$  und liefert den gesuchten Zusammenhang.

19. Übergang zur kinematischen Abbildung von Blaschke und Grünwald. Bei sämtlichen hier behandelten Konstruktionen war wesentlich, daß die Bildebene  $\pi$  nicht-singulär war, also keine  $\Phi$ -Strahlen enthielt. Das hatte zur Folge, daß der Bildebene — aufgefaßt als Raumbene — eine nicht-singuläre Kollineation, nämlich die Identität, zugeordnet wurde. Nimmt man nach Herstellung der Abbildung im Bildgebiet eine beliebige nicht-singuläre Korrelation vor, so erhält man eine Abbildung der Raumstrahlen auf geordnete Punktepaare. Die Rolle von  $R_1, R_2$  wird dann von einem Punktepaar  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  übernommen. Eigentliche bzw. uneigentliche Kollineationen des Paares  $R_1, R_2$  gehen wieder in eigentliche bzw. uneigentliche Kollineationen des Paares  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  über.

Bei der von Blaschke und Grünwald behandelten und auf Study zurückgehenden kinematischen Abbildung<sup>36)</sup> werden durch ein in elementarer Weise definiertes Konstruktionsgesetz die Raumstrahlen auf geordnete Punktepaare abgebildet. Dadurch wird erreicht, daß die als Strahlenbündel aufgefaßten Punkte des  $R_1$  mit gewissen Ausnahmen umkehrbar eindeutig auf die euklidischen Bewegungen, die als Strahlenfelder aufgefaßten Ebenen wiederum mit gewissen Ausnahmen auf die euklidischen Umlegungen in einer Bildebene abgebildet werden. Zunächst fällt auf, daß hier also nicht wie bei der von uns behandelten Abbildung die Felder, sondern die Bündel auf eigentliche, dagegen die Felder auf uneigentliche starre  $\Delta$ -Kollineationen abgebildet werden. Ferner treten bei der kinematischen Abbildung bekanntlich als singuläre Strahlenscharen zwei verschränkte Büschelpaare von Minimalstrahlen auf, die in Ebenen parallel zur fest gewählten Bildebene liegen, so daß die Bildebene also in unserer Ausdrucksweise singulär, nämlich eine  $R$ -Ebene ist. Die von uns behandelten Konstruktionen führen also gewiß nicht unmittelbar zum Spezialfall der kinematischen Abbildung. Dagegen gelangt man durch folgende Betrachtungen sofort zu dem gewünschten Ergebnis.

<sup>36)</sup> Eine zusammenfassende Darstellung findet sich bei E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie. I. Band: Die linearen Abbildungen. Wien 1923, S. 240 ff.

Anstatt eine Bildebene  $\pi$  zu benutzen, stellen wir uns einen Bündelriß<sup>37)</sup> her: Ist  $o$  das Zentrum eines keinen  $\Phi$ -Strahl enthaltenden Bündels, so ordne man jedem Strahl  $G$  jetzt als „Risse“ den  $o$ -Strahl  $G'$  der  $S$ -Kongruenz und den  $o$ -Strahl  $G''$  der  $T$ -Kongruenz zu, die  $G$  enthalten. Jetzt treten in diesem Bündel zwei „Fundamentalstrahlen“  $R_1 = or_1$  und  $R_2 = or_2$  auf; sämtliche Überlegungen, die früher für die Ebenen galten, insbesondere also das Verfahren der Netzprojektion, lassen sich nunmehr dual für die Punkte aussprechen. Versteht man also unter  $\Delta$ -Kollineationen jetzt wieder die Kollineationen im Bündel  $o$ , die das Strahlenpaar  $R_1, R_2$  in sich transformieren, so werden bei Verwendung eines Bündelrisses und bei Zugrundelegung einer geeigneten Metrik die Punkte auf die eigentlichen, die Felder auf die uneigentlichen starren  $\Delta$ -Kollineationen abgebildet. Schneidet man nunmehr das gesamte Bildbündel mit einem beliebigen Felde  $\pi$ , so erhält man eine Abbildung des Strahlenraumes auf die geordneten Punktepaare dieses Feldes mit einem ausgezeichneten Punktepaar  $\bar{r}_1 = R_1\pi$  und  $\bar{r}_2 = R_2\pi$  als Fundamentalgebilde: Den Punkten des Raumes entsprechen die Bewegungen, den Ebenen die Umlegungen der dadurch in  $\pi$  festgelegten Geometrie.

Wenn also insbesondere dafür gesorgt wird, daß jenes Fundamentalstrahlenpaar des Bündelrisses im neuen Bildgebiet  $\pi$  die Kreispunkte ausschneidet, so erhält man die von Blaschke angegebene Abbildung der projektiven Geometrie des  $R_3$  auf die euklidische Kinematik. Gibt man die verschränkten Büschelpaare von Minimalstrahlen mit gemeinsamem Strahl  $R$  vor, so stelle man sich mithin zunächst einen beliebigen Bündelriß her und schneide diesen mit einer durch  $R$  gehenden reellen Bildebene. Damit ist ein neues Konstruktionsverfahren auch für diese Abbildung gewonnen.

In welcher Weise man durch andere Spezialisierungen der hier durchgeführten rein projektiven Überlegungen zur konstruktiven Behandlung metrischer Aufgaben der Liniengeometrie gelangen kann, soll in einer späteren Arbeit durchgeführt werden.

<sup>37)</sup> Vgl. die in Fußnote <sup>1)</sup> zitierte Arbeit III des Verfassers, S. 260. Auf die Möglichkeit, die kinematische Abbildung auf diese Weise herzustellen, habe ich schon in der Arbeit I hingewiesen, dann ausführlicher in einem auf der Jahresversammlung in Hamburg 1928 gehaltenen Vortrag [l. c. Fußnote <sup>2)</sup>]. — Vgl. ferner Strubecker, Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Abt. II a, 139 (1930), S. 694.

# Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande.

Von

Kurt Friedrichs in Braunschweig.

Bei den Randwertproblemen der Potentialtheorie, auf welche die wirbelfreien Strömungen mit freien Grenzen führen, bietet die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit ein besonderes Interesse. Deshalb, weil es nicht immer von vornherein selbstverständlich ist, — wie manche Diskussionen gezeigt haben — welches die „richtigen“ Randbedingungen sind; d. h. diejenigen, welche Existenz und Eindeutigkeit garantieren.

Zur Klärung solcher Fragen hat sich bisher als Hilfsmittel vor allem die Variationsrechnung bewährt; in der Tat sind auch die typischen Potentialprobleme mit freien Grenzen der Variationsrechnung zugänglich; das soll für eine Reihe von Strömungen, insbesondere für Ausflußströmungen aus einer Düse gezeigt werden. Die entsprechende Randwertaufgabe — allerdings in einer von der physikalischen Frage (I) zunächst etwas abweichenden Form (II) gestellt — entsteht aus der Variation eines einfachen Integrals für die Stromfunktion. Insbesondere ist dabei auch das Integrationsgebiet zu variieren, wodurch diejenige Randbedingung entspringt, die das Druckgleichgewicht am Rande des Strahles ausdrückt<sup>1)</sup>.

Darüber hinaus aber zeige ich, daß die Lösung der Randwertaufgabe den Variationsausdruck wirklich zum *Minimum* macht; als unmittelbare Konsequenz dieser Tatsache ergibt sich die *Eindeutigkeit* dieser Lösung.

Bisher war die Eindeutigkeit bei ebenen nach innen konkaven Düsen nur gegenüber infinitesimaler Abänderung bewiesen (Weinstein, Hamel, Weyl [<sup>1</sup>], [<sup>2</sup>]), aber auch für das ursprüngliche physikalische Problem (I) (s. unten). Auf diese infinitesimale Eindeutigkeit gründete Weinstein seinen Existenzsatz.

Die *Existenz* der Lösung mit Hilfe des Minimumproblems zu beweisen, steht noch aus.

<sup>1)</sup> Wie mir inzwischen Herr A. Weinstein mitteilt, hat schon Riabouchinsky [<sup>1</sup>] 1927 solche Variationsprobleme aufgestellt und die erste Variation berechnet, allerdings ohne Bezug auf die Minimumeigenschaft im Falle freier Grenzen.

Ebenso bleibt noch offen, ob die Lösung des Minimumproblems auch *numerisch* approximiert werden kann, womit dann zugleich auch eine numerische Berechnung des Kontraktionskoeffizienten zu gewinnen wäre.

Die hier angegebene Methode ist nicht auf ebene Probleme beschränkt. Es werden neben den ebenen auch die achsensymmetrischen *räumlichen* Ausflußströmungen, die der funktionentheoretischen Behandlung nicht mehr zugänglich sind, auf ein Minimumproblem zurückgeführt.

In einem ersten Anhang wird gezeigt, daß die Minimumeigenschaft unseres ersten Variationsproblems nur eine allgemeine Eigenschaft regulärer Variationsprobleme ausdrückt. In einem zweiten Anhang gewinne ich aus dem Minimumproblem einen neuen Zugang zur Behandlung der oben erwähnten infinitesimalen Eindeutigkeit.

Zunächst seien die behandelten Probleme nur vorläufig formuliert, um ihren endgültigen Ansatz zu motivieren. Die ebene Ausflußströmung einer zur Strömung konkaven Düse (Fig. 1) wird beschrieben erstens durch ein Stromgebiet, das teils vom „Düsenrand“ teils vom „Strahlrand“ begrenzt wird. Wir beschränken uns dabei auf den Fall der symmetrischen Strömung; wesentlich benutzen wir allerdings nur, daß Aus- und Einströmrichtung (im unendlichen) übereinstimmen und daß der Düsenrand eine eindeutige Projektion auf diese Richtung besitzt. Die Symmetrieachse wählen wir zur  $x$ -Achse; dann ist zweitens die Stromfunktion  $\psi(x, y)$  für die Strömung kennzeichnend; sie sei Potentialfunktion, Null auf der Achse und gleich Eins auf dem „Rande“; die Quadratsumme ihrer Ableitungen sei konstant  $v^2$  auf dem Strahlrand, wo  $v^2$  die vorgegebene quer über den Strahl konstante Ausströmgeschwindigkeit im Unendlichen ist. Insbesondere ist die Strahlbreite im Unendlichen nicht vorgegeben (Problem I). Wir sind allerdings genötigt, das Problem etwas zu verändern; wir denken uns nämlich die Düse irgendwie mit stetiger Krümmung verlängert; und dann die Strahlbreite im Unendlichen vorgegeben, während die Stelle der Ablösung von der Düse offen gelassen ist (Problem II). Diese Variation der Ablösungsstelle ist wohl kaum physikalisch realisierbar; doch scheint mir das Problem II das mathematisch natürlichere zu sein; auch bei den Untersuchungen von Weinstein und Weyl<sup>2)</sup> war das Problem II

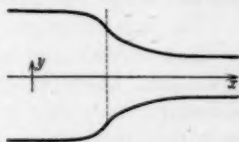


Fig. 1.

<sup>2)</sup> Unser Problem (II) ist dasselbe wie bei Weyl [2]. Das ursprüngliche Problem (II) von Weinstein entsteht, indem zusätzlich auch die Ablösungsstelle vorgeschrieben wird.

unmittelbar zugänglich, während die Behandlung von (I) auf die von (II) zurückgeführt wurde. Im Falle einer zur Strömung konvexen Düse ist eine Variation der Ablösungsstelle auch physikalisch denkbar<sup>3)</sup>.

Zur konkaven und konvexen Düse gehören zwei Arten von Ablösung; sie unterscheiden sich dadurch, daß in einem Falle die Strömung in der Nähe der Ablösungsstelle die (mit stetiger Krümmung verlängerte) Düse durchsetzt, im anderen Falle nicht; wir sprechen dann von *äußerer* und *innerer* Ablösung. Zunächst soll nur der Fall äußerer Ablösung behandelt werden.

Der Variationsausdruck, der von der richtigen Stromfunktion  $\psi$  zum Minimum gemacht wird, lautet nun

$$\iint \{ \psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2 \} dx dy,$$

über das Stromgebiet integriert; damit das Integral existiert, wird das Stromgebiet im endlichen abgebrochen; der Fall des unendlichen Gebietes erfordert einige Modifikationen, die gesondert behandelt werden.

Vom dem Stromgebiet wird nur verlangt, daß sein Rand außerhalb der Düse verläuft und von der Stromfunktion im wesentlichen nur, daß sie auf dem Rande konstant Eins ist. Die Addition der Konstanten  $v^2$  im Integranden<sup>4)</sup> wäre bei festem Gebiet effektlos, hier ist sie wesentlich; durch Gebietsvariation entsteht auf dem Teil des Randes, der sich nicht den Düsenwänden anlegt, d. h. auf dem Strahlrand gerade als natürliche Randbedingung  $\psi_x^2 + \psi_y^2 = v^2$ , während für die anliegenden Teile Ungleichungen entspringen.

Daß das Minimumproblem überhaupt einen Sinn hat, mag man sich durch folgende Überlegung plausibel machen: Das Minimum von

$$\iint_F \{ \psi_x^2 + \psi_y^2 \} dx dy$$

bei festem Gebiet kann höchstens wachsen, wenn das Gebiet — und damit  $\iint_F v^2 dx dy$  — verkleinert wird; diese Verkleinerung ist ja gleichbedeutend mit der Zusatzbedingung  $\psi = 1$  im Differenzgebiet.

Das eigentliche mathematische Problem dieser Arbeit besteht in dem Nachweis, daß die Lösung der Strömungsaufgabe den obigen Ausdruck wirklich zum Minimum macht und also eindeutig ist. Zu dem Zweck

<sup>3)</sup> Zur Klärung dieser Möglichkeit hat St. Bergmann [3] als Beispiel eine Kontur konstruiert, bei der sich zwei Strahlbreiten angeben lassen, zu denen auch zwei Ablösungsstellen gehören.

<sup>4)</sup> Übrigens lassen sich auch Wirbelströmungen durch ein solches Variationsproblem kennzeichnen, wenn die Bernoullikonstante  $q(\psi)$  als Funktion von  $\psi$  vorgegeben und an Stelle von  $\frac{v^2}{2}$  eingesetzt wird.

wird die zweite Variation dieses Integrals in einer Weise berechnet, die in Evidenz setzt, daß sie positiv-definit ist. In einer solchen Berechnung der zweiten Variation allein liegen die Schwierigkeiten bei der noch ausstehenden Übertragung auf allgemeine ebene Düsenformen und auf nicht achsensymmetrische räumliche Probleme.

## 1. Randwert- und Minimum-Problem der endlichen Strömung.

### 1. 1. Zulässigkeitsbedingungen.

Zur Formulierung<sup>5)</sup> des mathematischen Problems [1] ist zunächst anzugeben, welche Gebiete und welche Funktionen in ihm wir „zulassen“.

Das abgeschlossene Gebiet  $\Gamma$  mit dem Inneren  $\Gamma'$  sei begrenzt von (Fig. 2)

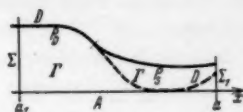


Fig. 2.

der Achse

$$A: y = 0,$$

$$a_1 \leq x \leq a,$$

dem „Rand“

$$P: y = \Omega(x),$$

$$a_1 \leq x \leq a,$$

den Seitenlinien

$$\Sigma_1: x = a_1,$$

$$0 \leq y \leq \Omega(a_1),$$

$$\Sigma: x = a,$$

$$0 \leq y \leq \Omega(a).$$

Der Rand  $P$  sei durch die Düse

$$D: y = Y(x),$$

$$a_1 \leq x \leq a$$

eingeschränkt, vermöge

(1)

$$Y(x) \leq \Omega(x)$$

$$a_1 \leq x \leq a.$$

Die Randfunktionen  $\Omega(x)$  und  $Y(x)$  seien stetig differenzierbar. Wir zerlegen den Rand  $P$ , je nachdem ob in (1) die Gleichheit angenommen wird oder nicht, in den „Düsenrand“  $P_D$  und den „Strahlrand“  $P_S$ , so daß also gilt:

$$Y(x) = \Omega(x) \quad \text{auf } P_D,$$

$$Y(x) < \Omega(x) \quad \text{auf } P_S.$$

Ein Gebiet  $\Gamma$ , das den angegebenen Bedingungen genügt, möge kurz mit  $[\Gamma]$  bezeichnet werden.

<sup>5)</sup> Wir wollen im folgenden Funktionen und Bereiche durch lateinische oder griechische Buchstaben kennzeichnen, je nachdem ob sie fest oder variabel sind.



Von der in  $\Gamma$  erklärten Funktion  $\psi(x, y)$  — dann  $[\psi_1]$  genannt — verlangen wir:  $\psi$  ist einmal in  $\Gamma$ , zweimal in  $\Gamma'$  stetig differenzierbar; ferner

$$(2) \quad \psi = 1 \quad \text{auf } P,$$

$$(3) \quad \psi = 0 \quad \text{auf } A,$$

$$(4) \quad \psi_y > 0 \quad \text{in } \Gamma.$$

Gebiete  $[\Gamma]$  und Funktionen  $[\psi_1]$ , die in ihnen erklärt sind, heißen zum Problem [1] *zugelassen*.

Wir haben uns bei der Wahl dieser Bedingungen auf die symmetrische Strömung beschränkt und demgemäß nur eine Hälfte des Strömungsgebietes angesetzt. Die Ungleichung (1) garantiert äußere Ablösung von der Düse. Der Schranke  $Y(x)$  brauchen wir keine weitere Bedingung aufzuerlegen, solange wir keinen Existenzsatz formulieren. Das eigentliche Problem der konkaven Düse entsteht, wenn  $Y(x)$  in einem Intervall  $(a_1, a_2 < a)$  negativ gekrümmt ist, für  $x \geq a_2$  verschwindet.

Übrigens haben wir durch die Forderung der Stetigkeit von  $\Omega'(x)$  und  $Y'(x)$  den Fall polygonaler Düsen ausgeschlossen. Die in (4) enthaltene Forderung, daß sich die Stromlinien in der Form  $y = y(x)$  darstellen lassen, kann zweifellos (auch für den Rand  $y = \Omega(x)$ ) gemildert werden.

### 1. 2. Randwertaufgabe.

Die Lösung der Randwertaufgabe heiße  $\psi = \psi^0(x, y)$ , das zugehörige Gebiet  $\Gamma = \Gamma^0$  mit dem Rand  $P = P^0$ . Es wird dann  $\psi^0$  und  $\Gamma^0$  — außer durch Zulässigkeit — durch die folgenden Bedingungen gekennzeichnet:

$$(5) \quad \psi_x^0 = 0 \quad \text{auf } \Sigma_1 \text{ und } \Sigma,$$

$$(6)_S \quad (\psi_x^0)^2 + (\psi_y^0)^2 = v^2 \quad \text{auf } P_S^0,$$

wo  $v$  die vorgeschriebene konstante Strahlrandgeschwindigkeit ist; auf dem festen Rand gelte dagegen die Ungleichung

$$(6)_D \quad (\psi_x^0)^2 + (\psi_y^0)^2 \leq v^2 \quad \text{auf } P_D^0,$$

im Innern von  $\Gamma^0$  genüge  $\psi$  der Differentialgleichung

$$(7) \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad \text{in } \Gamma^{0'}.$$

An Stelle der Bedingung (5), die senkrechte Ein- und Ausströmung bedeutet, würden andere zu setzen sein, wenn entsprechende Zulässigkeitsbedingungen auf  $\Sigma_1$  und  $\Sigma$  gestellt sind.

Wesentlich ist — außer (6)<sub>s</sub> — die Ungleichung (6)<sub>D</sub>, die wir — wie ausdrücklich bemerkt sei — als zusätzliche Randbedingung ansehen<sup>a)</sup>.

### 1. 3. Minimumproblem.

Die beschriebene Randwertaufgabe ist — wie wir zeigen wollen — gleichwertig mit folgender Variationsaufgabe:

Durch Wahl von Funktionen vom Typ  $[\psi_i]$  in Gebieten  $[\Gamma]$  ist zum Minimum zu machen

$$J[\psi, \Gamma] = \iint_{\Gamma} \{\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2\} dx dy.$$

### 1. 4. Lösung des Minimumproblems ist Lösung der Randwertaufgabe.

Satz 1. Ist eine zulässige Funktion  $\psi^0(x, y)$  in einem zulässigen Gebiet  $\Gamma^0$  mit der Randfunktion  $\Omega^0(x)$  Lösung des Minimumproblems, so ist  $\psi^0$  in  $\Gamma^0$  auch Lösung der Randwertaufgabe.

Ich will diesen Satz nur formal begründen.

Ist  $\psi^s(x, y)$ ,  $\Omega^s(x)$  eine Schar zulässiger Funktionen,  $J^s$  der entsprechende Wert von  $J$ , so setzen wir

$$\frac{\partial J^0}{\partial \varepsilon} = \delta J^0, \quad \frac{\partial \Omega^0}{\partial \varepsilon} = \delta \Omega^0, \quad \frac{\partial J^0}{\partial \varepsilon} = \delta J^0.$$

Wir unterstellen, daß für jede zulässige Wahl von  $\delta \psi^0$ ,  $\delta \Omega^0$  zugehörige zulässige  $\psi^s$  und  $\Omega^s$  zu bilden sind; dabei ist die Ungleichung (1) zu beachten, aus ihr entnehmen wir:

I. Ist  $\delta \Omega^0 = 0$  auf  $P_D^0$ , so ist eine Schar  $\psi^s$ ,  $\Omega^s$  für eine Vollumgebung von  $\varepsilon = 0$  bildbar. In diesem Falle gilt  $\delta J^0 = 0$ .

II. Ist  $\delta \Omega^0 \geq 0$  auf  $P_D^0$ , so ist eine Schar  $\psi^s$ ,  $\Omega^s$  für  $\varepsilon \geq 0$  bildbar. Somit folgt hier nur:

$$\delta J^0 \geq 0.$$

Ferner ist wesentlich zu beachten, daß die Variationen von  $\psi$  und  $\Omega$  auf  $P$  voneinander abhängen vermöge  $\psi = 1$ , der Bedingung (2). Aus ihr entspringt

$$\delta(2) \quad \delta \psi^0 + \psi_y^0 \delta \Omega^0 = 0;$$

auf der Achse gilt wegen (3)

$$\delta(3) \quad \delta \psi^0 = 0 \quad \text{auf } A.$$

Im übrigen setzen wir die Variationen  $\delta \psi^0$ ,  $\delta \Omega^0$  als willkürlich an.

<sup>a)</sup> Die explizite bekannten Ausflußströmungen bei polygonaler Begrenzung erfüllen sie in einer Umgebung der Ablösungsstelle, wie sich leicht nachprüfen läßt. Bei innerer Ablösung würde in (6)<sub>D</sub> das entgegengesetzte Zeichen stehen.

Nunmehr berechnen wir die erste Variation  $\delta J^0$

$$\begin{aligned} \delta J^0 = & -2 \iint_{\Gamma^0} \{\psi_{xx}^0 + \psi_{yy}^0\} \delta \psi^0 dx dy + \int_{\Gamma^0} \{\psi_y^0 - \psi_x^0 \Omega^{0'}(x)\} \delta \psi^0 dx \\ & + \int_{\Gamma^0} \{(\psi_x^0)^2 + (\psi_y^0)^2 + v^2\} \delta \Omega^0 dx + \left[ \int_0^{\Omega(x)} \psi_x^0 \delta \psi^0 dy \right]_{a_1}^a, \end{aligned}$$

wobei wir  $\delta(3)$  schon berücksichtigt haben. Wir können noch  $\Omega^{0'}(x)$  vertreiben, indem wir die Gleichung

$$\psi_x^0 + \Omega^{0'} \psi_y^0 = 0$$

verwenden, die durch Differentiation aus  $\psi(x, \Omega(x)) = 1$  entsteht; indem wir noch  $\delta \psi^0$  vermöge  $\delta(2)$  durch  $\delta \Omega^0$  ausdrücken, entsteht

$$\begin{aligned} \delta J^0 = & -2 \iint_{\Gamma^0} \{\psi_{xx}^0 + \psi_{yy}^0\} \delta \psi^0 dx dy + \int_{\Gamma^0} \{v^2 - (\psi_x^0)^2 - (\psi_y^0)^2\} \delta \Omega^0 dx \\ & - \left[ \int_0^{\Omega(x)} \psi_x^0 \delta \psi^0 dy \right]_{a_1}^a. \end{aligned}$$

Es sei nun zunächst  $\delta \Omega^0 = 0$  auf  $P_D^0$ , so daß also  $\delta J^0 = 0$  gilt; so entspringt aus der Willkürlichkeit von  $\delta \psi$  in  $\Gamma^{0'}$  und auf  $\Sigma_1^0$ ,  $\Sigma^0$  und von  $\delta \Omega^0$  auf  $P_S^0$

$$\begin{aligned} \psi_{xx}^0 + \psi_{yy}^0 &= 0 \text{ in } \Gamma^{0'}, \quad v^2 - (\psi_x^0)^2 - (\psi_y^0)^2 = 0 \text{ auf } P_S \\ \psi_x^0 &= 0 \text{ auf } \Sigma_1, \Sigma; \text{ d. h. (7), (6)}_S, (5). \end{aligned}$$

Ist sodann  $\delta \Omega > 0$  auf  $P_D^0$ , so bleibt

$$\delta J^0 = \int_{P_D^0} \{v^2 - (\psi_x^0)^2 - (\psi_y^0)^2\} \delta \Omega^0 dx$$

übrig und aus  $\delta J^0 \geq 0$  folgt (6)<sub>D</sub>:

$$v^2 - (\psi_x^0)^2 - (\psi_y^0)^2 \geq 0 \text{ auf } P_D^0.$$

#### 1. 5. Die Lösung des Randwertproblems löst das Minimumproblem.

Satz 2: Erfüllt die zulässige Funktion  $\psi^0(x, y)$  im zulässigen Gebiet  $\Gamma^0$  die Bedingungen der Randwertaufgabe, so gilt für jede zulässige Funktion  $\psi(x, y)$  im zulässigen Gebiet  $\Gamma$

$$J[\psi, \Gamma] > J[\psi^0, \Gamma^0],$$

außer wenn  $\Gamma = \Gamma^0$  und  $\psi = \psi^0$ .

Diese Tatsache begründen wir darauf, daß die erste Variation von  $J$ , für die Lösung  $\Gamma^0$ ,  $\psi^0$  der Randwertaufgabe genommen, nicht negativ ist, während die zweite Variation für jedes zulässige  $\Gamma$ ,  $\psi$  positiv ist.

Zum Beweis dieses positiven Charakters werden wir  $\Gamma^0$ ,  $\psi^0$  und  $\Gamma$ ,  $\psi$  in eine zulässige Schar  $\Gamma^s$ ,  $\psi^s$  einbetten; das kann auf verschiedene Weise geschehen und nicht in jedem Falle wird die Positivität evident; wir kommen aber zum Ziel, wenn wir diese Einbettung auf dem ein-

fachsten sich darbietenden Wege vollziehen. Wir transformieren das variable Gebiet auf ein festes Gebiet, und zwar, indem wir  $x$  und  $\psi$  als unabhängige,  $y$  als abhängige Veränderliche einführen; wegen der Randbedingungen für  $\psi$  (insbesondere  $\psi = 1$  auf  $P$ ) entsteht dann nämlich ein festes Rechteck der  $(x, \psi)$ -Ebene. Daß der quadratische Charakter des Integranden und der lineare Charakter der durch Variation entstehenden Gleichungen verloren geht, scheint unvermeidlich zu sein.

Das neue Gebiet  $G$  im Bereich der Variablen  $x, \psi$  ist das Rechteck

$$G: a_1 \leq x \leq a, \quad 0 \leq \psi \leq 1;$$

dem Rande  $P$  entspricht

$$R: a_1 \leq x \leq a, \quad \psi = 1.$$

Im übrigen mögen Gebiet, Kurven, Punkte bei der Abbildung ihre Namen behalten.

Wegen  $\psi_y > 0$  in  $I$ , der Bedingung (4), kann die Gleichung  $\psi = \psi(x, y)$  durch eine Funktion  $y = y(x, \psi)$  aufgelöst werden. Es ist

$$\psi_y = \frac{1}{y_\psi}, \quad \psi_x = -\frac{y_x}{y_\psi},$$

$$\psi_{xx} = -\left(\frac{y_x}{y_\psi}\right)_x + \left(\frac{y_x}{y_\psi}\right)_\psi \frac{y_x}{y_\psi}, \quad \psi_{yy} = \left(\frac{1}{y_\psi}\right)_\psi \frac{1}{y_\psi}$$

und das Integral (9) geht über in

$$\mathcal{J}[y] = \iint_G \left[ \frac{y_x^2 + 1}{y_\psi} + v^2 y_\psi \right] dx d\psi.$$

Jeder Funktion vom Typ  $[\psi_1]$  in einem Gebiet  $[I]$  entspricht eine Funktion  $y(x, \psi)$  in  $G$ , die zweimal im Inneren, einmal am Rande von  $G$  stetig differenzierbar ist und ferner den folgenden Bedingungen genügt:

$$(1) \quad Y(x) \leq y(x, 1) \text{ auf } R.$$

$$(3) \quad y(x, 0) = 0 \text{ auf } A.$$

$$(4) \quad y_\psi > 0 \text{ in } G.$$

Eine solche —  $[y_1]$  genannte — Funktion  $y(x, \psi)$  führt auch stets zu einer Funktion  $[\psi_1]$  in einem Gebiet  $[I]$ .

Der Lösung der Randwertaufgabe  $\psi = \psi^0(x, y)$  in  $I^0$  möge die Funktion  $y^0(x, \psi)$  entsprechen. Sie genügt den Relationen

$$(5) \quad y_x^0 = 0 \quad \text{für } x = a_1, x = a.$$

$$(6)_S \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{y_x^0}{y_\psi^0}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_\psi^0}\right)^2 - v^2 = 0 \quad \text{auf } P_S^0, \\ \left(\frac{y_x^0}{y_\psi^0}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_\psi^0}\right)^2 - v^2 \leq 0 \quad \text{auf } P_D^0. \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \tilde{A} y^0 = -\left(\frac{y_x^0}{y_\psi^0}\right)_x + \left(\frac{y_x^0}{y_\psi^0}\right)_\psi \left(\frac{y_x^0}{y_\psi^0}\right) + \left(\frac{1}{y_\psi^0}\right)_\psi \frac{1}{y_\psi^0} = 0.$$

Es sei nun  $y^1(x, \psi)$  irgendeine Funktion der Art  $[y]$ . Wir bilden dann

$$\delta y(x, \psi) = y^1(x, \psi) - y^0(x, \psi)$$

und die Schar von Funktionen

$$(8) \quad y^\varepsilon(x, \psi) = y^0(x, \psi) + \varepsilon \delta y(x, \psi).$$

Jede dieser Funktionen ist auch vom Typ  $[y]$  für  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ; man beachte insbesondere, daß für solche  $\varepsilon$  die Ungleichungen (1), (4) erfüllt sind. Wir berechnen nun  $\bar{J}[y^\varepsilon]$  für  $\varepsilon = 1$  durch Entwicklung um  $\varepsilon = 0$ :

$$(9) \quad \bar{J}[y^1] = \bar{J}[y^0] + \delta \bar{J}[y^0] + \int_0^1 (1 - \varepsilon) \delta^2 \bar{J}[y^\varepsilon] d\varepsilon.$$

Dabei ist

$$\delta \bar{J}[y^\varepsilon] = \frac{d}{d\varepsilon} \bar{J}[y^\varepsilon], \quad \delta^2 \bar{J}[y^\varepsilon] = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \bar{J}[y^\varepsilon].$$

Wir berechnen zunächst

$$(10) \quad \delta \bar{J}[y] = \iint_G \left\{ \frac{2y_x}{y_\psi} \delta y_x - \frac{y_x^2}{y_\psi^2} \delta y_\psi - \frac{1}{y_\psi^3} \delta y_\psi + v^2 \delta y_\psi \right\} dx d\psi \\ = -2 \iint_G \bar{A} y \delta y dx d\psi + \int_R \left\{ -\frac{y_x^2}{y_\psi^3} - \frac{1}{y_\psi^3} + v^2 \right\} \delta y dx + 2 \left[ \int_0^1 \frac{y_x}{y_\psi} \delta y d\psi \right]_{a_1},$$

wobei der von  $A$  herrührende Anteil wegen (3) fortfällt.

Für  $y = y^0(x, \psi)$  fällt wegen  $\bar{A} y^0 = 0$  das Flächenintegral fort und ebenso die von  $x = a_1$ ,  $a$  und  $P_s$  herrührenden Anteile der Randintegrale wegen (5), (6)<sub>s</sub>. Auf  $P_D^0$  ist  $y^0(x, 1) = Y(x)$  und also wegen (1)  $\delta y \geq 0$ . Unter Berücksichtigung von (6)<sub>D</sub> folgt dann

$$(11) \quad \delta \bar{J}[y^0] \geq 0.$$

Sodann berechnet man die zweite Variation

$$(12) \quad \delta^2 \bar{J}[y] = 2 \iint_G \frac{1}{y_\psi^3} \{ (y_\psi d y_x - y_x \delta y_\psi)^2 + \delta y_\psi^2 \} dx d\psi.$$

Ohne weiteres nimmt sie eine Gestalt an, die ihren positiven Charakter erkennen läßt.

Es ist also für jede zugelassene Funktion  $y$  und jede Variation  $\delta y$

$$\delta^2 \bar{J}[y] > 0,$$

außer, wenn  $\delta y = 0$  ist. Es ist also insbesondere

$$(13) \quad \int_0^1 (1 - \varepsilon) \delta^2 \bar{J}[y^\varepsilon] d\varepsilon > 0$$

außer, wenn  $y^1 = y^0$  ist.



Der überall definierten und stetig differenzierbaren Funktion  $\Omega(x)$  sei die untere Schranke  $y = Y(x)$  gestellt;  $Y(x)$  sei stetig differenzierbar und es gelte

$$Y(x) \rightarrow b_1, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Ferner sei für  $\Omega(x)$  die Bedingung

$$(1)_\infty \quad \Omega(x) \rightarrow b, \quad x \rightarrow +\infty$$

gestellt.

Die Zu- und Abflußbreiten  $b_1$  und  $b$  sind mit den Zu- und Abflußgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v$  gekoppelt vermöge

$$b_1 v_1 = b v = 1.$$

Das Gebiet  $\Gamma$  und der Rand  $P$  werde durch eine Gerade  $x = a_1$  in einen festen und einen variablen Teil gespalten,

$$\Gamma = G_1 + \Gamma_2, \quad P = R_1 + P_2.$$

Für  $\Omega(x)$  werden die Bedingungen gestellt:

$$(1)_1 \quad Y(x) = \Omega(x) \quad \text{für } x \leq a_2, \text{ d. h. auf } R_1.$$

$$(1)_2 \quad Y(x) \leq \Omega(x) \quad \text{für } x \geq a_2, \text{ d. h. auf } P_2.$$

Ferner werde  $P_2$  in das „Mundstück“  $P_D$  und den Strahlrand  $P_S$  geteilt vermöge

$$\begin{aligned} P_D: & \quad y = \Omega(x) = Y(x) \\ P_S: & \quad y = \Omega(x) > Y(x) \end{aligned} \quad x \geq a_2.$$

Gebiete dieser Art heißen vom Typ  $[\Gamma]^*$ ; durch Geraden  $x = -a^*$  und  $x = a^*$  werden aus ihnen Teilgebiete  $\Gamma^*$  vom Typ  $[\Gamma]$  herausgeschnitten.

Von den Funktionen  $\psi$  sei verlangt, daß sie in jedem Teilgebiet  $\Gamma^*$  zum Typ  $[\psi_1]$  gehören; ferner möge es zwei positive Schranken geben, zwischen denen die Werte der Horizontalgeschwindigkeit  $\psi_x$  im ganzen Gebiet  $\Gamma$  liegen, schließlich soll für sie der Variationsausdruck

$$J[\psi, \Gamma] = \iint_{G_1} \{ \psi_x^2 + (\psi_y - v_1)^2 \} dx dy + \iint_{\Gamma_2} \{ \psi_x^2 + (\psi_y - v)^2 \} dx dy$$

existieren.  $\psi$  sei dann als  $[\psi_1]^\infty$  bezeichnet.

Funktionen  $[\psi_1]^\infty$  in Gebieten  $[\Gamma]^\infty$  seien zum Problem  $[1]^\infty$  zugelassen.

Die Randwertaufgabe ist dann durch dieselben Bedingungen wie bei  $[1]$  mit Ausnahme von (5) gekennzeichnet.

Das Minimumproblem besteht in der Aufgabe, für zulässige  $\psi$  und  $\Gamma$  das Integral  $J[\psi, \Gamma]$  möglichst klein zu machen.

Die Sätze 1, 2, 3 gelten auch hier; sie sind wörtlich zu übertragen.



Die *Beweise* dieser Sätze sind ebenfalls sinngemäß zu übertragen; einige Abänderungen erfordern nur die Schlüsse, die sich an die Formel (9) anschließen.

Es empfiehlt sich, vorerst das Integral  $\bar{J}$  über endliche Rechtecke  $G^*$  — durch  $-a^* \leq x \leq a^*$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$  gekennzeichnet — zu erstrecken. Wir setzen

$$\begin{aligned}\bar{J}^*[y] &= \iint_{G_1^*} \left\{ \frac{y_x^2 + (1 - v_1 y_\psi)^2}{y_\psi} \right\} dx d\psi + \iint_{G_2^*} \left\{ \frac{y_x^2 + (1 - v y_\psi)^2}{y_\psi} \right\} dx d\psi \\ &= \iint_{G^*} \left\{ \frac{y_x^2 + 1}{y_\psi} + v_1 y_\psi \right\} dx d\psi + (v_1^2 - v^2) \iint_{G_1^*} dy dx \\ &\quad - 2v_1 \iint_{G_1^*} dx d\psi - 2v \iint_{G_2^*} dx d\psi.\end{aligned}$$

Nun hängen die Gebiete  $G_1^*$ ,  $G_2^*$  der  $(x, \psi)$ -Ebene, und auch das Gebiet  $G_1^*$  der  $x, y$ -Ebene nicht von der Wahl der Funktion  $y(x, \psi)$  ab, also auch nicht die drei letzten Integrale. Die erste Variation  $\delta \bar{J}^*[y^0]$  erhält nach partieller Integration, von den Seitenlinien von  $G^*$  herrührend, das Zusatzglied

$$Z^* = \left[ \int_0^1 \frac{y_x^0}{y_\psi^0} \delta y dx \right]_{-a^*}^{a^*},$$

das aber für eine geeignet ins unendliche wachsende Folge  $a^*$  verschwindet.

Es ist nämlich  $|\delta y| = \left| \int_0^\psi \delta y_\psi d\psi \right| \leq \int_0^1 |\delta y_\psi| d\psi$  und also

$$|Z^*| \leq 2 \left[ \int_0^1 \left\{ \left( \frac{y_x^0}{y_\psi^0} \right)^2 + \delta y_\psi^2 \right\} d\psi \right]_{-a^*}^{a^*};$$

nun bleibt aber — nach Annahme —  $y_\psi$  zwischen positiven Schranken und demnach folgt aus der Existenz der Integrale  $\bar{J}[y]$ ,  $\bar{J}[y^0]$  die Existenz von

$$\iint_G \left\{ \left( \frac{y_x^0}{y_\psi^0} \right)^2 + \delta y_\psi^2 \right\} dx d\psi;$$

also gibt es eine Folge  $a^* \rightarrow \infty$ , für welche  $|Z^*| \rightarrow 0$  strebt.

Danach folgt genau wie vorher

$$\bar{J}[y] > \bar{J}[y^0]$$

außer für  $y = y^0$ .

### 3. Andere Begrenzungen.

Es sei kurz angemerkt, daß an Stelle des bisher gewählten Falles der äußeren Ablösung von einer Düse auch allgemeinere Typen von Begrenzungen unserer Behandlung zugänglich sind. An Stelle einer Düse  $D$  mögen zwei Grenzen  $D_i, D_a$  vorgegeben sein.

$$D_i: y = Y_i(x),$$

$$D_a: y = Y_a(x).$$

Der Rand  $P: y = \Omega(x)$  möge sich von  $D_i$  nach außen, von  $D_a$  nach innen ablösen; diese Forderung ist enthalten in:

$$(1) \quad Y_i(x) \leq \Omega(x) \leq Y_a(x).$$

Überdies sei der Rand  $P$  gezwungen, sich Teilen  $F_i$  und  $F_a$  der Grenzen  $D_i$  und  $D_a$  anzulegen.

$$(1)_i \quad \Omega(x) = Y_i(x) \text{ auf } F_i,$$

$$(1)_a \quad \Omega(x) = Y_a(x) \text{ auf } F_a.$$

Diejenigen Teile von  $D_i$  und  $D_a$ , denen sich  $P$  ungezwungen anlegt, mögen  $P_i, P_a$ , der freie Rand möge  $P_s$  heißen. Dann ist der gesamte Rand  $P$  in fünf Teile zerlegt, auf denen gilt:

$$\Omega(x) = Y_i(x) \text{ auf } F_i + P_i,$$

$$\Omega(x) = Y_a(x) \text{ auf } F_a + P_a,$$

$$Y_i(x) < \Omega(x) < Y_a(x) \text{ auf } S.$$

*Randwert- und Minimumproblem*, ebenso wie die Sätze 1, 2, 3, lassen sich ohne weiteres übertragen. Zu bemerken ist nur, daß an Stelle der Ungleichung (6)<sub>D</sub> die Ungleichungen

$$(6)_i \quad (\psi_z^0)^2 + (\psi_y^0)^2 \leq v^2 \text{ auf } P_i^0,$$

$$(6)_a \quad (\psi_z^0)^2 + (\psi_y^0)^2 \geq v^2 \text{ auf } P_a^0$$

auftreten, während für  $F_i$  und  $F_a$  keine weitere Randbedingung entspringt.

Der Fall konvexer Düse mit innerer Ablösung ist für  $Y_i(x) = 0$  in diesem allgemeinen Fall mit enthalten.

### 4. Räumlich achsensymmetrische Strömung.

Die Minimumeigenschaft ermöglicht, auch solche Strahlprobleme aufzufassen, die nicht zur Potentialgleichung mit zwei Veränderlichen führen. Das sei für die räumliche achsensymmetrische Ausflußströmung [2] gezeigt.

Es sei die Drehachse zur  $x$ -Achse gewählt; als zweite Veränderliche führen wir  $y = \frac{1}{2}r^2$  an Stelle des senkrechten Abstandes  $r$  von der Drehachse ein. Das zulässige Gebiet  $\Gamma$  der  $(x, y)$ -Ebene, aus dem durch Drehung das Strömungsgebiet entsteht, sei vom Typ  $[\Gamma]$ .

Die Menge, die durch die Kreisscheibe vom Radius  $r$  hindurchfließt, sei  $2\pi\psi$ ; wir fassen  $\psi$  als Funktion  $\psi(x, y)$  von  $x$  und  $y$  im Gebiet  $\Gamma$  auf.

Zulässige  $\psi = [\psi_2]$  genannt — sollen dann solche Funktionen  $[\psi_1]$  sein, für welche der neue Variationsausdruck

$$J[\psi, \Gamma] = \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2y} \psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2 \right\} dx dy$$

existiert.

Der obige Ansatz für  $J[\psi, \Gamma]$  motiviert sich daraus, daß nunmehr

$$\psi_y \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\sqrt{2y}} \psi_x$$

Axial- und Radialkomponente der Geschwindigkeit sind.

Das *Minimumproblem* lautet: Durch Wahl zulässiger  $\psi$  und  $\Gamma$  ist  $J[\psi, \Gamma]$  möglichst klein zu machen.

In der *Randwertaufgabe* sind die Bedingungen (6), (7) zu ersetzen durch

$$(6) \quad \frac{1}{2y} (\psi_x^0)^2 + (\psi_y^0)^2 - v^2 \begin{cases} = 0 & \text{auf } P_S^0 \\ \leq 0 & \text{auf } P_D^0. \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{1}{2y} \psi_{xx}^0 + \psi_{yy}^0 = 0 \quad \text{in } \Gamma^{0'}.$$

Die Sätze 1, 2, 3 übertragen sich wörtlich.

Bei der Übertragung der *Beweise* sind neu zu behandeln nur die Randglieder bei der ersten Variation und vor allem der Nachweis, daß die zweite Variation positiv ist.

Zu dem Zweck führen wir zunächst wieder  $x, \psi$  als neue Variable,  $y(x, \psi)$  als neue Funktion ein. Der Variationsausdruck geht dann über in

$$\tilde{J}[y] = \iint_G \left\{ \frac{y_x^2}{2y y_\psi} + \frac{1}{y_\psi} \right\} dx dy + v^2 \int_R y dx.$$

Es liegt nun nahe, aus der Lösung  $y^0(x, \psi)$  der Randwertaufgabe und einer anderen zulässigen Funktion  $y^1(x, \psi)$  die Schar

$$y^0 + \varepsilon(y^1 - y^0)$$

zu bilden und die Variationen zu berechnen; es zeigt sich aber, daß dann der Integrand der zweiten Variation keine positiv-definite Form in  $\delta y, \delta y_x, \delta y_\psi$  ist. Merkwürdigerweise gelangt man hier zum Ziel, wenn man

$$x = \ln y$$

als neue Funktion einführt und diese additiv variiert. Das Integral  $\tilde{J}$  geht dabei über in

$$\tilde{J}[\kappa] = \iint_G \left( \frac{1}{2} \frac{\kappa_x^2}{\kappa_\psi} + \frac{e^{-x}}{\kappa_\psi} \right) dx d\psi + v^2 \int_R e^x d\psi.$$

Die erste Variation wird:

$$\delta \tilde{J}[\kappa] = \iint_G \left\{ -\frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} \delta \kappa_\psi + \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} \right)^2 \delta \kappa_\psi - \frac{e^{-x}}{\kappa_\psi} \delta \kappa - \frac{e^{-x}}{\kappa_\psi^2} \delta \kappa_\psi \right\} dx d\psi \\ + v^2 \int_R e^x \delta \kappa dx.$$

Die zweite Variation nimmt die Gestalt

$$\delta^2 \tilde{J}[\kappa] = \iint_G \left\{ \frac{1}{\kappa_\psi} \left( \delta \kappa_x^2 - 2 \frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} \delta \kappa_x \delta \kappa_\psi + \left( \frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} \right)^2 \delta \kappa_\psi^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-x}}{\kappa_\psi} \left( \delta \kappa_x^2 + \frac{2}{\kappa_\psi} \delta \kappa \delta \kappa_\psi + \frac{2}{\kappa_\psi^2} \delta \kappa_\psi^2 \right) \right\} dx d\psi \\ + v^2 \int_R e^x d\kappa^2 dx$$

an; sie ist in der Tat positiv und Null nur für  $\delta \kappa = 0$ . Um nun hieraus die Ungleichung

$$\tilde{J}[\kappa] > \tilde{J}[\kappa^0] \quad \text{für} \quad \kappa \neq \kappa_0,$$

herzuleiten, wo  $\kappa^0$  die Lösung der Randwertaufgabe,  $\kappa = \kappa^1$  eine beliebige zugelassene Funktion ist, müssen wir genauer folgendermaßen schließen.

Zunächst ist festzustellen, wie sich  $\kappa, \kappa_\psi, \kappa_x$  verhält, wenn  $\psi$  bei festem  $x$  gegen Null strebt. Wir benutzen dabei die Stetigkeit der Ableitungen  $\psi_x, \psi_\psi$ , die Randbedingung  $\psi(x, 0) = 0$  und  $\psi_\psi < 0$ ; es folgt so die Stetigkeit von  $\frac{e^{-x}}{\kappa_\psi} = \psi_\psi = \frac{1}{y_\psi}$ , von  $e^x \kappa_\psi = y_\psi$  und von  $\frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} = -\psi_x$ ; ferner gleichmäßig in  $x$   $e^x \rightarrow 0$  und  $\frac{\kappa_x}{\kappa_\psi} \rightarrow 0$  für  $\psi \rightarrow 0$ . Aus der Existenz von  $\tilde{J}[\kappa]$  folgt die Integrierbarkeit von  $\frac{\kappa_x^2}{\kappa_\psi}$  und also auch von  $e^x \kappa_x^2$ .

Eine Funktion  $\kappa$ , die diese Eigenschaften besitzt, führt auch immer auf eine Funktion  $y(x, \psi)$  bzw.  $\psi(x, y)$ , die sich auf der Achse so verhält, wie es zur Zulassung nötig ist.

Es folgt danach auch, daß die

$$\kappa^\varepsilon = \kappa^0 + \varepsilon \delta \kappa \quad \text{mit} \quad \delta \kappa = \kappa^1 - \kappa^0 \quad [0 \leq \varepsilon \leq 1]$$

zulässig sind, wenn es die  $\kappa^0, \kappa^1$  sind; es ist dann nämlich

$$y^\varepsilon = y^0 \left( \frac{y^1}{y^0} \right)^\varepsilon$$

und es bleibt  $y^1/y^0$  ebenso wie  $y^0/y^1$  stetig und positiv bei  $\psi \rightarrow 0$ ; abgesehen von dem zulässigen Verhalten auf der Achse beachte man noch, daß

$$y_\psi^e = (1 - \varepsilon) y_\psi^0 \left( \frac{y^1}{y^0} \right)^e + \varepsilon y_\psi^e \left( \frac{y^0}{y^1} \right)^{1-e} > 0$$

ist.

Ferner folgt aus  $y^1/y^0 \geq 1$  auf  $P_D^0$ ,

$$\delta x \geq 0 \quad \text{auf } P_D^0.$$

Es sei nun — entsprechend dem Vorgehen im zweiten Abschnitt — aus dem Gebiet  $G$  durch die Bedingung  $\tau \leq \psi \leq 1$  das Gebiet  $G_\tau$  herausgeschnitten; nach partieller Umformung der ersten Variation entsteht auf der Geraden  $\psi = \tau$  das Randglied

$$Z^\tau = \int_{\psi=\tau} \left\{ \frac{x_x^0}{x_\psi^0} + \frac{1}{2} \left( \frac{x_x^0}{x_\psi^0} \right)^2 - \left( \frac{x_x^0}{x_\psi^0} \right)^2 e^{x^0} \right\} \delta x \, dx,$$

dessen Integrand nach oben angegebenen Eigenschaften gleichmäßig in  $x$  mit  $\psi \rightarrow 0$  verschwindet. Alsdann folgert man wie früher  $\delta \tilde{J}[x^0] \geq 0$  und wegen  $\delta^2 \tilde{J}[x] > 0$  auch  $\tilde{J}[x] > \tilde{J}[x^0]$ , außer für  $\delta x = 0$ .

Auch die achsensymmetrische räumliche Strömung mit *unendlicher Düse* und *unendlichem Strahl* ist als Minimumproblem anzusetzen.

Man hat Gebiete  $[I]^\infty$  zuzulassen, und Funktionen  $\psi$ , die in jedem endlichen Teilgebiet  $I^*$  zum Typ  $[\psi_2]$  gehören, für die  $\psi_v$  in  $I$  zwischen positiven Grenzen bleibt und für welche der Variationsausdruck

$$J[\psi, I] = \iint_{G_1} \left\{ \frac{1}{2} \psi_x^2 + (\psi_v - v_1)^2 \right\} dx \, dy + \iint_{I_2} \left\{ \frac{1}{2} \psi_x^2 + (\psi_v - v^2) \right\} dx \, dy$$

existiert. Randwertaufgabe und Sätze 1., 2., 3. übertragen sich. Bei den Beweisen hat man zunächst Integrationsgebiete  $I^*$  heranzuziehen und in ihnen die Umformungen wie bei [2] zu begründen, alsdann wie bei  $[1]^\infty$  den Übergang zu unendlichem Gebiet zu vollziehen.

## Anhang.

### I. Das Minimumproblem bei beliebigem konvexen Integranden

$$F(\psi_x, \psi_v).$$

Anhangsweise sei auf einen allgemeinen Satz der Variationsrechnung aufmerksam gemacht, der im wesentlichen folgendes besagt:

Führt ein Variationsproblem, dessen Integrand nur von den Ableitungen der variablen Funktion von zwei Veränderlichen abhängt, bei festem Gebiet zu einem Minimum, so auch, wenn ein Teil des Randes —

auf dem für die variable Funktion ein konstanter Wert vorgeschrieben ist — (bis auf Grenzkurven) freigelassen wird.

Das Strahlproblem [1] erscheint so als ein Sonderfall; und die Minimaleigenschaft hängt nicht an dem linearen Charakter der Differentialgleichung. Offen bleibt noch, ob ein solcher Satz auch für einfache allgemeinere Klassen von Variationsproblemen gilt, deren Integranden noch die Funktion oder die unabhängigen Veränderlichen enthalten dürfen, wie beim Minimumproblem [2] des achsensymmetrischen Strahls.

Sei  $F(p, q)$  eine — für alle  $p, q$  — zweimal stetig differenzierbare Funktion, für welche die Form der zweiten Variation positiv ist in den  $\delta p, \delta q$  für jedes  $p, q$ .

Es sei dann das *Minimum* von

$$J[\psi, \Gamma] = \iint_{\Gamma} F(\psi_x, \psi_y) dx dy$$

gesucht, durch Wahl von Gebieten  $\Gamma$  und von Funktionen  $\psi(x, y)$  vom Typ  $[\Gamma]$  und  $[\psi]$ .

Die zugehörige *Randwertaufgabe* verlangt für zulässiges  $\Gamma = \Gamma^0$  und  $\psi = \psi^0$

$$(5) \quad F_p^0 = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma_1, \Sigma_2$$

$$(6) \quad F^0 - F_p^0 \psi_x^0 - F_q^0 \psi_y^0 \begin{cases} = 0 & \text{auf} \quad P_S^0, \\ \geq 0 & \text{auf} \quad P_D^0, \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} F_p^0 + \frac{\partial}{\partial y} F_q^0 = 0 \quad \text{in} \quad \Gamma^0.$$

Dabei ist durch Index gekennzeichnet, daß in  $F, F_p, F_q$  als Argumente  $p = \psi_x^0$  und  $q = \psi_y^0$  zu wählen sind.

Es gelten dann in wörtlicher Übertragung die *Sätze* 1, 2, 3, durch die die obige vorläufige Formulierung präzisiert wird.

Bei den *Beweisen* ist nur noch neu zu begründen, daß die zweite Variation von  $J[\psi, \Gamma]$  für jedes  $\psi$  positiv ist.

Das gelingt, wie beim Problem [1], wenn man  $y = y(x, \psi)$  als neue variable Funktion einführt. Das Integral  $J[\psi, \Gamma]$  geht dann über in das über das feste Gebiet  $G$  erstreckte Integral

$$J[y] = \int_G F\left(-\frac{y_x}{y_\psi}, \frac{1}{y_\psi}\right) y_\psi dx d\psi.$$

Nun genügt es, zu zeigen, daß die Form der zweiten Variation des neuen Integranden positiv definit ist. Es handelt sich also um das folgende allgemeine Lemma über eine Funktion von zwei Veränderlichen.

Für die (zweimal stetig differenzierbare) Funktion  $F(p, q)$  sei für jedes  $p, q$  die Form

$$F''[\delta p, \delta q] = F_{pp} \delta p^2 + 2 F_{pq} \delta p \delta q + F_{qq} \delta q^2$$

positiv definit; dann ist für die Funktion

$$\Phi(\pi, \kappa) = \kappa F\left(-\frac{\pi}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}\right)$$

ebenfalls die Form

$$\Phi''[\delta \pi, \delta \kappa] = \Phi_{\pi\pi} \delta \pi^2 + 2 \Phi_{\pi\kappa} \delta \pi \delta \kappa + \Phi_{\kappa\kappa} \delta \kappa^2$$

positiv definit für  $\kappa > 0$ .

In der Tat berechnet man mit  $p = -\frac{\pi}{\kappa}$ ,  $q = \frac{1}{\kappa}$

$$\delta \Phi = \kappa (F_p \delta p + F_q \delta q) + F \delta \kappa,$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \Phi &= \kappa F''[\delta p, \delta q] + F_p (\delta^2 p + 2 \delta p \delta \kappa) \\ &\quad + F_q (\delta^2 q + 2 \delta q \delta \kappa) + F \delta^2 \kappa. \end{aligned}$$

Für  $\delta^2 \pi = \delta^2 \kappa = 0$  gilt aber

$$\delta^2 \Phi = \Phi''[\delta \pi, \delta \kappa]$$

und

$$\delta^2 p + 2 \delta p \delta \kappa = \delta^2 (p \kappa) = 0,$$

$$\delta^2 q + 2 \delta q \delta \kappa = \delta^2 (q \kappa) = 0.$$

Damit folgt

$$\Phi''[\delta \pi, \delta \kappa] = \kappa F''[\delta p, \delta q].$$

## II. Eindeutigkeit gegenüber infinitesimaler Variation.

Unser Minimumproblem bietet auch einen neuen Zugang zur Untersuchung der infinitesimalen Eindeutigkeit der Strömungsrandwertaufgabe (II), die für Weinstein [1] das entscheidende Hilfsmittel bei der Untersuchung der Einzigkeit und Existenz der Lösung des Problems I bildet (vgl. Einleitung).

Diese infinitesimale Eindeutigkeit wurde von Weinstein [1], Hamel [1] und Weyl [2] unter verschiedenen Bedingungen für die Düsegestalt bewiesen; und zwar auf Grund der Tatsache, daß die Variation der Stromfunktion einen gewissen quadratischen Integralausdruck  $D$  zu Null macht, der andererseits mittels Abschätzungen als positiv definit erkannt wird.

Dieser Ausdruck  $D$  ist nun gerade die halbe zweite Variation unseres Variationsausdruckes  $J$ , für die Lösung genommen. Dieser Zusammenhang legt ein Verfahren nahe, den positiven Charakter auch ohne Ab-



schätzungen zu beweisen. Und zwar ist dieses Verfahren (im wesentlichen) nichts anderes, als ein von Jacobi für solche Zwecke angegebenes Prinzip.

Zunächst seien einige Relationen über die *Strahlrandkrümmung* angemerkt.

Es sei  $\varphi(x, y)$  eine Funktion, welche auf einer Kurve  $P_S: y = \Omega(x)$  zweimal stetig differenzierbar ist und den Relationen

$$\varphi = 1$$

genügt. Dann folgt aus

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0,$$

$$(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2})_x dx + (\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2})_y dy = 0$$

die Existenz eines Faktors  $\kappa(x)$ , so daß

$$(*) \quad (\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2})_x = \kappa \varphi_x, \quad (\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2})_y = \kappa \varphi_y$$

wird; ferner gilt, wenn mit  $\frac{\partial}{\partial n}$  Differentiation nach einer Normalen bezeichnet wird,

$$(\ddagger) \quad \varphi_n = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \varphi_s = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \frac{\partial y}{\partial n}$$

und hieraus

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi_x = \kappa \varphi_x, \quad \frac{\partial}{\partial n} \varphi_y = \kappa \varphi_y.$$

Wird eine beliebige Geschwindigkeitskomponente  $u = \mu \varphi_y - \nu \varphi_x$  mit konstantem  $\mu, \nu$  eingeführt, so gilt

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa u = 0.$$

Der Faktor  $\kappa$  ist übrigens die Krümmung von  $P_S$ .

Um nun den Begriff der *infinitesimalen Variation* zu erklären, gehe man aus von einer Schar  $\varphi^\alpha(x, y)$  von Lösungen der Randwertaufgabe in Gebieten  $\Gamma^\alpha$  mit der Randfunktion  $\Omega^\alpha(x)$ ; dann bilde man — den oberen Index 0 lassen wir fort —

$$\delta \varphi(x, y) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(x, y) \right|_{\alpha=0}, \quad \delta \Omega(x, y) = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}(x, y) \right|_{\alpha=0}.$$

Aus den Randbedingungen für  $\varphi^\alpha(x, y)$  erhält man durch Differentiation nach  $\alpha$

$$\delta \varphi + \varphi_s \delta \Omega = 0 \quad \text{auf } P,$$

$$\delta \varphi = 0 \quad \text{auf } P_D,$$

$$\varphi_x \delta \varphi_x + \varphi_y \delta \varphi_y + \frac{1}{2}[(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2] \delta \Omega = 0 \quad \text{auf } P_S,$$

oder, indem man die Formeln (\*), (\*\*) verwendet,

$$\frac{\partial}{\partial n} \delta \psi - \kappa \delta \psi = 0 \quad \text{auf } P_s.$$

Schließlich ergibt sich für  $\delta \psi$  die Potentialgleichung

$$\delta \psi_{xx} + \delta \psi_{yy} = 0 \quad \text{in } \Gamma'.$$

So gelangen wir zu folgender *Formulierung* des Begriffes der *infinitesimalen Variation*, bei der wir uns auf das Problem [1] beschränken.

Es sei  $\psi$  in  $\Gamma$  Lösung der Randwertaufgabe des Problems [1]. Überdies soll  $\psi$  auch auf der Begrenzung von  $\Gamma$  zweimal stetig differenzierbar sein, außer an den Ablösungsstellen, wo die zweiten Ableitungen von geringerer als erster Ordnung unendlich werden dürfen<sup>7)</sup>. Auf dem Strahlrand  $P'_s$  sei die Krümmung  $\kappa$  erklärt durch

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi_y - \kappa \psi_y = 0.$$

Es sei  $\delta \psi(x, y)$  in  $\Gamma$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$\delta \psi$  ist stetig und stetig differenzierbar in  $\Gamma$ , außer an den Ablösungsstellen, wo  $\delta \psi_x, \delta \psi_y$  von geringerer als erster Ordnung unendlich werden können<sup>8)</sup>; es sei  $\delta \psi$  in  $\Gamma'$  zweimal stetig differenzierbar und erfülle die Bedingungen

$$\begin{aligned} \delta \psi_{xx} + \delta \psi_{yy} &= 0 \quad \text{in } \Gamma', \\ \delta \psi &= 0 \quad \text{auf } P_D, A, \\ \frac{\partial}{\partial n} \delta \psi - \kappa \delta \psi &= 0 \quad \text{auf } P'_s, \\ \delta \psi_x &= 0 \quad \text{auf } \Sigma_1, \Sigma. \end{aligned}$$

$\left[ \frac{\partial}{\partial n} \right]$  Ableitung nach der äußeren Normalen.]

Dann ist  $\delta \psi$  eine infinitesimale Variation von  $\psi$  in  $\Gamma$ .

Der infinitesimale *Eindeutigkeitssatz* lautet

Satz 4.

$$\delta \psi = 0 \quad \text{in } \Gamma.$$

Der *Beweis* geht mit Weinstein von der Tatsache aus, daß für die infinitesimale Variation  $\delta \psi$

$$D[\delta \psi] = \iint_{\Gamma'} (\delta \psi_x^2 + \delta \psi_y^2) dx dy - \int_{P'_s} \kappa \delta \psi^2 ds = 0$$

<sup>7)</sup> Man darf annehmen, daß diese Bedingungen erfüllt sind, wenn  $\Gamma''$  stetig existiert. Übrigens benutzen wir wesentlich die Existenz der zweiten Ableitungen von  $\psi$  nur auf dem Strahlrand  $P'_s$ .

<sup>8)</sup> Man könnte zeigen, daß die Ordnung  $1/2$  ist, wie das bei Weyl explizite auftritt.

ist, wie aus den Bedingungen für  $\delta \psi$  durch bekannte Greensche Umformung folgt; andererseits ist für jede Funktion  $\delta \psi$  dieses Integral positiv und nur Null für  $\delta \psi = 0$ . Das Prinzip von Jacobi, das wir an Stelle der Abschätzungen von Weinstein, Weyl und Hamel zum Beweise hierfür verwenden, lautet — bis auf jeweilige Präzisierung für einzelne Fälle —:

**Prinzip von Jacobi.** Ein quadratisch homogener Integralausdruck erster Ordnung ist positiv definit, wenn es eine Funktion gibt, die der zugehörigen linearen Differentialgleichung und den zugehörigen natürlichen Randbedingungen genügt und die im Integrationsgebiet nicht verschwindet.

In unserem Fall ist eine solche Funktion leicht zu finden: die Horizontalgeschwindigkeit  $u = \psi_y$ ! In der Tat gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } \Gamma', \quad u_x = 0 \text{ auf } \Sigma_1, \Sigma,$$

und auch  $\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa u = 0$  auf  $P_S$  ist erfüllt. Das ist aber auch von vornherein zu erwarten; denn die Verschiebung der Strömung in  $y$ -Richtung stellt eine Variation dar, bei der nur die „festen Randbedingungen“  $\psi = 1$  auf  $P_D$  und  $\psi = 0$  auf  $A$  verletzt werden.

Der Beweis des Jacobi-Prinzips — für unseren Fall durchgeführt — verläuft so:

Man führe die Funktion

$$\delta y = -\frac{\delta \psi}{u} \quad \text{mit} \quad u = \psi_y$$

ein, die wegen  $u > 0$  in  $\Gamma$  stetig und außer bei der Ablösung stetig differenzierbar ist. Alsdann wird

$$\begin{aligned} \delta \psi_x^2 + \delta \psi_y^2 &= u^2 (\delta y_x^2 + \delta y_y^2) - u (u_{xx} + u_{yy}) \delta y^2 \\ &\quad + (u u_x \delta y^2)_x + (u u_y \delta y^2)_y. \end{aligned}$$

Nach Integration über  $\Gamma$  entsteht

$$\begin{aligned} D[\delta \psi] &= \iint_{\Gamma} u^2 (\delta y_x^2 + \delta y_y^2) dx dy \\ &\quad - \iint_{\Gamma} u (u_{xx} + u_{yy}) \delta y^2 dx dy + \int_{A + \Sigma_1 + \Sigma + P_D} u \frac{\partial u}{\partial n} \delta y^2 ds \\ &\quad + \int_{P_S} u \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \kappa u \right) \delta y^2 ds. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  in  $\Gamma'$ , der Randbedingung für  $\delta y$  und  $u$  folgt

$$D[\delta \psi] = \iint_{\Gamma'} u^2 (\delta y_x^2 + \delta y_y^2) dx dy.$$

So ist der positiv definite Charakter von  $D[\delta \psi]$  in Evidenz gesetzt und damit Satz 4 bewiesen.

Die hier gewonnene Form von  $D[\delta \psi]$  ermöglicht unmittelbar die Identifizierung mit der halben zweiten Variation unseres Ausdrucks  $J[\psi, \Gamma]$  für die Lösung; übrigens war die Vermutung eines solchen Zusammenhanges für mich der Anlaß, diese zweite Variation zu berechnen. Wir gehen von der Form (12)

$$\delta^2 \tilde{J}[y] = 2 \iint_G \frac{1}{y_\psi^3} \{ (y_\psi \delta y_x - y_x \delta y_\psi)^2 + \delta y_\psi^2 \} dx dy$$

aus und führen wieder  $x$  und  $y$  statt  $x$  und  $\psi$  ein; die Ausdrücke  $y_\psi \delta y_x - y_x \delta y_\psi$  und  $\delta y_\psi$  für die Funktion  $\delta y(x, y)$  gehen dann in  $\frac{1}{v_y} \delta y_x$  und  $\frac{1}{v_y} \delta y_y$  für  $\delta y(x, y)$  über; so wird

$$\delta^2 \tilde{J}[y] = 2 \iint_{\Gamma'} v_y^2 (\delta y_x^2 + \delta y_y^2) dx dy.$$

Wenn also die hier auftretende Variation  $\delta y$  mit der infinitesimalen Variation  $\delta y$  identifiziert wird, so ist auch

$$\delta^2 \tilde{J}[y] = 2 D[\delta y].$$

Zum Schluß sei angemerkt, daß der Satz von der infinitesimalen Eindeutigkeit nicht nur beim unendlichen Gebiet und im räumlichen Falle entsprechend formuliert und bewiesen werden kann, sondern auch in Fällen allgemeineren Gebietes. Man wird dabei, wenn nötig, an Stelle der Horizontalgeschwindigkeit irgendeine andere Geschwindigkeitskomponente als Faktor  $u$  anzusetzen haben, die ja auch auf dem Strahlrande die Bedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa u = 0$  erfüllt.

Bei den Problemen ohne weitere natürliche Randbedingungen, z. B. bei denen mit unendlichem Gebiet, wird dann der Satz von der infinitesimalen Eindeutigkeit die Voraussetzung enthalten: Die Strömung besitzt eine Geschwindigkeitskomponente  $u$ , die in  $\Gamma'$  nicht verschwindet.

Die Voraussetzungen von Weinstein, Hamel und Weyl beziehen sich dagegen auf die Gesamtkrümmung der Düse, haben aber unsere Bedingung zur Folge; allerdings verfängt die Methode von Weyl auch noch in einigen Fällen polygonaler Begrenzung, in denen unsere Bedingung nicht erfüllt ist.

**Literatur.**

A. Weinstein.

- [1] Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, *Math. Zeitschr.* **31** (1929), S. 424 und die dort angegebene Literatur.

H. Weyl.

- [2] Strahlbildung nach der Kontinuitätsmethode behandelt, *Gött. Nachr., math.-naturw. Kl.*, **28**, X (1927).

St. Bergmann.

- [3] Mehrdeutige Lösungen bei Potentialströmungen mit freien Grenzen, *Zeitschr. f. a. M. M.* **12** (1932), S. 95.

D. Riabouchinsky.

- [4] *Compt. Rend. Paris* **185** (1927), S. 130, 840.

(Eingegangen am 29. 11. 1932.)

# Über die Singularitäten der durch eine Dirichletsche Reihe bestimmten analytischen Funktion.

Von

I. R. Braitzew in Gorkij (Nishnij - Nowgorod).

In einer früheren Untersuchung<sup>1)</sup> habe ich die Methode, die ich in einer Reihe von Arbeiten<sup>2)</sup> zur Bestimmung der singulären Punkte von Potenzreihen entwickelt habe, für eine neue Aufgabe, für die Bestimmung der singulären Punkte der durch das Integral

$$(1) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} f(t) z^t dt$$

dargestellten Funktion verwertet. Diese neue Aufgabe wird auf eine klassische zurückgeführt, auf die Bestimmung der Singularitäten der durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion; es sind nämlich die singulären Punkte der Funktion

$$(2) \quad F_{\alpha, \varphi}(z) = e^{\eta t} \sum_0^{\infty} z^n n \Theta_{\alpha}(n^{\alpha} e^{t \eta})$$

zu bestimmen, wobei

$$(3) \quad \Theta_{\alpha}(z) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) z^t dt}{\Gamma(\alpha t + 2)}$$

ist und die reelle Zahl  $\alpha$  die Bedingung

$$(4) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

<sup>1)</sup> Untersuchung der singulären Punkte von gewissen durch Integrale dargestellten analytischen Funktionen (russisch), Moskauer Math. Sammlung 39 (1932), S. 81—104.

<sup>2)</sup> a) Ermittlung der singulären Punkte einer durch ihre Taylorsche Reihe bestimmten Funktion, Moskauer Math. Sammlung 26 (1907), S. 242—482. b) Eine neue Methode für die Ermittlung der singulären Punkte einer durch ihre Taylorsche Reihe bestimmten Funktion. Nachrichten vom Warschauer Polytechnischen Institut (1908—1909), S. 1—151. c) Über die Singularitäten einer durch ihre Taylorsche Reihe bestimmten Funktion, daselbst (1913), S. 1—205. d) Über singuläre Punkte der analytischen Funktionen, daselbst (1914—1915), S. 1—161. (Alle vier Arbeiten sind in russischer Sprache verfaßt.)

zu erfüllen hat. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Funktionen (1) und (2): Einem beliebigen singulären Punkt des Fundamentalzweiges  $\bar{\varphi}(z)$  von  $\varphi(z)$  entspricht ein singulärer Punkt  $\eta$  des Fundamentalzweiges  $\bar{F}_{a,\varphi}(z)$  von  $F_{a,\varphi}(z)$  mittels der Formel

$$(5) \quad \eta = e^{-(e^{\eta} \zeta - 1)^{1/a}}$$

Es ist zu bemerken, daß auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe (2) „im allgemeinen“ nur ein singulärer Punkt liegt. Zur Ermittlung der Singularitäten von  $F_{a,\varphi}(z)$  lassen sich die Resultate meiner vorher zitierten Arbeiten<sup>3)</sup> verwerten.

In der vorliegenden Arbeit wird eine analoge Aufgabe behandelt, welche die durch die Dirichletsche Reihe

$$(6) \quad f(s) = \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

$$(0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots; \lambda_n \rightarrow \infty)$$

dargestellte Funktion  $f(s)$  betrifft. Der Einfachheit halber setze ich voraus, daß

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{\lambda_n} = 0$$

ist, die Methode läßt aber Erweiterungen zu. Der Voraussetzung (7) läßt sich ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit noch die hinzufügen, daß

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

ist; dann ist die imaginäre Achse die Konvergenzgerade, und übrigens zugleich auch die Grenzgerade der absoluten Konvergenz.

Durch die Substitution  $e^{-s} = z$  geht (6) in die „irreguläre“ Potenzreihe

$$(1^*) \quad \Theta(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

über, welche im Innern des Einheitskreises absolut konvergiert. Da einem Werte  $z$  unendlich viele äquidistante Werte  $s$  entsprechen, und auch die Reihe (6) eine mehrdeutige Funktion darstellen kann, müssen wir sorgfältig angeben, welche Singularitäten wir ins Auge fassen.

Als Hauptstern der Funktion  $f(s)$  bezeichnet man die Gesamtheit derjenigen Punkte der  $s$ -Ebene, in die  $f(s)$  entlang solcher geraden Strecken analytisch fortgesetzt werden kann, welche in der Konvergenzhalbene der Reihe (6) beginnen und parallel zur reellen Achse nach links verlaufen; der Hauptstern von  $f(s)$  sei hier mit  $A$  bezeichnet. Durch die



Substitution  $e^{-s} = z$  wird  $A$  abgebildet in einen Teil  $A'$  der unendlich vielblättrigen, über der  $z$ -Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche  $R$  des Logarithmus. Nicht zu  $A'$  gehören also nur solche Punkte von  $R$ , in welche die durch die Reihe (1\*) definierte Funktion  $\Theta(z)$  nicht „radial“ fortgesetzt werden kann, welche also auf einem Halbstrahl liegen, der von einem singulären Punkt von  $\Theta(z)$  aus ins Unendliche läuft, und dessen Rückverlängerung durch den Nullpunkt der  $z$ -Ebene geht. Wir denken nun von  $R$  alle Punkte weggenommen, deren Projektion die negative reelle Achse ist;  $R$  zerfällt so in unendlich viele Blätter,  $A'$  in unendlich viele Teile, und dementsprechend  $\Theta(z)$  in unendlich viele Zweige. Als Hauptzweig von  $\Theta(z)$  bezeichne ich denjenigen Zweig, für welchen  $-\pi < \arg z < \pi$  ist; er ist in dem entsprechenden Teil des Hauptsternes  $A'$  definiert; es wird dabei angenommen, daß  $z^n$  für  $\arg z = 0$  positiv ausfällt ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Wie dem Integral (1) die Reihe (2) und das Integral (3), so werden hier der Reihe (1\*) die weiteren Reihen

$$(2^*) \quad \Theta_{a,\varphi}(z) = e^{i\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n n \vartheta_a(n^a e^{i\varphi}),$$

$$(3^*) \quad \vartheta_a(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_t z^{i_t}}{\Gamma(\alpha i_t + 2)}$$

zugeordnet. Hierbei ist  $\varphi$  ein reeller Parameter, es bleibt  $\alpha$  der Bedingung (4) unterworfen, in  $\vartheta_a(z)$  soll  $z^{i_n}$  wieder positiv für  $\arg z = 0$  ausfallen, in (2\*) ist  $n^a$  positiv zu nehmen. Zwischen den Singularitäten von (1\*) und (2\*) besteht derselbe Zusammenhang wie zwischen denen von (1) und (2): Jedem singulären Punkt  $\zeta$  von  $\Theta(z)$  läßt sich ein singulärer Punkt  $\eta$  von  $\Theta_{a,\varphi}(z)$  so zuordnen, daß die Formel (5) besteht.

In der vorliegenden Arbeit werde ich nur einen Teil meiner Ergebnisse auseinandersetzen. In dem Schlußparagraphen werden weitere Resultate skizziert<sup>3)</sup>.

## § 1.

### Untersuchung der Konvergenz der Reihen (1\*), (2\*), (3\*).

I. Die Reihe (1\*) divergiert für  $|z| > 1$ , konvergiert absolut für  $|z| < 1$  und konvergiert gleichmäßig für  $|z| \leq \varrho$ , für beliebiges  $\varrho$ , wenn nur  $\varrho < 1^4$ ).

<sup>3)</sup> Das ursprüngliche Manuskript wurde auf Rat und mit Hilfe von Herrn G. Pólya in Zürich in die vorliegende stark gekürzte und formal verbesserte Fassung gebracht. Herrn Pólya sei für seine Bemühungen herzlich gedankt.

<sup>4)</sup> Vgl. G. Valiron, *Théorie générale des séries de Dirichlet* (*Mémoires des sciences mathématiques*, fasc. 17, S. 3). Nur der Vollständigkeit halber gebe ich einen kurzen Beweis.

Erstens sei  $|z| > 1$ . Aus (8) folgt die Existenz unendlich vieler Indizes  $n'$ , so daß

$$\sqrt[n']{|a_{n'}|} > \frac{1}{|z|}.$$

Dann ist aber

$$|a_{n'} z^{1/n'}| > 1,$$

d. h., unendlich viele Glieder der Reihe (1\*) haben einen 1 übertreffenden Betrag. Die Divergenz von (1\*) ist jetzt offenbar.

Zweitens sei  $|z| < 1$ . Man wähle ein positives  $\varepsilon$  so klein, daß noch

$$|z| e^\varepsilon < 1$$

bleibt. Es folgt aus (8), daß für alle genügend großen  $n$

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{|z| e^\varepsilon},$$

$$(9) \quad |a_n z^{1/n}| < e^{-\varepsilon}.$$

Nun muß (zum Unterschied von dem vorangehenden Schluß) auch (7) benutzt werden; es folgt daraus, daß für genügend großes  $n$  neben (9) noch

$$\frac{\lg n}{\lambda_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

besteht, was mit (9) kombiniert

$$|a_n z^{1/n}| < n^{-2}$$

ergibt, für alle genügend großen  $n$ . Hieraus ist die absolute Konvergenz von (1\*) ersichtlich.

Die behauptete gleichmäßige Konvergenz für  $|z| \leq \varrho$  folgt daraus, daß die Wahl des oben benutzten  $\varepsilon$  für die betreffenden  $z$  nur von  $\varrho$  abhängt.

Die zu betrachtenden singulären Punkte von  $\Theta(z)$ , die auf dem Rande von  $A'$  liegen, befinden sich, gemäß dem bewiesenen Satz, alle außerhalb oder auf dem Rande des Einheitskreises. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen, braucht die „irreguläre“ Potenzreihe  $\Theta(z)$  keinen singulären Punkt auf dem Rande ihres Konvergenzkreises, des Einheitskreises, zu haben.

II. Die Reihe (3\*) konvergiert absolut für  $z \neq 0$ , gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich, der ganz im Innern der Riemannschen Fläche  $R$  liegt, und es gibt zwei positive Konstanten  $B$  und  $\beta$ , so beschaffen, daß für  $|z| \neq 0$

$$(10) \quad |\vartheta_n(z)| \leq \sum_{t=0}^{\infty} \frac{|a_t z^{1/t}|}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} < B e^{\beta |z|^\alpha}.$$

Wir betrachten zunächst nur Werte  $z$  außerhalb des Einheitskreises, für welche also

$$(11) \quad |z| > 1$$

gilt. Gemäß (8) und (7) gibt es zwei positive Konstanten  $K$  und  $L$ , so daß

$$(12) \quad \sqrt[\lambda_t]{|a_t|} \leq K, \quad (\text{für } t = 1, 2, 3, \dots).$$

$$(13) \quad \frac{\lg t}{\lambda_t} \leq L$$

Es ist  $K \geq 1$ . Wir teilen die Indizes  $t$  und damit die Glieder der Reihe (3\*) in Klassen ein. Der Index 0 bildet eine Klasse für sich. Ferner werden diejenigen von den Indizes 1, 2, 3, 4, ... zu einer Klasse vereinigt, für welche

$$(14) \quad m < \alpha \lambda_t \leq m+1$$

gilt. Lassen wir  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  werden, so erhalten wir eine vollständige Einteilung der Indizes  $t$ .

Gehört  $t$  ( $t \geq 1$ ) der durch (14) charakterisierten Klasse an, so erhält man, unter Beachtung von (12) und (11),

$$(15) \quad \frac{|a_t z^{\lambda_t}|}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} \leq \frac{(K|z|)^{\lambda_t}}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} < \frac{(K|z|)^{\frac{m+1}{\alpha}}}{\Gamma(m+2)},$$

ferner unter Beachtung von (13), daß

$$t \leq e^{L\lambda_t} \leq e^{L\frac{m+1}{\alpha}}.$$

Daher ist die Anzahl aller  $t$ , die der Klasse (14) angehören, sicherlich nicht größer als  $e^{L\frac{m+1}{\alpha}}$ , und wir erhalten durch Summation von (15) über alle Elemente der Klasse

$$(16) \quad \sum_{m < \alpha \lambda_t \leq m+1} \frac{|a_t z^{\lambda_t}|}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} < \frac{(e^L K |z|)^{\frac{m+1}{\alpha}}}{(m+1)!}.$$

Wenn wir schließlich über alle Klassen der Indizes  $t$  summieren, (es ist (16) für  $m = 0, 1, 2, \dots$  zu berücksichtigen, ferner  $t = 0$ ), so erhalten wir

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{|a_t z^{\lambda_t}|}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} < |a_0 z^{\lambda_0}| + e^{(e^L K |z|)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

zunächst unter der Voraussetzung (11). Hieraus folgert man aber leicht das Bestehen einer Ungleichung von der Form (10) auch für  $|z| \leq 1$ , sowie die weiteren Behauptungen des Satzes II. Somit stellt  $\vartheta_*(z)$  eine auf der ganzen Riemannschen Fläche  $R$  reguläre analytische Funktion dar.

## III. Die Reihe (2\*) konvergiert sicherlich für

$$(17) \quad |z| < e^{-\beta},$$

wobei  $\beta$  die in der Ungleichung (10) auftretende Konstante bezeichnet.

Gemäß Ungleichung (10) wird die Reihe (2\*) durch die Reihe

$$(18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n n B e^{\beta n} = B \sum_{n=1}^{\infty} n (|z| e^{\beta})^n$$

majorisiert, und diese konvergiert offenbar, wenn  $|z| e^{\beta} < 1$  ist. Unsere Überlegung ergibt eigentlich mehr, als im Satz III ausgesprochen wurde, nämlich die absolute Konvergenz der Doppelreihe

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} z^n n e^{i q} \frac{a_t n^{\alpha \lambda_t} e^{i q \lambda_t}}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)}$$

unter der Bedingung (17). Wenn man nämlich in (19) die Glieder durch ihre Beträge ersetzt und dann die Summation zuerst nach  $t$  ausführt, erhält man eine einfach unendliche Reihe, die, auf Grund von (10), wieder durch die Reihe (18) majorisiert wird.

## § 2.

## Umformung der Reihe (2\*).

Die im Gebiet (17) absolut konvergente Doppelreihe (19) stellt  $\Theta_{\alpha, q}(z)$  dar; um dies einzusehen, muß man die Summation zuerst nach  $t$  ausführen. Summiert man zuerst nach  $n$ , was ja wegen der absoluten Konvergenz erlaubt ist, so erhält man

$$(20) \quad \Theta_{\alpha, q}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_t e^{i q (\lambda_t + 1)}}{\Gamma(\alpha \lambda_t + 2)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha \lambda_t + 1} z^n.$$

Zur weiteren Umformung von (20) ziehen wir die im wesentlichen bekannte, für  $\lambda \geq 0$ ,  $|z| < 1$  sicher gültige Formel

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda+1} z^n = \Gamma(\lambda+2) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^{\lambda+2}}$$

heran<sup>6)</sup>. Man kann (21) auf mehrere Arten, z. B. folgendermaßen beweisen: Es ist bekanntlich<sup>6)</sup>

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} e^x x^{-\lambda-2} dx;$$

<sup>6)</sup> Vgl. z. B. M. Lerch, Antwort auf die Frage 331 (von J. Fanel), l'Intermédiaire des Math. 8 (1901), S. 225—227.

<sup>6)</sup> Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I (2. Aufl., 1923), S. 312.

der Integrationsweg geht aus von  $-\infty$ , verläuft entlang der negativen reellen Achse bis nahe zum Nullpunkt, umkreist diesen längs eines kleinen Kreises in positivem Sinne und kehrt entlang der negativen reellen Achse zu  $-\infty$  zurück. Mit demselben Integrationsweg gilt

$$\frac{n^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} e^{nz} x^{-\lambda-2} dx.$$

Durch Einführung dieser Formel in die linke Seite von (21) und Vertauschung von Integration und Summation ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda+1} z^n = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} \frac{ze^z}{1-ze^z} x^{-\lambda-2} dx.$$

Nun wird der Integrationsweg durch einen großen Kreis vom Mittelpunkt  $x=0$  ersetzt, der die Nullstellen des Nenners des Integranden vermeidet; durch die Berechnung der Residuen und durch Grenzübergang findet man (21). Es ist wohl erlaubt, diese geläufigen Überlegungen hier nur zu skizzieren, hingegen muß genau gesagt werden, wie die in (21) auftretenden mehrdeutigen Ausdrücke zu verstehen sind: Links ist  $n^{\lambda+1}$  positiv zu nehmen. Rechts erteilt man  $\lg\left(\frac{1}{z}\right)$  eine beliebige Bestimmung, aber in allen Gliedern der Summe die gleiche, so daß die Ausdrücke  $\lg\left(\frac{1}{z}\right) - 2k\pi i$  durch eine unendliche Reihe äquidistanter Punkte in der rechten Halbebene (da  $|z| < 1$ ) dargestellt sind. Die Funktion  $w^{\lambda+2}$  zerfällt in der rechten Halbebene  $\Re w > 0$  in unendlich viele eindeutige Zweige; es ist in allen Gliedern auf der rechten Seite von (21) der Hauptzweig zu nehmen, d. h. derjenige, der für positives  $w$  positiv ausfällt.

Durch Einführung von (21) in die rechte Seite von (20) ergibt sich

$$(22) \quad \Theta_{a,q}(z) = e^{iq} \sum_{t=0}^{\infty} a_t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq\lambda_t}}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^{\alpha\lambda_t+2}}.$$

Die Doppelreihe rechts ist absolut konvergent für genügend kleines  $z$ , wie man leicht erkennt, falls man zuerst nach  $t$  summiert, auf Grund des Satzes I und der Konvergenz von  $\sum' k^{-2}$ :

$$e^{iq} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^2} \sum_{t=0}^{\infty} a_t \left( \frac{e^{iq}}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^{\alpha}} \right)^{\lambda_t}.$$

So ergibt sich durch Vertauschung der Summationsfolge in (22), mit Rücksicht auf (1\*), für genügend kleines  $|z|$

$$(23) \quad \Theta_{\alpha, \varphi}(z) = e^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^{\alpha}} \Theta\left(\frac{e^{i\varphi}}{\left(\lg \frac{1}{z} - 2k\pi i\right)^{\alpha}}\right).$$

Wie aus dem Beweis hervorgeht, tritt auf der rechten Seite von (23), falls  $|z| < e^{-\beta}$  und  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , in allen Summanden nur der Hauptzweig von  $\Theta(z)$  auf (vgl. die Einleitung); lassen wir  $|z|$  fest und  $\varphi$  stetig variieren, so kommen nach und nach alle Zweige von  $\Theta(z)$  zum Vorschein.

Die wichtige Formel (23) setzt die „irreguläre“ Potenzreihe  $\Theta$ , diese transformierte Dirichletsche Reihe, mit der gewöhnlichen Potenzreihe  $\Theta_{\alpha, \varphi}$  in Beziehung; sie ist die Grundlage aller folgenden Überlegungen<sup>7)</sup>.

### § 3.

#### Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Funktionen $\Theta(z)$ und $\Theta_{1, \varphi}(z)$ .

Um die aus der Mehrdeutigkeit der betrachteten Funktionen sich ergebenden Komplikationen möglichst zu vermindern, setzen wir  $z = e^{-u}$  und betrachten den Spezialfall  $\alpha = 1$  von Formel (23):

$$(24) \quad \Theta_{1, \varphi}(e^{-u}) = e^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u - 2k\pi i)^2} \Theta\left(\frac{e^{i\varphi}}{(u - 2k\pi i)^2}\right).$$

Bei fest gegebenem  $u$  ist die Ungleichung

$$\left| \frac{e^{i\varphi}}{u - 2k\pi i} \right| < \frac{1}{2}$$

(wir wählen den Bruch  $\frac{1}{2}$  der Bestimmtheit halber) höchstens für endlich viele ganze Zahlen  $k$  nicht erfüllt. Beachtet man, daß  $\Theta(w)$  für  $|w| \leq \frac{1}{2}$  unter einer von  $w$  unabhängigen oberen Schranke liegt (vgl. Satz I), so sieht man, daß die Reihe (24) in jedem abgeschlossenen Bereich, worin alle ihre Glieder reguläre Funktionen darstellen, absolut und gleichmäßig konvergiert, also, gemäß dem Weierstraßschen Reihensatz, eine reguläre analytische Funktion darstellt.

Das  $k$ -te Glied der Reihe (24) ist, nach Satz I, sicher regulär, wenn

$$\left| \frac{e^{i\varphi}}{u - 2k\pi i} \right| < 1$$

<sup>7)</sup> Den Spezialfall dieser Formel, der  $\alpha = 1$  und ganzzahligen  $i$ , entspricht, habe ich schon 1907 veröffentlicht, vgl. a. a. O. <sup>2)</sup> unter a). Dieser Spezialfall ist in der Zwischenzeit von anderer Seite wiedergefunden worden, vgl. G. Pólya, Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 549—640, insbesondere S. 607.

ist, d. h., wenn  $u$  sich *außerhalb* des Kreises

$$(25) \quad |u - 2k\pi i| \leq 1$$

befindet. Entfernt man aus der  $u$ -Ebene alle Kreise (25), für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , so bleibt eine „durchlöchernte“  $u$ -Ebene übrig, worin  $\Theta(e^{-u})$  regulär aber nicht eindeutig ist (abgesehen vom Falle, wo alle  $\lambda_k$  ganzzahlig sind): Wenn  $u$  eines der Löcher umkreist, so ändert das entsprechende Glied und damit die ganze Reihe ihre Bestimmung

Die Funktion  $\Theta\left(\frac{e^{i\varphi}}{u - 2k\pi i}\right)$  ist im allgemeinen in das Innere des Kreises (25) hinein fortsetzbar. Es ist über diesem Kreisbereich eine unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche ausgebreitet, deren logarithmischer Windungspunkt über  $u = 2k\pi i$  liegt, und auf einen gewissen Teil dieser Riemannschen Fläche ist derjenige Teil des Hauptsternes  $A'$ , der im Kreisäußern  $|z| \geq 1$  liegt, mittels

$$z = \frac{e^{i\varphi}}{u - 2k\pi i}, \quad u = 2k\pi i + \frac{e^{i\varphi}}{z}$$

abgebildet. Den Halbstrahlen, die von  $z = 0$  zu  $z = \infty$  laufen, entsprechen Halbstrahlen von  $u = \infty$  zu  $u = 2k\pi i$ . Jedem singulären Punkt  $z = \zeta$  von  $\Theta(z)$ , der „Ecke“ des Hauptsternes  $A'$  ist, entspricht ein singulärer Punkt

$$(26) \quad u = 2k\pi i + \frac{e^{i\varphi}}{\zeta}$$

des  $k$ -ten Gliedes der Reihe (24). Dieser singuläre Punkt ist von der Konvergenzhalbebene der Reihe

$$(27) \quad \Theta_{1,\varphi}(e^{-u}) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{i\varphi} \vartheta_1(n e^{i\varphi}) e^{-nu}$$

aus folgendermaßen erreichbar: Der Weg führt zuerst entlang einer horizontalen geraden Strecke bis zum Punkt  $2k\pi i + 1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  klein,  $\varepsilon = 1$  genügt), dann entlang der Kreislinie  $|u - 2k\pi i| = 1 + \varepsilon$ , eventuell mehrere Male um diesen Kreis herum, zum Schluß wieder geradlinig, radial dem Mittelpunkt  $2k\pi i$  zu, in einem bestimmten Blatt der bedeckenden Riemannschen Fläche. Nun ist der Punkt (26) nicht nur für das  $k$ -te Glied, sondern auch für die Summe  $\Theta_{1,\varphi}(e^{-u})$  der Reihe (24) singulär. Alle anderen Glieder der Reihe (24) bleiben nämlich *längs des beschriebenen Weges und auch in dessen Endpunkt* (26) *regulär*. Es genügt zu überlegen, daß, wenn man in (25)  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  setzt, man eine Reihe von gänzlich auseinanderliegenden Kreisscheiben erhält;



der Radius hat ja die Länge 1, die weniger beträgt als die Hälfte von  $2\pi$ , dem Abstand zweier benachbarter Kreismittelpunkte.

Einem beliebigen singulären Punkt  $\zeta$  in einer Ecke des Hauptsternes  $A'$  der Funktion  $\Theta(z)$  entspricht auf die beschriebene Weise der singuläre Punkt (26) der Funktion  $\Theta_{1,q}(e^{-u})$ , also der *singuläre Punkt*

$$(28) \quad z = e^{-u} = e^{-\left(2k\pi i + \frac{e^{iq}}{\zeta}\right)} = e^{-\frac{e^{iq}}{\zeta}}$$

der Funktion  $\Theta_{1,q}(z)$ . Dies ist der Spezialfall  $\alpha = 1$  des in der Einleitung angekündigten Zusammenhangs, vgl. Formel (5). Umgekehrt ist aus der Darstellung (24) klar, daß jeder singuläre Punkt von  $\Theta_{1,q}(z)$ , der von dem Punkte  $z = 1$  verschieden ist, die Form (28) haben muß, wobei  $\zeta$  ein singulärer Punkt von  $\Theta(z)$  ist.

Wenn man sich den auseinandergesetzten, auf Formel (24) beruhenden Zusammenhang zwischen den singulären Punkten von  $\Theta(z)$  und  $\Theta_{1,q}(z)$  vergegenwärtigt, so wird man auch leicht ersehen, welchen Aufschluß über die singulären Punkte von  $\Theta(z)$  die bekannten Methoden geben können, welche uns die Bestimmung der singulären Punkte der Reihe (27), einer gewöhnlichen Potenzreihe in  $e^{-u}$ , lehren. Es sei ein Beispiel hierzu ausgeführt.

Die Funktion  $\Theta_{1,q}(e^{-u})$  ist außerhalb der Kreise (25),  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , sicherlich regulär. Daher ist die Reihe (27), eine gewöhnliche Potenzreihe in  $e^{-u}$ , sicherlich konvergent rechts von der Geraden  $\Re u = 1$ , die die Kreise (25) von rechts berührt, und diese Gerade ist dann und nur dann die Konvergenzgerade, wenn die besagten Berührungspunkte, die Punkte  $u = 2k\pi i + 1$ , für  $\Theta_{1,q}(e^{-u})$  singulär sind, also dann und nur dann, wenn der Punkt

$$z = \frac{e^{iq}}{(2k\pi i + 1) - 2k\pi i} = e^{iq}$$

für  $\Theta(z)$  singulär ist. Die bekannte Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe ergibt also im gegenwärtigen Falle, nach einer leichten Rechnung, den folgenden Satz:

Der auf dem Konvergenzkreis der „irregulären“ Potenzreihe (1\*) liegende Punkt  $z = e^{iq}$  ist für die dargestellte Funktion singulär oder regulär, je nachdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log |\vartheta_1(n e^{iq})|$$

$= 1$  oder  $< 1$  ist.

Man kann denselben Satz, mehr explizit, auch so aussprechen:

Die Dirichletsche Reihe (6) soll den beiden Bedingungen (7) und (8) genügen. Der auf ihrer Konvergenzgeraden liegende Punkt  $s = -\varphi i$  ist für die dargestellte Funktion singulär oder regulär, je nachdem

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{\sum_{t=0}^n \frac{a_t n^{\lambda_t} e^{i\varphi \lambda_t}}{\Gamma(\lambda_t + 2)}} \right|$$

$= e$  oder  $< e$  ausfällt.

## § 4.

## Ausblick auf weitere Untersuchungen.

Ich will im folgenden einige weitere Resultate mit kurzer Andeutung der dazu führenden Wege zusammenstellen; sie ergaben sich in Verfolgung meiner zitierten Untersuchungen über die singulären Punkte von Potenzreihen<sup>8)</sup>.

1. Der Ausdruck unter dem Limeszeichen in (29) enthält alle Koeffizienten  $a_t$  und alle Exponenten  $\lambda_t$ . Man kann, indem man dem Beispiel einer analogen Untersuchung von Hadamard folgt, gewisse Anfangs- und gewisse Endglieder der unendlichen Summe weglassen, ohne Schaden für das Endergebnis, und dadurch ein handlicheres Singularitätskriterium gewinnen, welches insbesondere folgenden Satz zu beweisen gestattet:

Wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1,$$

so ist die Konvergenzgerade der Dirichletschen Reihe (6) natürliche Grenze für die durch die Reihe dargestellte analytische Funktion<sup>8)</sup>.

2. Wenn auf der Konvergenzgerade der Reihe (27) ein von den Punkten  $2k\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) verschiedener singulärer Punkt liegt, so ist er von der Form (26), wobei, wie in § 3 besprochen,

$$\zeta = |\zeta| e^{i\delta}$$

ein singulärer Punkt von  $\Theta(z)$  ist. Die Bestimmung des Konvergenzradius der Potenzreihe  $\Theta_{1,\varphi}(z)$  ergibt den Realteil des auf der Konvergenzgeraden von (27) liegenden singulären Punktes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg |\theta_1(n e^{i\varphi})|}{n} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{|\zeta|}.$$

<sup>8)</sup> Die hier skizzierte Untersuchung habe ich durchgeführt ohne Kenntnis des von A. Ostrowski, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft 27 (1928), S. 32—47 aufgestellten Singularitätskriteriums und ohne Kenntnis der Resultate von Carlson und Landau, Göttinger Nachr. (1921), S. 183—188, und Szász, diese Annalen 85 (1922), S. 99—110, die ja über das hier Mitgeteilte hinausgehen.

3. Es ist zu bemerken, daß „im allgemeinen“ nur ein singulärer Punkt auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe  $\Theta_{1,\varphi}(z)$  liegt: Es bedarf einer besonderen Bedingung dafür, daß mehr als ein singulärer Punkt darauf gelegen sei. Genauer: *Nur wenn der vom Punkt  $z = 0$  über den Punkt  $e^{i\varphi}$  ins Unendliche laufende Halbstrahl das Borelsche Polygon von  $\Theta(z)$  in einem Eckpunkt schneidet, können auf dem Konvergenzkreis von  $\Theta_{1,\varphi}(z)$  zwei oder mehr singuläre Punkte liegen.* Hierbei ist das „Borelsche Polygon“ einer „irregulären“ Potenzreihe analog zu definieren wie das einer gewöhnlichen Potenzreihe, mit gebührender Rücksicht auf die Mehrdeutigkeit der dargestellten Funktion. Aus dem Gesagten folgt: *Es gibt höchstens abzählbar unendlich viele Werte von  $\varphi$ , so beschaffen, daß auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe  $\Theta_{1,\varphi}(z)$  mehr als ein singulärer Punkt liegt.*

4. Zu dem unter 2. Gesagten ist nachzutragen: Durch Bestimmung des Argumentes des auf dem Konvergenzkreis von  $\Theta_{1,\varphi}(z)$  gelegenen singulären Punktes ist noch  $|\zeta|^{-1} \sin(\varphi - \delta)$  zu finden. Für ein zu diesem Zweck brauchbares, über die bekannten Fabry'schen Sätze hinausgehendes Resultat verweise ich auf meine früheren Arbeiten<sup>3)</sup>.

5. Auf die unter 2. und 4. besprochene Art können wir nur solche singulären Punkte von  $\Theta(z)$  ermitteln, welche auf den Seiten des Borelschen Polygons von  $\Theta(z)$  oder auf den Verlängerungen dieser Seiten liegen; diese Punkte erzeugen nämlich, für passendes  $\varphi$ , solche singulären Punkte von  $\Theta_{1,\varphi}(z)$ , die auf dem Konvergenzkreis der Potenzreihe dieser Funktion liegen. Die Verwendung der allgemeinen Formel (23) mit einem von 1 verschiedenen  $\alpha$  gestattet die Behandlung weiterer singulärer Punkte, die mit der von Mittag-Leffler betrachteten Verallgemeinerung des Borelschen Polygons in Beziehung stehen. Indem wir  $\alpha$  gegen 0 streben lassen, erhalten wir eine Art Exhaustion des ganzen Hauptsterns  $A'$  der Funktion  $\Theta(z)$ .

Zusatz bei der Korrektur. Zur Untersuchung des Verhaltens des Hauptzweiges  $\Theta_0(z)$  der Funktion  $\Theta(z)$  in der Umgebung eines solchen singulären Punktes, der auf einer Seite seines Mittag-Lefflerschen Sternes  $B^{(\alpha)}$  liegt, genügt es, sich auf die Betrachtung des Verhaltens der Funktion

$$\bar{\Theta}_{\alpha,\varphi}(z) = e^{i\varphi} \sum_0^{\infty} z^n n \vartheta_{\alpha}(n^{\alpha} e^{i\varphi})$$

in der Umgebung ihres entsprechenden singulären Punktes zu beschränken.

(Eingegangen am 26. 12. 1932.)

## Bemerkung über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen<sup>1)</sup>.

Von

Theodor Motzkin in Basel.

Herr Mandelbrojt<sup>2)</sup> hat im Jahre 1923 den folgenden Satz gefunden:

*Hat die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  den Konvergenzradius 1 und verschwinden alle  $a_n$ , deren Indizes zu einer festen Restklasse mod einer beliebigen natürlichen Zahl  $q$  gehören, so hat  $f(z)$  auf dem Einheitskreis wenigstens zwei Singularitäten. Ist unter diesen Voraussetzungen  $\alpha$  eine Singularität von  $f(z)$  auf dem Einheitskreise, so hat  $f(z)$  wenigstens eine weitere Singularität, die aus  $\alpha$  durch Multiplikation mit einer  $q$ -ten Einheitswurzel entsteht.*

Ostrowski<sup>3)</sup> fand für diesen Satz einen neuen, äußerst kurzen Beweis. Es lag nun die Frage nahe, ob ein analoger Satz auch im Falle gilt, daß die  $a_n$  für alle  $n$  aus mehreren —  $k$  — Restklassen mod  $q$  verschwinden. Ist  $q$  eine Primzahl, so hat Ostrowski (l. c.) in der Tat bewiesen, daß  $f(z)$  auf dem Einheitskreis mindestens  $k+1$  Singularitäten hat, und darüber hinaus, daß, wenn  $\alpha$  eine Singularität von  $f(z)$  auf dem Einheitskreis ist,  $f(z)$  wenigstens  $k$  weitere Singularitäten besitzt, die aus  $\alpha$  durch Multiplikation mit  $q$ -ten Einheitswurzeln entstehen.

<sup>1)</sup> Ich bin Herrn Prof. Ostrowski für die Anregung zu diesen Betrachtungen, sowie für wertvolle Hinweise bei der Ausführung und Durchsicht zu großem Dank verpflichtet.

<sup>2)</sup> Ann. de l'Ec. Norm. 40 (1923) (Thèse); Acta Math. 45 (1925), S. 129–142; Comp. Rend. 181 (1925), S. 20–22.

<sup>3)</sup> Math. Miscellen VII. Jahrb. d. Deutsch. Math. Ver. 35 (1926). Siehe auch die anschließenden Betrachtungen von T. Vijayaraghavan „Some Configurations of Points on a Circle“, J. Indian Math. Soc. 17 (1927), sowie die Darstellung im Lehrbuch von P. Dienes, The Taylor Series, Oxford 1931, S. 382.

Im allgemeinen Fall, wo  $q$  keine Primzahl ist, ist eine so allgemeine Formulierung offenbar nicht zu erwarten, da sich ja unter Umständen unsere Restklassen in bezug auf einen Teiler von  $q$  als Modul in eine geringere Anzahl von Restklassen zusammenfügen lassen.

Wir haben nun für den Fall von 2 und 3 Restklassen die Frage für beliebige  $q$  untersucht und sind zu folgendem Ergebnis gelangt:

**Satz 1.** *Hat die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  den Konvergenzradius 1 und verschwinden alle  $a_n$ , deren Indizes zu einer von  $k$  Restklassen  $R_1, \dots, R_k$ , ( $k = 2$  oder  $3$ ) mod einer beliebigen natürlichen Zahl  $q > 2$  gehören, so hat  $f(z)$  auf dem Einheitskreis wenigstens  $k + 1$  Singularitäten, wenn diese Restklassen den folgenden Bedingungen genügen: 1. Sie lassen sich nach keinem von 2 verschiedenen Teiler von  $q$  als Modul in weniger Restklassen zusammenfassen. 2. Dieser Forderung soll, falls  $q$  gerade ist, für den Teiler 2 wenigstens so gut wie möglich Genüge getan werden, indem die  $R$  dann nicht in nur eine Restklasse mod 2 fallen sollen.*

**Zusatz.** *Ist unter diesen Voraussetzungen  $\alpha$  eine Singularität von  $f(z)$  auf dem Einheitskreise, so hat  $f(z)$  wenigstens  $k$  weitere Singularitäten, die aus  $\alpha$  durch Multiplikation mit  $q$ -ten Einheitswurzeln entstehen.*

Um Satz 1 zu beweisen, werde ich neben der Ostrowskischen Beweismethode den anscheinend neuen, sehr einfachen Satz (Satz 2) benutzen, wonach eine Determinante dritten Grades aus Elementen vom Betrage 1 nur verschwinden kann, wenn mindestens zwei ihrer Zeilen oder Spalten proportional sind. Diesen Satz werden wir auf drei Arten beweisen, sowie durch eine leichte kombinatorische Überlegung auf Matrizen vom Range 2 verallgemeinern (Satz 3).

Zur Untersuchung der Fragestellung des Satzes 1 für mehr als drei Restklassen scheinen wesentlich weitergehende Überlegungen nötig zu sein.

**Beweis des Satzes 1.** Es sei  $r_x$  ein Repräsentant von  $R_x$ . Ist dann  $\varepsilon$  eine primitive  $q$ -te Einheitswurzel, so gilt offenbar identisch in  $z$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \sum_{\xi=0}^{q-1} \varepsilon^{-\xi r_x} f(\varepsilon^{\xi} z) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\xi=0}^{q-1} \varepsilon^{-\xi r_x} a_n \varepsilon^{\xi n} z^n \\ &\equiv \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv r_x \pmod{q}}}^{\infty} a_n z^n \sum_{\xi=0}^{q-1} \varepsilon^{\xi(n-r_x)} \equiv 0. \end{aligned}$$

Es sei nun  $\alpha$  eine Singularität von  $f(z)$  auf dem Konvergenzkreise. Dann genügt es, zu zeigen, daß wenigstens  $k + 1$  der Funktionen  $f(\varepsilon^{\xi} z)$  in  $\alpha$  singulär sind.

Wären nun in  $\alpha$  nur  $m < k + 1$  Funktionen  $f(\varepsilon^t z)$  singulär, so ließen sich die  $k$  Identitäten (I) sicherlich nicht nach diesen in  $\alpha$  singulären Funktionen auflösen, da jedes lineare Aggregat in den übrigen Funktionen  $f(\varepsilon^t z)$  in  $\alpha$  regulär ist. Daher müßten in der Matrix mit  $k$  Zeilen und  $q$  Spalten  $M = \|\varepsilon^{-tr}\|$  alle Minoren  $M_m$   $m$ -ter Ordnung aus dem entsprechenden System von  $m$  Spalten verschwinden.

Der Fall  $m = 1$  ist nach dem Obigen (vgl. Ostrowski, l. c.) bereits erledigt.

Ein Minor zweiter Ordnung

$$M_2(r, s) = \begin{vmatrix} \varepsilon^{-ar} \varepsilon^{-br} \\ \varepsilon^{-as} \varepsilon^{-bs} \end{vmatrix} = \varepsilon^{-ar-bs} - \varepsilon^{-as-br} = (\varepsilon^{(a-b)(s-r)} - 1) \varepsilon^{-as-br},$$

$$0 \leq a < b < q, \quad 0 \leq r < s < q$$

verschwindet, da  $\varepsilon$  eine primitive  $q$ -te Einheitswurzel ist, nur für  $(b-a)(s-r) \equiv 0 \pmod{q}$ . Es ist  $b-a < q$ , so daß der größte gemeinschaftliche Teiler  $g$  von  $s-r$  und  $q$  von 1 verschieden sein müßte. Da aber  $s$  und  $r$  auch nach jedem von 2 verschiedenen Teiler von  $q$  verschiedene Restklassen repräsentieren, wäre das ein Widerspruch mit der Voraussetzung, außer für  $g = 2$ ,  $k = 3$ . Wenn also unser  $M_2$  verschwindet, ist  $q$  gerade,  $b-a = q/2$ ,  $k = 3$  und die dritte Restklasse  $t \neq r$  und  $\neq s \pmod{2}$ .

Wäre nun  $m = 2$ , und sind nur  $f(\varepsilon^a z)$  und  $f(\varepsilon^b z)$  in  $\alpha$  singulär, so wäre von  $M_2(r, s)$ ,  $M_2(r, t)$  und  $M_2(s, t)$  nur das erste Null, entgegen dem oben Gesagten.

Ist aber  $m = 3$ , und sind nur  $f(\varepsilon^a z)$ ,  $f(\varepsilon^b z)$  und  $f(\varepsilon^c z)$  in  $\alpha$  singulär, so ist höchstens eine der Differenzen  $b-a$ ,  $c-a$ ,  $c-b$  gleich  $q/2$ , so daß höchstens eine der neun Unterdeterminanten von  $M_3$ , nämlich eine zu  $r$  und  $s$  gehörige, verschwindet; aus Satz 2 folgt aber, wie wir gleich weiter angeben werden, daß mit  $M_3$  drei Unterdeterminanten Null sein müßten, so daß auch dieser Fall unmöglich ist.

**Satz 2.** Eine Determinante dritter Ordnung  $D = |d_{\mu\nu}|$ , deren Elemente sämtlich den Betrag 1 haben, kann nur verschwinden, wenn sie zwei zueinander proportionale Zeilen oder zwei zueinander proportionale Spalten enthält.

**Korollar.** Insbesondere verschwindet eine Determinante dritten Grades aus Einheitswurzeln nur, wenn mindestens drei ihrer Unterdeterminanten verschwinden.

**Erster Beweis.** Bei Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl vom Betrag 1 bleiben Voraussetzung und Behauptung des

Satzes unberührt. Nach Division der Spalten durch die Elemente der ersten Zeile sowie der Zeilen durch die Elemente der ersten Spalte können wir also annehmen, daß  $d_{1\mu} = d_{\mu 1} = 1$ ,  $\mu = 1, 2, 3$  ist.

Wir ziehen die erste Zeile von den beiden anderen ab und erhalten

$$D = \begin{vmatrix} d_{22} - 1 & d_{23} - 1 \\ d_{32} - 1 & d_{33} - 1 \end{vmatrix},$$

so daß  $D = 0$  mit

$$(II) \quad (d_{22} - 1)(d_{33} - 1) = (d_{32} - 1)(d_{23} - 1)$$

äquivalent ist.

Man beachte andererseits, daß für  $|x| = 1$   $x + \frac{1}{x} = x + \bar{x}$  reell und  $\leq 2$ , also  $\frac{(x-1)^2}{x}$  negativ oder Null ist.

Verschwinden nun in (II) beide Seiten, so ist  $d_{22} = 1$  oder  $d_{33} = 1$  und  $d_{23} = 1$  oder  $d_{32} = 1$ , so daß in  $D$  zwei Zeilen oder zwei Spalten gleich sind.

Verschwinden aber beide Seiten von (II) nicht, so bilden wir den Quotienten

$$Q = \frac{d_{22}d_{33}}{d_{23}d_{32}} = \frac{(d_{22}-1)^2}{d_{22}} \cdot \frac{(d_{33}-1)^2}{d_{33}} : \left( \frac{(d_{23}-1)^2}{d_{23}} \cdot \frac{(d_{32}-1)^2}{d_{32}} \right),$$

der nach obigem reell und  $> 0$  ist; da aber  $|Q| = 1$  ist, muß also  $Q = 1$  sein. Setzen wir nun in (II)  $d_{22} = \varrho d_{23}$ ,  $d_{33} = \varrho d_{32}$ , so erhalten wir  $(\varrho - 1)(d_{22} - d_{32}) = 0$ , also entweder  $\varrho = 1$ , woraus Gleichheit der zwei letzten Spalten, oder  $d_{22} = d_{32}$ ,  $d_{33} = d_{32}$ , woraus Gleichheit der zwei letzten Zeilen von  $D$  folgt.

Zweiter Beweis. Aus dem Verschwinden von  $D$  folgt, daß es drei nicht zugleich verschwindende Zahlen  $e_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , gibt, so daß

$$\sum_{\nu=1}^3 d_{\mu\nu} e_\nu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3$$

gilt. Ist ein  $e_{\nu_0} = 0$ , so drücken diese Gleichungen die Proportionalität der beiden Spalten aus, deren Index von  $\nu_0$  verschieden ist. Wir nehmen daher alle  $e_\nu \neq 0$  an.

Drei komplexe Zahlen, deren Summe Null ist, lassen sich als Vektoren auffassen, die, aneinandergesetzt, sich zu einem Dreieck zusammenschließen. Für jedes  $\mu = 1, 2, 3$  erhalten wir so aus den Zahlen  $d_{\mu\nu} e_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$  ein Dreieck  $D_\mu$  mit den nichtverschwindenden Seitenlängen  $|e_\nu|$ . Mindestens zwei unter drei kongruenten Dreiecken sind aber durch eine Drehung (ohne Spiegelung) ineinander überführbar. Es werde also z. B.  $D_1$  in  $D_2$  durch eine Drehung, d. h. durch Multiplikation mit  $\varepsilon$ ,  $|\varepsilon| = 1$ ,



übergeführt, dann folgt hieraus  $d_2, e_r = \varepsilon d_1, e_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , so daß die ersten beiden Zeilen zueinander proportional sind.

Dritter Beweis. Zuerst beweisen wir, daß mindestens eine Unterdeterminante zweiter Ordnung verschwinden muß. — Die dem Element  $d_{\mu\nu}$  entsprechende Unterdeterminante sei mit  $D_{\mu\nu}$  bezeichnet. Sind nun alle  $D_{3r} \neq 0$ , so halten wir alle Elemente  $d_{\mu\nu}$  außer  $d_{33}$  und  $d_{32}$  fest und fassen  $D = 0$  als inhomogene lineare Beziehung zwischen  $d_{32}$  und  $d_{33}$  mit den Koeffizienten  $D_{3r}$  auf. Wenn  $d_{33}$  den Einheitskreis  $E$  durchläuft, so durchläuft  $d_{32}$  einen gewissen wegen der Inhomogenität der Beziehung von  $E$  verschiedenen Kreis, und zwar genau einmal, so daß  $d_{32}$  für höchstens zwei Werte von  $d_{33}$  auf  $E$  liegen kann. Diese zwei Werte erhält man aber offenbar, wenn man die dritte Zeile proportional zu einer der ersten beiden Zeilen macht<sup>1)</sup>, und dann verschwinden drei unter den Determinanten  $D_{\mu\nu}$ .

Wir sehen also, daß mit  $D$  mindestens ein  $D_{\mu\nu} = 0$  sein muß. Sei etwa  $D_{11} = 0$ . Nun gilt nach einem bekannten Satz über die Minoren aus Minoren

$$D d_{33} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix},$$

so daß mit  $D = D_{11} = 0$  auch  $D_{12} = 0$  oder  $D_{21} = 0$  ist. Dann sind aber die ersten zwei Zeilen oder Spalten proportional, und dann verschwinden auch alle drei Unterdeterminanten aus den ersten beiden Zeilen bzw. Spalten.

Aus Satz 2 folgt leicht der

Satz 3. Eine Matrix  $D$  vom Range 2 aus Elementen vom Betrag 1 läßt sich — als Menge ihrer Spalten oder als Menge ihrer Zeilen aufgefaßt — so in zwei komplementäre Teilmengen  $D_1$  und  $D_2$  zerlegen, daß  $D_1$  und  $D_2$  den Rang 1 haben; mit anderen Worten:  $D$  besteht, evtl. nach einer geeigneten Vertauschung ihrer Zeilen bzw. Spalten, aus zwei nebeneinandergesetzten Matrizen vom Range 1.

Sei das nämlich für  $m > 2$  Zeilen und  $n > 2$  Spalten richtig — für  $m < 3$  oder  $n < 3$  ist dies trivial und für  $m = n = 3$  folgt es unmittelbar aus Satz 2 —, dann genügt es zu zeigen, daß es für ein  $D$  mit  $m$  Zeilen und  $n + 1$  Spalten richtig bleibt.

<sup>1)</sup> Man setze nämlich

$$d_{32} = \frac{d_{31} d_{12}}{d_{11}}, \quad d_{33} = \frac{d_{31} d_{13}}{d_{11}}$$

bzw.

$$d_{32} = \frac{d_{31} d_{22}}{d_{21}}, \quad d_{33} = \frac{d_{31} d_{23}}{d_{21}}.$$

Nun gibt es entweder eine Spalte  $s$ , so daß  $D$  nach Streichung von  $s$  noch den Rang 2 hat und zeilenweise zerfällt; dann läßt sich die betreffende Aufteilung in Zeilen auf  $D$  ausdehnen. Denn die Hinzufügung der weggelassenen Spalte läßt den Rang auch für jedes Teilsystem der Zeilen unverändert, da  $s$  sich aus den übrigen Spalten linear zusammensetzt.

Gibt es aber eine solche Spalte  $s$  nicht, so muß  $D$  für jede Spalte  $s$  nach deren Streichung entweder den Rang 1 haben oder sich spaltenweise zerfallen lassen. Dann sind unter je drei Spalten stets mindestens zwei proportional (man wähle, um das einzusehen, eine vierte Spalte als  $s$ ). Daher läßt sich auch  $D$  spaltenweise zerlegen: man nehme nämlich zwei nicht proportionale Spalten  $s_1, s_2$ ; dann ist jede weitere Spalte entweder zu  $s_1$  oder zu  $s_2$  proportional, wodurch bereits die gesuchteerspaltung festgelegt ist.

Math. Seminar der Univ. Basel.

(Eingegangen am 18. I. 1933.)

## Sur les représentations qui conservent les angles.

Von

D. Menchoff in Moskau.

### § 1.

Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de deux domaines plans  $D$  et  $\Omega$  situés respectivement dans les plans des variables complexes  $z$  et  $w$ . Soit  $w = f(z)$  la fonction continue (non nécessairement monogène) d'une variable complexe  $z = x + iy$  qui effectue cette correspondance. Nous désignerons, dans la suite, les points et leurs affixes par les mêmes lettres.

Sans restreindre la généralité des raisonnements nous pouvons supposer dans la suite que les domaines  $D$  et  $\Omega$  soient bornés.

Je rappellerai tout d'abord la notion d'invariance des angles aux points  $z_0$  et  $w_0$  qui se correspondent dans les deux domaines  $D$  et  $\Omega$ . Soit  $J$  une courbe de Jordan aboutissant au point  $z_0$ . Lorsque le point  $z$  décrit la courbe  $J$ , le point correspondant  $w$  du domaine  $\Omega$  décrit une courbe  $I$  de Jordan aboutissant au point  $w_0$  qui correspond au point  $z_0$ . Nous dirons dans ce cas que la courbe  $I$  est l'image dans le plan  $w$  de la courbe  $J$ . Nous appellerons de même le point  $w_0$  l'image du point  $z_0$ . Plus généralement, nous dirons que l'ensemble  $E'$ , situé dans le domaine  $\Omega$ , est l'image d'un ensemble  $E$ , situé dans  $D$ , lorsque les points de ces deux ensembles se correspondent les uns aux autres.

Supposons que la courbe  $J$  aboutit au point  $z_0$  et possède en ce point une tangente déterminée. Dans ce cas nous entendrons par tangente au point  $z_0$  une demi-droite issue de ce point dans la direction de la courbe. Nous désignerons par  $[J_1, J_2]$  l'angle, compris entre zéro et  $\pi$ , dont les côtés sont les tangentes aux courbes  $J_1$  et  $J_2$  au point  $z_0$ <sup>1)</sup>. Nous dirons que les courbes  $J_1$  et  $J_2$  renferment l'angle  $[J_1, J_2]$ . Lorsqu'on prend au lieu des courbes  $J_1$  et  $J_2$  deux rayons rectilignes  $t_1$  et  $t_2$  issus de  $z_0$ , nous désignerons par  $[t_1, t_2]$  l'angle compris entre ces rayons.

<sup>1)</sup> On suppose que les tangentes aux courbes  $J_1$  et  $J_2$  ne se trouvent pas sur une même droite.

Soient  $z_0$  et  $w_0$  deux points qui se correspondent dans les domaines  $D$  et  $\Omega$ .

Nous dirons que, dans la correspondance établie, les angles *restent invariants* au point  $z_0$ , si les conditions suivantes sont vérifiées:

1° A toute courbe de Jordan, située dans le domaine  $D$ , aboutissant au point  $z_0$  et ayant en ce point une tangente déterminée, il correspond, dans le domaine  $\Omega$ , une courbe image qui possède au point  $w_0$  une tangente déterminée.

2° Deux courbes, aboutissant au point  $z_0$  et possédant en ce point des tangentes déterminées, renferment le même angle que leurs images dans le domaine  $\Omega$ , le sens de rotation des angles étant d'ailleurs conservé.

Dans un travail publié aux *Mathematische Annalen*<sup>2)</sup> j'ai démontré le théorème suivant:

*Lorsque les angles restent invariants en tout point du domaine  $D$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable, la fonction  $f(z)$  est holomorphe à l'intérieur de  $D$ .*

On peut se demander, si la condition d'invariance des angles peut être remplacée par une condition moins restrictive. Afin de répondre à cette question nous introduirons la définition suivante.

Nous dirons que le point  $z_0$ , intérieur au domaine  $D$ , a la *propriété  $K'$* , lorsqu'on peut trouver trois rayons rectilignes  $t_1, t_2, t_3$ , issus du point  $z_0$ , situés sur trois droites différentes et vérifiant les conditions suivantes:

a) Les courbes de Jordan  $I_1, I_2, I_3$ , images des rayons  $t_1, t_2, t_3$  dans le domaine  $\Omega$ , possèdent des tangentes déterminées  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) au point  $w_0$  qui correspond au point  $z_0$ .

$$b) \quad [\widehat{t_1, t_2}] = [\widehat{T_1, T_2}], [\widehat{t_1, t_3}] = [\widehat{T_1, T_3}], [\widehat{t_2, t_3}] = [\widehat{T_2, T_3}],$$

le sens de parcours des angles dans les deux membres de chaque égalité étant d'ailleurs le même.

Nous allons démontrer, dans ce mémoire, le théorème suivant:

*La correspondance entre les points des domaines  $D$  et  $\Omega$  étant biunivoque et bicontinue et la fonction  $f(z)$  ayant la même signification que plus haut, si la propriété  $K'$  est remplie en tous les points du domaine  $D$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable, la fonction  $f(z)$  est holomorphe à l'intérieur de  $D$ .*

<sup>2)</sup> D. Menchoff, Sur la représentation conforme des domaines plans. *Math. Annalen* 95 (1926), p. 641.

## § 2.

Tout d'abord nous introduirons une définition qui joue un rôle important dans la démonstration qui va suivre.

Définition 1. Nous dirons que la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près dans un ensemble parfait  $\Pi$ , situé à l'intérieur du domaine  $D$ , lorsque, d'une part, chaque point  $z$  de  $\Pi$  est l'extrémité de trois rayons rectilignes  $\tau_i \equiv \tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , situés dans le plan  $z$ , qui possèdent les propriétés suivantes:

$$\alpha) \quad [\tau_i(z'), \tau_i(z'')] < \sigma, \quad i = 1, 2, 3,$$

quels que soient les points  $z'$  et  $z''$  dans l'ensemble  $\Pi$ ;

$$\beta) \quad 800\sigma < [\tau_i(z), \tau_j(z)] < \pi - 800\sigma,$$

$i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , pour tous les points  $z$  de  $\Pi$ ; et, d'autre part, chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q$ , image de  $\Pi$  dans le plan  $w$ , est l'extrémité de trois rayons rectilignes  $T_i \equiv T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , situés dans le plan  $w$  et possédant les propriétés suivantes:

$$a) \quad [T_i(w'), T_i(w'')] < \sigma, \quad i = 1, 2, 3,$$

quels que soient les points  $w'$  et  $w''$  dans l'ensemble  $Q$ ;

b)  $w$  étant l'image d'un point arbitraire  $z$  de  $\Pi$  et  $\omega$  étant l'image d'un point quelconque  $\zeta$  situé sur un des rayons correspondants  $\tau_i(z)$ , pour chaque valeur de  $i = 1, 2, 3$  l'inégalité  $z\zeta \leq \sigma'$  entraîne l'inégalité

$$[\overline{w\omega}, T_i(w)] < \sigma;$$

où  $\sigma'$  est un nombre positif suffisamment petit, mais indépendant de  $z$ ;

$$c) \quad [\tau_i(z), \tau_j(z)] = [T_i(w), T_j(w)] \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $z$  de  $\Pi$ , le sens de rotation des angles étant d'ailleurs le même dans les deux parties de chaque égalité et le point  $w$  étant l'image de  $z$  dans le plan  $w^3$ ).

Rappelons à présent la définition d'une *portion* d'un ensemble parfait.

Définition 2. Soit  $D'$  un domaine ouvert contenant intérieurement des points d'un ensemble parfait  $P$ , qui est situé dans le domaine  $D$ . Désignons par  $\Pi$  l'ensemble des points de  $P$ , intérieurs à  $D'$ , augmenté de leurs points limites sur la frontière de  $D'$ . On dit, dans ce cas, que l'ensemble  $\Pi$  est une *portion* de l'ensemble  $P$ , définie par le domaine  $D'$ .

Définition 3. Nous dirons, ensuite, qu'un ensemble  $H$ , appartenant à un ensemble parfait  $P$ , est *partout de deuxième catégorie* sur  $P$ ,

<sup>3)</sup> Dans cette définition on suppose, bien entendu, que  $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ . De plus, nous désignons par  $\overline{z\zeta}$  le segment joignant les points  $z$  et  $\zeta$ .

lorsque cet ensemble n'est de première catégorie sur aucune des portions de l'ensemble  $P^4$ ).

Ces définitions posées, nous démontrerons le lemme suivant:

**Lemme.** *Les domaines  $D$ ,  $\Omega$  et la fonction  $f(z)$  ayant la même signification que plus haut, soit  $P$  un ensemble parfait situé dans le domaine  $D$  et contenant des points intérieurs à ce domaine<sup>5</sup>). Supposons que la propriété  $K'$  est remplie en chaque point  $z$  d'un ensemble  $H$ , appartenant à  $P$  et partout de deuxième catégorie sur  $P$ .*

Alors il existe une portion  $\Pi$  de l'ensemble  $P$ , située à l'intérieur du domaine  $D$ , et un nombre positif  $\sigma$  tels que, d'une part, la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près dans  $\Pi$  et, d'autre part, la distance de l'ensemble  $\Pi$  à la frontière du domaine  $D$  est supérieure à  $\sigma'$ , où  $\sigma'$  est le nombre figurant dans la condition b) de la définition 1.

**Démonstration.** Puisque la propriété  $K'$  est remplie partout dans l'ensemble  $H$ , chaque point  $z$  de cet ensemble est l'extrémité de trois rayons rectilignes  $t_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dont les images  $J_i(w)$  possèdent au point  $w$ , correspondant au point  $z$ , des tangentes déterminées  $T_i \equiv T_i(w)$  telles que

$$[t_i(z), \widehat{t_j(z)}] = [T_i(w), \widehat{T_j(w)}] \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

le sens de parcours des angles dans les deux parties de chaque égalité étant d'ailleurs le même.

Fixons respectivement dans les plans  $z$  et  $w$  les directions rectilignes déterminées  $\Delta$  et  $\Delta'$  et désignons par

$$E(n_1, n_2, n_3, v_1, v_2, v_3, p, p') \equiv E(n_i, v_i, p, p')$$

l'ensemble des points  $z$  appartenant à  $H$  et vérifiant les conditions suivantes:

$$(A) \quad \frac{8}{p} < [t_i(z), \widehat{t_j(z)}] < \pi - \frac{8}{p} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3);$$

$$(B) \quad \left| \{\Delta, t_i(z)\} - \frac{n_i}{800p} \right| < \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on désigne par  $\{\Delta, t_i(z)\}$  la valeur de l'angle, comptée dans le sens positif de  $\Delta$  vers  $t_i(z)$  et telle que  $0 \leq \{\Delta, t_i(z)\} < 2\pi$ ;

$$(C) \quad \left| \{\Delta', T_i(w)\} - \frac{v_i}{800p} \right| < \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3),$$

<sup>4</sup>) On dit qu'un ensemble  $E$  est de première catégorie sur un ensemble parfait  $P$ , lorsque  $E$  peut être représenté comme une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur  $P$ .

<sup>5</sup>) On dit qu'un ensemble  $P$  est situé dans un domaine  $D$ , lorsque tous les points de  $P$  se trouvent à l'intérieur ou sur la frontière de  $D$ .

où  $w$  est l'image du point  $z^6$ ;

$$(D) \quad [T_i(w), \widehat{w\omega}] < \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $\omega$  qui sont des images des points  $\zeta$  situés sur le rayon correspondant  $t_i(z)$  et tels que  $z\bar{\zeta} \leq \frac{1}{p}$ .

D'après ce qui précède, nous avons

$$(1) \quad \Sigma E(n_i, v_i, p, p') = H,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières et positives des arguments  $n_i, v_i, p$  et  $p'$ . (Pour certaines valeurs de ces arguments l'ensemble sous le signe de sommation peut être vide; cela a lieu, en particulier, pour toutes les valeurs  $n_i$  et  $v_i$  suffisamment grandes).

L'ensemble  $H$  étant partout de deuxième catégorie sur  $P$ , il existe une portion  $\Pi$  de  $P$  et des valeurs déterminées  $n_i, v_i, p, p'$  telles que l'ensemble correspondant  $E(n_i, v_i, p, p')$  est partout dense sur  $\Pi$ . On peut d'ailleurs supposer que l'ensemble  $\Pi$  est à l'intérieur du domaine  $D$  et que la distance de l'ensemble  $\Pi$  à la frontière de  $D$  est supérieure à  $1/p'$ .

Posons, pour ces valeurs des nombres  $n_i, v_i, p$  et  $p'$ ,

$$(2) \quad E(n_i, v_i, p, p') = E, \quad \frac{1}{200p} = \sigma, \quad \frac{1}{p'} = \sigma'.$$

On voit que l'ensemble  $E$  est partout dense sur  $\Pi$ . De plus, la distance de l'ensemble  $\Pi$  à la frontière du domaine  $D$  est supérieure à  $\sigma'$ . Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer que dans l'ensemble  $\Pi$  la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près. À cet effet, pour les points  $z$  de  $\Pi$ , nous définirons les rayons  $\tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de la manière suivante. Posons  $\tau_i(z) = t_i(z)$  aux points  $z$  de l'ensemble  $(\Pi, E)^7$  et, pour les points  $z$  de l'ensemble  $\Pi - E$ , soit  $\tau_i(z)$  une des positions limites des rayons  $t_i(z')$ , lorsque  $z'$  tend vers  $z$  en restant toujours sur l'ensemble  $(\Pi, E)$ .

Nous allons démontrer que les rayons  $\tau_i(z)$  possèdent toutes les propriétés indiquées dans la définition 1 de ce paragraphe. En tenant compte de l'inégalité (B), nous avons

$$\left| \Delta \widehat{\tau_i(z)} - \frac{n_i}{800p} \right| \leq \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3)$$

<sup>6</sup>) L'angle  $\{\Delta \widehat{T_i(w)}\}$  est défini de la même manière que l'angle  $\{\Delta \widehat{t_i(z)}\}$ .

<sup>7</sup>) Nous désignons par  $(\Pi, E)$  la partie commune des ensembles  $\Pi$  et  $E$ .



pour tous les points  $z$  de l'ensemble  $\Pi$ , où  $n_i$  et  $p$  sont les nombres qui figurent dans la première relation (2). Nous avons donc, en vertu de la seconde relation (2),

$$[\tau_i(z'), \tau_i(z'')] < \sigma$$

pour tous les points  $z'$  et  $z''$  de l'ensemble  $\Pi$ . Il en résulte que les rayons  $\tau_i(z)$  possèdent la propriété  $\alpha$ ) de la définition 1.

Pour obtenir la propriété  $\beta$ ), nous nous servirons de l'inégalité (A). En comparant cette inégalité avec la seconde relation (2) et en tenant compte de la définition des rayons  $\tau_i(z)$ , nous aurons

$$1600\sigma \leq [\tau_i(z), \tau_j(z)] \leq \pi - 1600\sigma \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $z$  de l'ensemble  $\Pi$ , d'où résulte la propriété  $\beta$ ).

Passons aux propriétés a), b) et c). Désignons par  $Q$  l'ensemble parfait qui est l'image, dans le domaine  $\Omega$ , de l'ensemble  $\Pi$ . Soit  $w$  un point quelconque de l'ensemble  $Q$ . Définissons les rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de la manière suivante:

Lorsque  $w$  est l'image d'un point  $z$  qui appartient à l'ensemble  $(\Pi, E)$ , nous poserons  $T_i(w) = T_i(z)$ , où  $T_i(z)$  sont des rayons définis précédemment. Dans le cas où  $w$  est l'image d'un point  $z$  appartenant à l'ensemble  $\Pi - E$ , nous désignerons par  $T_i(w)$  une des positions limites des rayons  $T_i(w')$ , lorsque  $w'$  tend vers  $w$  de telle façon que l'image  $z'$  de  $w'$  reste toujours sur l'ensemble  $(\Pi, E)$ .

D'après la condition du lemme, la propriété  $K'$  est remplie partout dans l'ensemble  $H$  et, par suite, en chaque point de l'ensemble  $E$ . Puisque  $E$  est partout dense sur  $\Pi$ , il résulte de la définition des rayons  $\tau_i(z)$  et  $T_i(w)$  que

$$[\tau_i(z), \tau_j(z)] = [T_i(w), T_j(w)] \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $z$  de l'ensemble  $\Pi$ , le sens de rotation des angles étant le même dans les deux parties de chaque égalité et  $w$  étant l'image de  $z$  dans le domaine  $\Omega$ . Nous avons donc la propriété c).

Pour obtenir les propriétés a) et b) nous nous servirons des inégalités (C) et (D). Il résulte de l'inégalité (C) et de la définition des rayons  $T_i(w)$  que

$$(3) \quad \left| \Delta', T_i(w) - \frac{r_i}{800p} \right| \leq \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $w$  de l'ensemble  $Q$ , où  $r_i$  et  $p$  sont des nombres qui figurent dans la première égalité (2). De plus, la correspondance entre

les points des domaines  $D$  et  $\Omega$  étant biunivoque et bicontinue, nous tirons de l'inégalité (D) et de la définition des rayons  $T_i(w)$  et  $\tau_i(z)$ :

$$(4) \quad [T_i(w), \widehat{w\omega}] \leq \frac{1}{800p} \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $w$  de l'ensemble  $Q$  et pour tous les points  $\omega$  qui sont des images des points  $\zeta$  situés sur les rayons correspondants  $\tau_i(z)$  et tels que  $\overline{z\zeta} \leq \frac{1}{p}$ , où  $z$  est l'image du point  $w$  dans le domaine  $D$ .

En comparant les inégalités (3) et (4) avec la seconde et la troisième relation (2), nous obtenons les propriétés a) et b), ce qui achève la démonstration du lemme.

### § 3.

Dans la démonstration du théorème énoncé à la fin du § 1 nous ferons usage de certaines propriétés des différentielles totales au sens de Stoltz.

On dit qu'une fonction  $X(u, v)$  de deux variables réelles  $u$  et  $v$  possède, pour les valeurs données de  $u$  et  $v$ , une différentielle totale au sens de Stoltz, lorsque, pour ces valeurs de  $u$  et  $v$ , les dérivées partielles  $\frac{\partial X}{\partial u}$  et  $\frac{\partial X}{\partial v}$  existent et vérifient la relation

$$X(u + \Delta u, v + \Delta v) - X(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial v} \Delta v + h(\Delta u, \Delta v),$$

où

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{h(\Delta u, \Delta v)}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} = 0.$$

Lorsque nous avons une fonction  $F(w) = X(u, v) + iY(u, v)$  d'une variable complexe  $w = u + iv$ , nous dirons que cette fonction possède une différentielle totale au sens de Stoltz en un point  $w$ , si les fonctions  $X(u, v)$  et  $Y(u, v)$  possèdent une telle différentielle en ce point.

Dans ce cas nous aurons la relation suivante:

$$F(w + \Delta w) - F(w) = \frac{\partial F(w)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F(w)}{\partial v} \Delta v + \epsilon(\Delta u, \Delta v) \cdot |\Delta w|,$$

où

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \epsilon(\Delta u, \Delta v) = 0.$$

Nous allons étudier les propriétés des différentielles totales d'une fonction  $F(w)$ , lorsque cette fonction effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points  $w$  et  $z = F(w)$  de deux domaines  $\Omega$  et  $D$ . On dit, dans ce cas, que la fonction  $F(w)$  est univalente.

Avant de considérer les propriétés des différentielles totales de la fonction  $F(w)$ , nous introduirons la notation

$$L(w) = \limsup_{\Delta w \rightarrow 0} \left| \frac{F(w + \Delta w) - F(w)}{\Delta w} \right|$$

et nous démontrerons le lemme suivant:

**Lemme.** Soit  $\Pi$  un ensemble parfait de points  $z$ , situés à l'intérieur du domaine  $D$ , dont l'image  $Q$  (dans le plan  $w$ ) possède une mesure positive,  $\text{mes } Q > 0^8$ ). Supposons que la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près dans l'ensemble  $\Pi$ ,  $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ , et soit  $w_0$  un point d'épaisseur superficielle de l'ensemble  $Q^9$ ) tel que

$$L(w_0) = +\infty.$$

Dans ces conditions on peut déterminer dans le plan  $w$  une suite de domaines  $\Omega_n$  qui possèdent les propriétés suivantes:

- 1° Le point  $w_0$  est à l'intérieur de tous les domaines  $\Omega_n$ .
- 2° Les diamètres  $R_n$  des domaines  $\Omega_n$  tendent vers zéro avec  $1/n$ .
- 3°  $D_n$  étant des images dans le plan  $z$  des domaines  $\Omega_n$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{l'aire de } D_n}{R_n^2} = +\infty.$$

- 4° Tous les domaines  $\Omega_n$  se trouvent à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

**Démonstration.** Puisque dans l'ensemble  $\Pi$  la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près, on peut trouver, en vertu de la définition 1 du § 2 [condition a)], trois rayons rectilignes fixes  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , situés dans le plan  $w$  et tels que

$$(1) \quad [\Delta_i, \hat{T}_i(w)] < \sigma \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $w$  de l'ensemble  $Q$ , où  $T_i(w)$  sont les rayons qui figurent dans la définition 1. Il en résulte, en vertu des conditions  $\beta$ ) et c),

$$(2) \quad 700\sigma < [\Delta_i, \hat{\Delta}_j] < \pi - 700\sigma, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3).$$

En tenant compte de la relation  $L(w_0) = +\infty$ , on peut déterminer dans le plan  $w$  une suite de points  $w_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tels que

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{w_0 w_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{z_0 z_n}}{\overline{w_0 w_n}} = +\infty,$$

où  $z_0$  et  $z_n$  sont les images dans le plan  $z$  des points  $w_0$  et  $w_n$ .

<sup>8</sup>) Nous désignerons toujours par  $\text{mes } Q$  la mesure superficielle d'un ensemble  $Q$ .

<sup>9</sup>) On dit qu'un point  $w_0$  est un point d'épaisseur superficielle d'un ensemble mesurable  $Q$ , lorsque  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes } Q(r)}{\pi r^2} = 1$ , où  $Q(r)$  est la partie de l'ensemble  $Q$  comprise dans le cercle  $c(r)$  de centre  $w_0$  et de rayon  $r$ .

Soit  $C_n$  le cercle de centre  $w_0$  et de rayon  $2\overline{w_0 w_n}$ . On peut toujours trouver trois rayons rectilignes  $\Delta_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , qui possèdent les propriétés suivantes:

1° Les rayons  $\Delta_i^{(n)}$  sont respectivement parallèles aux directions  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

2° Les deux rayons différents  $\Delta_i^{(n)}$  et  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $i < j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , possèdent un point commun  $w_{ij}^{(n)}$  qui ne coïncide pas avec les extrémités de ces deux rayons.

3° Le cercle  $C_n$  est inscrit au triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$ .

4° La distance entre l'extrémité  $w_i^{(n)}$  du rayon  $\Delta_i^{(n)}$  et le premier point d'intersection de ce rayon avec les rayons  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $j \neq i$ , est égale à  $a_n$ , où  $a_n$  est la longueur du plus grand côté du triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$ <sup>10)</sup>.

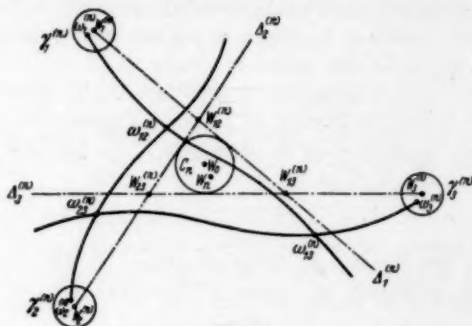


Fig. 1.

Soient  $\gamma_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les cercles de centres  $w_i^{(n)}$  et de rayons  $\sigma a_n$ . Désignons par  $\Gamma_n$  le cercle de centre  $w_0$  et de rayon  $3a_n$  et soit  $Q_n$  la partie de l'ensemble  $Q$  dans le cercle  $\Gamma_n$ . Il est clair que le triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$ , ainsi que les cercles  $\gamma_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont situés à l'intérieur du cercle  $\Gamma_n$ .

Il résulte de la première relation (3) que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Donc,  $w_0$  étant un point d'épaisseur superficielle de l'ensemble  $Q$ ,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } Q_n}{9\pi a_n^2} = 1.$$

La correspondance entre les points des domaines  $D$  et  $\Omega$  étant biunivoque et bicontinue et  $\sigma'$  étant le nombre positif qui figure dans

<sup>10)</sup> Fig. 1.

la définition 1 du § 2, [condition b)], pour les points  $z'$  et  $z''$  appartenant à  $D$  l'inégalité  $\overline{z'z''} \geq \sigma'$  entraîne l'inégalité

$$(6) \quad \overline{w'w''} \geq \sigma'',$$

où  $w'$ ,  $w''$  sont des images dans le plan  $w$  des points  $z'$ ,  $z''$  et  $\sigma''$  est un nombre positif fixe<sup>11)</sup>. Il résulte de (4) et (5) que

$$(7) \quad 6a_n < \sigma'', \text{ mes } Q_n > 9\pi a_n^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{9}\right)$$

pour toutes les valeurs de  $n$  suffisamment grandes. En changeant la numération, on peut d'ailleurs supposer que ces inégalités soient vérifiées pour toutes les valeurs de  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De plus, on peut supposer que tous les cercles  $\Gamma_n$  soient à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . L'aire de chacun des cercles  $\gamma_i^{(n)}$  étant égale à  $\pi\sigma^2 a_n^2$ , on voit de la seconde inégalité (7) qu'à l'intérieur de chacun de ces cercles se trouvent des points de l'ensemble  $Q_n$ ; donc des points de l'ensemble  $Q$ .

Soit  $\omega_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , un point de l'ensemble  $Q$  situé à l'intérieur du cercle  $\gamma_i^{(n)}$  et soit  $\zeta_i^{(n)}$  l'image de ce point dans le plan  $z$ .  $\tau_i(z)$  étant des rayons qui figurent dans la définition 1 du § 2, soit  $c_i^{(n)}$  le point situé sur le rayon  $\tau_i(\zeta_i^{(n)})$  et tel que

$$(8) \quad \overline{\zeta_i^{(n)} c_i^{(n)}} = \sigma'.$$

Désignons par  $b_i^{(n)}$  l'image du point  $c_i^{(n)}$  dans le plan  $w$ . Il résulte de (8) et de la définition du nombre  $\sigma''$  (inégalité (6)) que

$$(9) \quad \overline{\omega_i^{(n)} b_i^{(n)}} \geq \sigma''.$$

Donc, en vertu de la première inégalité (7), le point  $b_i^{(n)}$  est extérieur au cercle  $\Gamma_n$ . D'ailleurs, ce point  $b_i^{(n)}$  se trouve sur la courbe  $J_i(\omega_i^{(n)})$  qui est l'image du rayon  $\tau_i(\zeta_i^{(n)})$ .

Le point  $\omega_i^{(n)}$  étant à l'intérieur du cercle  $\Gamma_n$ , soit  $\beta_i^{(n)}$  le premier point commun de la courbe  $J_i(\omega_i^{(n)})$  avec la circonférence du cercle  $\Gamma_n$  qu'on rencontre à partir du point  $\omega_i^{(n)}$ . Le point  $\beta_i^{(n)}$  se trouve entre les points  $\omega_i^{(n)}$  et  $b_i^{(n)}$ . Par suite, il résulte de la condition b) de la définition 1 (§ 2) et de la relation (8) que

$$[\widehat{\omega_i^{(n)} \omega, T_i(\omega_i^{(n)})}] < \sigma \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour tous les points  $\omega$  de la courbe  $J_i(\omega_i^{(n)})$  situés entre les points  $\omega_i^{(n)}$  et  $\beta_i^{(n)}$ .

<sup>11)</sup> Nous supposons, ce qui est toujours possible, que la correspondance entre les points des domaines  $D$  et  $\Omega$  est continue même sur les frontières de ces domaines.

En comparant cette inégalité avec l'inégalité (1) et avec la définition des rayons  $\Delta_i^{(n)}$  on obtient donc

$$(10) \quad [\Delta_i^{(n)}, \widehat{\omega_i^{(n)} \omega}] < 2\sigma \quad (i = 1, 2, 3)$$

pour les mêmes points  $\omega$ .

Soit  $\omega_i^{(n)} \beta_i^{(n)}$  la partie de la courbe  $J_i(\omega_i^{(n)})$  comprise entre les points  $\omega_i^{(n)}$  et  $\beta_i^{(n)}$ . Puisque le point  $\omega_i^{(n)}$  se trouve à l'intérieur du cercle  $\gamma_i^{(n)}$ , il résulte de (10) que la distance de chaque point  $\omega$  de la courbe  $\omega_i^{(n)} \beta_i^{(n)}$  au rayon  $\Delta_i^{(n)}$  est inférieure à  $7 a_n \operatorname{tg} 2\sigma < 28 a_n \sigma$ .

D'autre part, on obtient de (2) et de la définition des rayons  $\Delta_i^{(n)}$  que

$$700\sigma < [\Delta_i^{(n)}, \widehat{\Delta_j^{(n)}}] < \pi - 700\sigma, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3).$$

On voit donc de la définition des points  $w_i^{(n)}$  et  $\omega_i^{(n)}$  que la distance du point  $\omega_i^{(n)}$  au rayon  $\Delta_j^{(n)}$ ,  $j \neq i$ , est supérieure à

$$\frac{a_n}{2} \operatorname{tg} 700\sigma > 350\sigma a_n.$$

Il en résulte que pour chaque pair d'indices différents  $i$  et  $j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , les courbes  $\omega_i^{(n)} \beta_i^{(n)}$  et  $\omega_j^{(n)} \beta_j^{(n)}$  possèdent au moins un point commun  $\omega_{ij}^{(n)}$ ; d'ailleurs ce point est unique, puisque les courbes  $\omega_i^{(n)} \beta_i^{(n)}$  sont des images de segments rectilignes.

On voit de ce qui précède que les parties des courbes  $\omega_i^{(n)} \beta_i^{(n)}$  comprises entre les trois points  $\omega_{ij}^{(n)}$  constituent la frontière d'un domaine simplement connexe  $\Omega_n$ ; de plus, tous les points du triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$ , dont les distances de chaque côté de ce triangle sont supérieures à  $28 a_n \sigma$ , se trouvent à l'intérieur du domaine  $\Omega_n$  et, de même, la distance de chaque point sur la frontière du domaine  $\Omega_n$  au triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$  est inférieure à  $28 a_n \sigma^{13}$ .

Il est clair que

$$(11) \quad \overline{w_0 w_n} > \frac{a_n}{4} \operatorname{tg} 350\sigma > 28 a_n \sigma.$$

Puisque  $w_0$  est le centre du cercle  $C_n$ , inscrit au triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$ , et que  $2 \overline{w_0 w_n}$  est le rayon de ce cercle, il résulte, d'après (11), que les points  $w_0$  et  $w_n$  se trouvent à l'intérieur du domaine  $\Omega_n$ . Il est clair que le domaine  $\Omega_n$  est à l'intérieur du cercle  $\Gamma_n$  et, par suite, à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Donc, le diamètre  $R_n$  du domaine  $\Omega_n$  est certainement inférieur à  $6 a_n$ . Par suite, il résulte de (11)

$$(12) \quad R_n < \frac{1}{\sigma} \overline{w_0 w_n}.$$

<sup>13)</sup> Nous convenons de prendre égale à zéro la distance au triangle  $w_{12}^{(n)} w_{23}^{(n)} w_{13}^{(n)}$  d'un point qui appartient à ce triangle.

Soit  $D_n$  l'image dans le plan  $z$  du domaine  $\Omega_n$  et soient  $\zeta_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les images des points  $\omega_i^{(n)}$ . Puisque les images des courbes  $J_i(\omega_i^{(n)})$  sont des rayons rectilignes  $\tau_i(\zeta_i^{(n)})$ , le domaine  $D_n$  est un triangle. D'ailleurs, d'après la condition  $\beta$ ) qui figure dans la définition 1 du § 2, tous les angles de ce triangle sont supérieurs à  $800\sigma$ , mais inférieurs à  $\pi - 800\sigma$ .

Soient  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les côtés du triangle  $D_n$ . Numérotons-les de telle façon que  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ . On a l'inégalité:

$$(13) \quad \text{l'aire de } D_n > \frac{1}{2} \sin 800\sigma \cdot \alpha_1 \alpha_2 > 2\sigma \cdot \alpha_1 \alpha_2.$$

Les points  $w_0$  et  $w_n$  étant à l'intérieur du domaine  $\Omega_n$ , leurs images  $z_0$  et  $z_n$  se trouvent à l'intérieur du triangle  $D_n$  et, par suite,

$$\alpha_1 > \overline{z_0 z_n}, \quad \alpha_2 > \frac{1}{2} \overline{z_0 z_n},$$

d'où il résulte, d'après (13),

$$(14) \quad \text{l'aire de } D_n > \sigma \cdot \overline{z_0 z_n}^2.$$

En comparant (12) et (14), on obtient finalement

$$\frac{\text{l'aire de } D_n}{R_n^2} > \sigma^2 \cdot \frac{\overline{z_0 z_n}^2}{w_0 w_n^2}$$

et, par suite, en vertu de la seconde relation (3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{l'aire de } D_n}{R^2} = +\infty.$$

En comparant la première relation (3) avec l'inégalité (12), on obtient, de plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Nous avons déjà vu que le point  $w_0$  est à l'intérieur de tous les domaines  $\Omega_n$  qui, à leur tour, se trouvent à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Le lemme est donc complètement démontré.

#### § 4.

Nous pouvons maintenant démontrer un théorème sur les différentielles totales qui nous sera nécessaire dans l'étude de la représentation des domaines plans.

**Théorème.** Supposons que la fonction  $F(w) = z$  effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points  $w$  et  $z$  des domaines  $\Omega$  et  $D$ . Soit  $E$  un ensemble mesurable situé à l'intérieur du domaine  $D$  et soit  $E'$  l'image de  $E$  dans le domaine  $\Omega$ . Supposons que l'ensemble  $E$  possède une mesure positive,  $\text{mes } E > 0$ , et de plus, que chaque point de l'ensemble  $E$  a la propriété  $K'$ .

Dans ces conditions, la fonction  $F(w)$  possède une différentielle totale au sens de Stoltz presque partout dans  $E$ .



Démonstration. Soit  $L(w)$  la fonction définie dans le paragraphe précédent. Nous allons démontrer tout d'abord que  $L(w)$  est finie presque partout dans  $E$ . Supposons, par impossible, qu'il existe un ensemble  $e$ , appartenant à  $E$  et de mesure positive,  $\text{mes } e > 0$ , dont chaque point  $w$  vérifie la condition

$$(1) \quad L(w) = +\infty.$$

Soit  $e'$  un ensemble parfait qui possède les propriétés suivantes.

1° L'ensemble  $e'$  est une partie de l'ensemble  $e$ .

2° Chaque portion de  $e'$  possède une mesure positive.

Soit  $P$  l'image dans le plan  $z$  de l'ensemble  $e'$ . L'ensemble  $P$  est un ensemble parfait qui appartient à l'ensemble  $E$ . Puisque chaque point de l'ensemble  $E$  possède la propriété  $K'$ , il existe, d'après le lemme du § 2, une portion  $\Pi$  de l'ensemble  $P$ , dans laquelle la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près, où  $\sigma$  est un nombre positif fixe,

$$\sigma < \frac{\pi}{1600}.$$

Désignons par  $Q$  l'image de l'ensemble  $\Pi$  dans le plan  $w$ . L'ensemble  $Q$  est un ensemble parfait qui est une portion de l'ensemble  $e'$ ; donc la mesure de  $Q$  est positive,

$$\text{mes } Q > 0.$$

Soit  $Q'$  l'ensemble des points d'épaisseur superficielle de l'ensemble  $Q$ , qui appartiennent à cet ensemble; on a

$$(2) \quad \text{mes } Q' > 0.$$

Puisque l'ensemble  $Q'$  appartient à l'ensemble  $E$ , la relation (1) est vérifiée partout dans  $Q'$ . Donc, d'après le lemme du § 3, chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q'$  est un point intérieur d'une suite de domaines  $\Omega_n(w)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , intérieurs au domaine  $\Omega$ , qui possèdent des diamètres  $R_n(w)$  tendant vers zéro avec  $1/n$ ,

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(w) = 0,$$

et, de plus, vérifient la relation

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{l'aire de } D_n(z)}{[R_n(w)]^2} = +\infty,$$

où  $D_n(z)$  est l'image dans le plan  $z$  du domaine  $\Omega_n(w)$ .

Soit  $C_n(w)$  le plus petit cercle de centre  $w$  qui contient le domaine  $\Omega_n(w)$ . Il est clair que le rayon du cercle  $C_n(w)$  tend vers zéro avec  $1/n$  et que

$$\text{l'aire de } C_n(w) < 4\pi [R_n(w)]^2.$$

Par suite, d'après (4),

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{l'aire de } D_n(z)}{\text{l'aire de } C_n(w)} = +\infty.$$

Soit  $A$  un nombre positif arbitrairement grand. D'après la relation (5), nous aurons l'inégalité

$$(6) \quad \text{l'aire de } D_n(z) > A \text{ l'aire de } C_n(w)$$

qui est vérifiée pour  $n > N(w)$ , où  $N(w)$  est un nombre qui dépend en général de  $w$ . En omettant les cercles pour certaines valeurs de  $n$  et en changeant le numérotage, on peut supposer que l'inégalité (6) soit vérifiée pour toutes les valeurs de  $n$ , quel que soit le point  $w$  de l'ensemble  $Q'$ <sup>13)</sup>. Nous voyons donc que chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q'$  est le centre d'une suite de cercles  $C_n(w)$  dont les rayons tendent vers zéro avec  $1/n$ ; par suite, d'après un lemme, il est possible de choisir parmi ces cercles un nombre fini de cercles  $C_1, C_2, \dots, C_p$  sans points communs tels que la mesure de la partie de l'ensemble  $Q'$  extérieure aux cercles  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , est aussi petite que l'on veut, par exemple, inférieure à  $\frac{1}{2} \text{mes } Q'$ <sup>14)</sup>. D'ailleurs on peut supposer que tous les cercles  $C_i$  soient intérieurs au domaine  $\Omega$ . Il en résulte que

$$(7) \quad \sum_{i=1}^p \text{aires de } C_i > \frac{1}{2} \text{mes } Q'.$$

Soit  $\Omega_i$  celui des domaines  $\Omega_n(w)$  qui correspond au cercle  $C_n(w) \equiv C_i$  et soit  $D_i$  l'image de  $\Omega_i$  dans le plan  $z$ . Nous aurons, d'après (6),

$$(8) \quad \text{l'aire de } D_i > A \text{ l'aire de } C_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p).$$

Puisque les cercles  $C_i$  contiennent respectivement les domaines  $\Omega_i$ , tous les domaines  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$  sont extérieurs l'un à l'autre, mais intérieurs au domaine  $\Omega$ . Par suite, les domaines  $D_1, D_2, \dots, D_p$  sont extérieurs l'un à l'autre, mais intérieurs au domaine  $D$ , d'où il résulte que

$$(9) \quad \sum_{i=1}^p \text{aires de } D_i < \text{l'aire de } D.$$

En comparant (7), (8) et (9) on obtient finalement l'inégalité

$$\text{l'aire de } D > \frac{A}{2} \cdot \text{mes } Q',$$

qui est incompatible avec l'inégalité (2),  $A$  étant un nombre positif arbitrairement grand et  $D$  étant un domaine borné. Nous arrivons donc à une contradiction en supposant que la relation (1) soit vérifiée sur une partie de l'ensemble  $E$  de mesure positive. Par suite, la quantité  $L(w)$

<sup>13)</sup> Le changement du numérotage n'est pas, en général, le même pour les différents points  $w$ .

<sup>14)</sup> Le lemme dont nous nous sommes servi est une conséquence immédiate d'un théorème connu de M. Vitali. Voir, par exemple, Menchoff, *Sur la représentation conforme des domaines plans*, Mathematische Annalen 95 (1926), p. 650.

possède une valeur finie presque partout dans  $E$ . Il en résulte, d'après un théorème de M. Stepanoff<sup>15)</sup>, que la fonction  $F(w)$  possède une différentielle totale au sens de Stoltz presque partout dans  $E$ , c. q. f. d.

Supposons que les ensembles  $E$  et  $E'$  soient les mêmes que dans le théorème précédent et que  $\text{mes } E > 0$ . Supposons, de plus, que l'ensemble  $E$  soit parfait. En se servant des mêmes raisonnements que plus haut, on peut démontrer la proposition suivante.

Si la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près dans  $E$ ,  $0 < \sigma < \frac{\pi}{1600}$ , la fonction  $F(w)$  possède une différentielle totale au sens de Stoltz presque partout dans  $E$ .

### § 5.

Dans ce paragraphe nous établirons les conditions suffisantes pour que la fonction  $F(w)$  soit monogène en un point individuel ou bien presque partout dans un ensemble mesurable. Nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 1. Supposons que la propriété  $K'$  soit remplie en un point  $z_0$  situé à l'intérieur du domaine  $D$ . Supposons de plus que la fonction  $F(w)$  possède une différentielle totale de Stoltz au point  $w_0$  qui est l'image du point  $z_0$ .

Dans ces conditions la fonction  $F(w)$  est monogène au point  $w_0$ .

Démonstration. Posons

$$w = u + iv, \quad w_0 = u_0 + iv_0,$$

$$A = \left[ \frac{\partial F(w)}{\partial u} \right]_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}, \quad B = \left[ \frac{\partial F(w)}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}},$$

où  $u, v, u_0$  et  $v_0$  sont des quantités réelles. Il résulte, de la définition de la différentielle totale de Stoltz

$$(1) \quad F(w) - F(w_0) = A \cdot (u - u_0) + B \cdot (v - v_0) + \epsilon(u, v) \cdot |w - w_0|,$$

où  $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \epsilon(u, v) = 0$ . En posant

$$(2) \quad F(w_0) + A \cdot (u - u_0) + B \cdot (v - v_0) = F_1(w), \quad \epsilon(u, v) \cdot |w - w_0| = \varphi(w),$$

on peut écrire la relation (1) sous la forme

$$(3) \quad F(w) = F_1(w) + \varphi(w).$$

On a, de plus,

$$(4) \quad F_1(w_0) = F(w_0) = z_0.$$

<sup>15)</sup> Stepanoff, Über totale Differenzierbarkeit, Math. Ann. 90 (1923), p. 318.

De la deuxième relation (2) il résulte immédiatement que la dérivée  $\varphi'(w_0)$  existe et a la valeur nulle,

$$(5) \quad \varphi'(w_0) = 0.$$

Donc la fonction  $\varphi(w)$  est monogène au point  $w_0$ .

Lorsque  $A = B = 0$  nous avons  $F_1(w) \equiv F(w_0)$  et, par suite, d'après (3) et (5), la fonction  $F(w)$  est monogène au point  $w_0$ . Nous pouvons donc supposer que l'une des quantités  $A$  ou  $B$  est différente de zéro. Supposons, pour fixer les idées, que  $B \neq 0$  et posons  $\frac{A}{B} = \gamma + i\delta$ , où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des quantités réelles.

Puisque le point  $z_0$  a la propriété  $K'$ , il existe trois rayons rectilignes  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , issus de ce point et situés sur trois droites différentes, dont les images  $I_k$  dans le plan  $w$  possèdent des tangentes déterminées  $T_k$  telles que

$$(6) \quad [\tau_k, \hat{\tau}_l] = [T_k, \hat{T}_l] \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

le sens de rotation des angles étant d'ailleurs le même. Désignons par  $J_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , les courbes, décrites dans le plan  $z$  par le point  $z' = F_1(w)$ , lorsque le point  $w$  décrit respectivement les courbes  $I_k$ .

Nous pouvons toujours supposer qu'aucun des rayons  $T_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , ne coïncide avec la droite définie par l'équation  $u = u_0$ . Il en résulte que le rapport  $\frac{v-v_0}{u-u_0}$  tend vers une limite finie  $\lambda_k$ , lorsque le point  $w$  tend vers  $w_0$  suivant la courbe  $I_k$ . Puisque les rayons  $T_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont situés sur trois droites différentes, les trois quantités  $\lambda_k$  sont toutes différentes.

Nous allons démontrer que le rayon  $\tau_k$  est tangent à la courbe  $J_k$ , lorsque  $\delta \neq 0$  ou bien  $\lambda_k \neq -\gamma$ . Nous pouvons écrire

$$\left| \frac{w-w_0}{F_1(w)-F_1(w_0)} \right| = \frac{1}{|B|} \sqrt{\frac{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}{[\gamma(u-u_0) + v-v_0]^2 + \delta^2(u-u_0)^2}},$$

d'où il résulte que, pour  $w$  tendant vers  $w_0$  suivant la courbe  $I_k$ ,

$$\lim \left| \frac{w-w_0}{F_1(w)-F_1(w_0)} \right| = \frac{1}{|B|} \sqrt{\frac{1+\lambda_k^2}{(\gamma+\lambda_k)^2 + \delta^2}} < +\infty.$$

On a donc, d'après (2), (3) et (4),

$$\lim \left| \frac{F(w)-F_1(w)}{F_1(w)-F_1(w_0)} \right| = 0$$

ce qui exprime précisément que le rayon  $\tau_k$  est tangent à la courbe  $J_k$  au point  $z_0$ .

Puisque les trois quantités  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont toutes différentes, il existe au moins deux valeurs différentes de  $k$  pour lesquelles  $\lambda_k \neq -\gamma$  et, par suite, le rayon  $\tau_k$  est tangent à la courbe  $J_k$ .

Lorsque  $\delta \neq 0$ , la relation  $z' = F_1(w)$  effectue une transformation affine des deux plans  $w$  et  $z$ , tandis que dans le cas  $\delta = 0$  tous les points  $z'$ , correspondant aux points arbitraires du plan  $w$ , sont situés sur une même droite. Il en résulte, d'après ce qui précède, que dans le cas considéré  $\delta \neq 0$  et, par suite, pour chaque valeur de  $k$  le rayon  $\tau_k$  est tangent à la courbe  $J_k$  au point  $z_0$ . Donc,  $F_1(w)$  étant une fonction linéaire de  $u$  et  $v$ , pour chaque valeur de  $k$ , le point  $z' = F_1(w)$  décrit le rayon  $\tau_k$ , lorsque le point  $w$  décrit le rayon  $T_k$ . Par suite, d'après (6),  $F_1(w)$  est une fonction linéaire de l'argument  $w$ , c'est-à-dire  $F_1(w) = \alpha + \beta w$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. On voit donc d'après (3) et (5), que la fonction  $F(w)$  est monogène au point  $w_0$ , c. q. f. d.

Nous établirons maintenant une condition suffisante pour que la dérivée  $F'(w)$  existe et soit sommable presque partout dans un ensemble mesurable. A cet effet nous allons établir un lemme qui nous sera utile plusieurs fois.

**Lemme 2.** *Lorsque la fonction  $F(w)$  possède une dérivée finie  $F'(w)$  presque partout dans un ensemble mesurable  $E$ , le module de cette dérivée est une fonction à carré sommable dans  $E$ . (Ce lemme n'est vrai que dans le cas où la fonction  $F(w) = z$  effectue une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points des domaines  $\Omega$  et  $D$ .)*

Sans restreindre la généralité de la démonstration on peut supposer que  $F'(w) \neq 0$  presque partout dans  $E$ . Dans ce cas on peut considérer ce lemme comme une conséquence du lemme 3 du § 7 de mon mémoire publié aux *Mathematische Annalen* [t. 95 (1926), p. 665]; il suffit de remplacer la condition de conservation des angles par la condition plus restrictive d'existence de la dérivée finie  $F'(w)$ , différente de zéro, et de prendre la quantité  $|F'(w)|$  au lieu de

$$L(w) = \limsup_{\Delta w \rightarrow 0} \left| \frac{F(w + \Delta w) - F(w)}{\Delta w} \right|.$$

Dans le lemme cité j'ai supposé que l'ensemble  $E$  coïncide avec l'intérieur d'un domaine, mais cette restriction n'est pas essentielle; la démonstration reste la même, si l'on remplace un domaine par un ensemble mesurable  $E$  quelconque. Le lemme 2 de ce paragraphe peut être déduit aussi des considérations de M. H. Bohr. D'après ces considérations on obtient, de plus, que

$$\int_E |F'(w)|^2 du dv$$

est égale à la mesure de l'image de  $E$  dans le plan  $z$ <sup>16</sup>).

<sup>16</sup> H. Bohr, *Über streckenentreue und konforme Abbildung*, Math. Zeitschrift 1 (1918), p. 416 (Hilfssatz 7). — La démonstration directe du lemme 2 est publiée dans le Bulletin de la Société Mathématique de France; D. Menchoff, *Sur les fonctions monogènes*, 59 (1931), p. 146.

En tenant compte du théorème du § 4 et des lemmes 1 et 2 de ce paragraphe, on obtient immédiatement un lemme qui joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème énoncé à la fin du § 1.

*Lemme 3. L'ensemble  $E$  et la fonction  $F(w)$  ayant la même signification que plus haut, supposons que  $\text{mes } E > 0$  et que la propriété  $K'$  est remplie en chaque point  $z$  de l'ensemble  $E$  qui est l'image de  $E$  dans le plan  $z$ .*

*Dans ces conditions la fonction  $F(w)$  possède presque partout dans  $E$  une dérivée finie dont le module  $|F'(w)|$  est une fonction à carré sommable dans  $E$ .*

### § 6.

Dans la démonstration du théorème fondamental, énoncé à la fin du § 1, nous nous servirons de la remarque suivante. Nous supposons que les conditions du théorème sont vérifiées. Soit  $\Gamma$  un cercle quelconque situé à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Désignons par  $Q$  l'ensemble des points, contenus dans  $\Gamma$ , au voisinage desquels la fonction  $F(w)$  n'est pas partout holomorphe.  $Q$  est un ensemble fermé qui ne contient de points isolés que sur la circonférence du cercle  $\Gamma$ . Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que l'ensemble  $Q$  ne contient pas de points à l'intérieur de  $\Gamma$  quelle que soit la position de ce cercle à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

Pour cela nous allons considérer les propriétés de l'ensemble  $Q$ . Soit  $P$  l'image de  $Q$  dans le plan  $z$ . Par hypothèse, chaque point de l'ensemble  $P$ , sauf peut-être les points d'un ensemble dénombrable, possède la propriété  $K'$ . Il en résulte, d'après le lemme du § 2, qu'il existe un nombre positif  $\sigma$  et une portion  $\Pi$  de l'ensemble  $P$  dans laquelle la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près.

Nous supposons, dans la suite, que le cercle  $\Gamma$  a une position fixe. Considérons les divers segments rectilignes situés dans le cercle  $\Gamma$ . La correspondance entre les points des domaines  $\Omega$  et  $D$  étant biunivoque et bicontinue, les images dans le plan  $z$  de ces segments sont des courbes de Jordan simples. Dans la suite il nous sera nécessaire de considérer les propriétés de ces courbes. Nous démontrerons le lemme suivant.

*Lemme. Supposons que la fonction  $F(w)$  est monogène partout dans un cercle  $\Gamma$ , intérieur au domaine  $\Omega$ , sauf aux points appartenant à un ensemble parfait  $Q_0$ , situé dans  $\Gamma$ . En désignant par  $\Pi$  l'image dans le plan  $z$  de l'ensemble  $Q_0$ , nous supposons, de plus, que dans l'ensemble  $\Pi$  la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près, où  $\sigma$  est un nombre positif fixe inférieur à  $\pi/1600$ .*

Dans ces conditions il existe dans le plan  $w$  deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , perpendiculaires l'une à l'autre, telles que la partie commune avec  $\Gamma$  de chaque droite parallèle à  $\Delta_1$  ou à  $\Delta_2$ , possède dans le plan  $z$  une image de longueur finie, exception faite des droites dont les points d'intersection avec  $\Delta_2$  (pour les droites parallèles à  $\Delta_1$ ) ou avec  $\Delta_1$  (pour les droites parallèles à  $\Delta_2$ ) forment des ensembles de mesure linéaire nulle.

Démonstration. D'après la condition du lemme, la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près dans l'ensemble  $\Pi$ , où  $\sigma < \frac{\pi}{1600}$ . Par suite, on peut trouver, d'une part, des rayons  $\tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dépendant des points  $z$  de l'ensemble  $\Pi$  et, d'autre part, des rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dépendant des points  $w$  de l'ensemble  $Q_0$ , qui vérifient les conditions a),  $\beta$ ), a), b) et c) de la définition 1 du § 2.

En numérotant convenablement les rayons  $T_i(w)$ , on peut trouver, en vertu des conditions a), c) et  $\beta$ ), deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , perpendiculaires l'une à l'autre et situées dans le plan  $w$ , telles que pour chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q_0$  subsistent les trois conditions:

1° Les rayons  $T_1(w)$  et  $T_2(w)$  sont situés du même côté de la droite, passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_1$ .

2° Les rayons  $T_2(w)$  et  $T_3(w)$  sont situés du même côté de la droite, passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_2$ .

3° Les angles formés par les rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , avec chacune des deux directions de chaque droite  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont supérieurs à  $20\sigma$ .

$z$  étant un point quelconque de l'ensemble  $\Pi$ , désignons par  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les points situés respectivement sur les rayons  $\tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , à la distance  $\sigma'$  du point  $z$ , où  $\sigma'$  est le nombre qui figure dans la définition 1 du § 2, [condition b)]. On a donc

$$(1) \quad \overline{zz_i} = \sigma' \quad (i = 1, 2, 3).$$

Soient  $J_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les images dans le plan  $w$  des segments  $\overline{zz_i}$ . En comparant les propriétés 1°, 2° et 3° des droites  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  avec la condition b)<sup>17)</sup>, on obtient une quatrième propriété des droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

4° Pour chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q_0$ , les courbes  $J_1(w)$  et  $J_2(w)$  sont situées du même côté de la droite passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_1$ , tandis que les courbes  $J_2(w)$ ,  $J_3(w)$  sont situées du même côté de la droite passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_2$ .

Posons  $w = u + iv$  et considérons  $u$  et  $v$  comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires du point  $w$ . On peut toujours supposer que dans le plan  $w$  les axes de coordonnées  $u$  et  $v$  coïncident respectivement avec les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

<sup>17)</sup> Définition 1 du § 2.



Désignons par  $\delta_1(v)$  et  $\delta_2(u)$  les cordes du cercle  $\Gamma$  parallèles respectivement à l'axe des  $u$  et à l'axe des  $v$  et situées respectivement à la distance  $v$  et  $u$  de ces axes<sup>18)</sup>.

Désignons par  $\lambda'(v)$  et  $\lambda''(u)$  les images des cordes  $\delta_1(v)$  et  $\delta_2(u)$  dans le plan  $z$ . Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer que les courbes  $\lambda'(v)$  et  $\lambda''(u)$  sont rectifiables pour toutes les valeurs de  $v$  et  $u$ , sauf peut-être les valeurs appartenant à des ensembles de mesure nulle. La démonstration étant la même pour les courbes  $\lambda'(v)$  et  $\lambda''(u)$ , il suffit de démontrer la proposition pour les courbes  $\lambda'(v)$ .

Posons

$$F(w) = x(u, v) + iy(u, v).$$

Puisque tous les points de l'ensemble  $\Gamma - Q_0$  sont des points intérieurs à un ensemble où la fonction  $F(w)$  est monogène, les quatre dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

existent et sont continues en chaque point de  $\Gamma - Q_0$ . En vertu du lemme 2 du § 5, on voit, de plus, que la fonction  $|F'(w)|$  et, par suite, les fonctions (2) sont sommables dans l'ensemble  $\Gamma - Q_0$ . Posons

$$\varphi_1(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \varphi_2(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}$$

aux points de l'ensemble  $\Gamma - Q_0$  et  $\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = 0$  en dehors de cet ensemble. Les fonctions  $\varphi_1(u, v)$  et  $\varphi_2(u, v)$  sont sommables dans le cercle  $\Gamma$ . Donc, en vertu d'un théorème de M. Fubini<sup>19)</sup>, les fonctions  $\varphi_1(u, v)$  et  $\varphi_2(u, v)$ , considérées comme des fonctions d'une seule variable  $u$  sont sommables pour toutes les valeurs constantes de  $v$ , sauf des valeurs appartenant à un ensemble  $e$  de mesure nulle,

$$(3) \quad \text{mes } e = 0^{20)}.$$

Désignons par  $q(v)$  l'ensemble des points situés sur la corde  $\delta_1(v)$  et appartenant à l'ensemble  $Q_0$ .  $q(v)$  est un ensemble fermé. Désignons par  $u'_s(v)$  et  $u''_s(v)$ ,  $u'_s(v) < u''_s(v)$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ , les coordonnées  $u$  des extrémités des segments contigus de l'ensemble  $q(v)$  et soient  $U'(v)$  et  $U''(v)$ ,  $U'(v) < U''(v)$ , les coordonnées  $u$  des extrémités de la corde  $\delta_1(v)$ . Il résulte de ce qui précède que

$$\int_{U'(v)}^{U''(v)} |\varphi_1(u, v)| du < +\infty, \quad \int_{U'(v)}^{U''(v)} |\varphi_2(u, v)| du < +\infty$$

pour toutes les valeurs de  $v$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $e$ . Puisque les fonctions  $\varphi_1(u, v)$  et  $\varphi_2(u, v)$  sont égales à zéro dans l'en-

<sup>18)</sup> Nous prenons les valeurs algébriques de ces distances.

<sup>19)</sup> Voir, par exemple, Carathéodory, *Reelle Funktionen*, Leipzig (1918), p. 632.

<sup>20)</sup> Nous désignons, bien entendu, par  $\text{mes } e$  la mesure linéaire de l'ensemble  $e$ .

semble  $q(v)$  et coïncident avec les dérivées  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial y/\partial u$  à l'intérieur des segments contigus de cet ensemble, on obtient les inégalités

$$(4) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \int_{u_s'(v)}^{u_s''(v)} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| du < +\infty, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \int_{u_s'(v)}^{u_s''(v)} \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right| du < +\infty.$$

(Lorsque l'ensemble  $q(v)$  ne possède qu'un nombre fini de segments contigus, les sommes dans les inégalités (4) ne contiennent qu'un nombre fini de termes.)

Désignons par  $\pi(v)$  l'image de l'ensemble  $q(v)$  dans le plan  $z$ .  $\pi(v)$  est un ensemble fermé, situé sur la courbe  $\lambda'(v)$ .

Les points  $u_s'(v) + iv$  et  $u_s''(v) + iv$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ , sont les extrémités des segments contigus de l'ensemble  $q(v)$ . Nous désignerons par  $z_s'(v)$  et  $z_s''(v)$  leurs images dans le plan  $z$ , et soit  $l_s(v)$  l'arc de la courbe  $\lambda'(v)$  dont les extrémités sont les points  $z_s'(v)$  et  $z_s''(v)$ . Les courbes  $l_s(v)$  sont des arcs contigus de l'ensemble  $\pi(v)$  et les points de ces courbes, extrémités exclues, appartiennent à l'ensemble  $D' - \Pi$ , où  $D'$  est l'image, dans le plan  $z$ , du cercle  $\Gamma$ . Puisque les dérivées  $\partial x/\partial u$  et  $\partial y/\partial u$  sont continues aux points de l'ensemble  $\Gamma - Q_0$ , elles le sont en tous les points  $w = u + iv$  dont les images sont à l'intérieur des arcs  $l_s(v)$ .

Considérons une corde quelconque  $\delta_s(v)$  qui correspond à une valeur de  $v$  qui n'appartient pas à l'ensemble  $e$ . On trouve, en vertu des inégalités (4) et de l'inégalité évidente

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} \leq \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial u} \right|,$$

que chacune des intégrales

$$\int_{u_s'(v)}^{u_s''(v)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du$$

possède une valeur finie et, de plus,

$$(5) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \int_{u_s'(v)}^{u_s''(v)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du < +\infty.$$

En résumant les considérations précédentes on voit que chacune des courbes  $l_s(v)$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ , est rectifiable et sa longueur s'obtient de la formule

$$\text{longueur de } l_s(v) = \int_{u_s'(v)}^{u_s''(v)} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du.$$

On obtient donc, en vertu de (5),

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{longueurs de } l_i(v) < +\infty,$$

lorsque  $v$  n'appartient pas à l'ensemble  $e$ .

Partageons chacune des courbes  $\lambda'(v)$  en un nombre fini d'arcs  $\lambda_k(v)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, r$ , tels que le diamètre de chacun de ces arcs soit inférieur à  $\sigma'$ , où  $\sigma'$  est le nombre défini précédemment<sup>21)</sup>. On peut toujours supposer que chacun des arcs  $\lambda_k(v)$  ou bien fait partie d'une des courbes  $l_i(v)$ , ou bien possède des extrémités qui appartiennent à l'ensemble  $\pi(v)$  et, par suite, à l'ensemble  $\Pi$ .

Désignons par  $\pi_k(v)$  la partie de l'ensemble  $\pi(v)$  située sur l'arc  $\lambda_k(v)$  et soit  $q_k(v)$  l'image de l'ensemble  $\pi_k(v)$  dans le plan  $w$ . Nous allons démontrer que pour chaque valeur de  $v$  qui n'appartient pas à l'ensemble  $e$  chacun des arcs  $\lambda_k(v)$  est rectifiable. Lorsque  $\lambda_k(v)$  est une partie d'une des courbes  $l_i(v)$ , cet arc possède une longueur finie, puisque  $l_i(v)$  est rectifiable. Dans le cas contraire les extrémités de l'arc  $\lambda_k(v)$  appartiennent à l'ensemble  $\pi(v)$  et, par suite, à l'ensemble  $\pi_k(v)$ .

En vertu des conditions  $\alpha)$  et  $\beta)$ <sup>22)</sup>, on voit qu'il existe dans le plan  $z$  une direction  $\tau$  possédant la propriété suivante:

Si  $z$  est un point quelconque de l'ensemble  $\Pi$  et si  $\tau(z)$  est un rayon issu du point  $z$  et ayant la même direction que  $\tau$ , ce rayon  $\tau(z)$  se trouve à l'intérieur de l'angle  $[\tau_1(z), \tau_2(z)]$  et l'on a les inégalités

$$(7) \quad 200\sigma < [\tau(z), \tau_1(z)] < \frac{\pi}{2}, \quad 200\sigma < [\tau(z), \tau_2(z)] < \frac{\pi}{2}.$$

Il résulte, d'après la propriété 4<sup>e</sup> des droites  $A_1, A_2$  et de la définition des segments  $\delta_1(v)$ , que les courbes  $J_1(w)$  et  $J_2(w)$  sont situées du même côté du segment  $\delta_1(v)$ , lorsque le point  $w$  appartient à l'ensemble  $q_k(v)$ .

Soit  $z$  un point quelconque de l'ensemble  $\pi_k(v)$ . D'après la définition des points  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les segments  $\overline{z z_i}$  sont situés dans le plan  $z$  et l'on a

$$(8) \quad \overline{z z_i} = \sigma' \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les courbes  $J_i(w)$  sont les images dans le plan  $w$  des segments  $\overline{z z_i}$ . Donc, pour un point  $z$  quelconque de l'ensemble  $\pi_k(v)$ , les segments  $\overline{z z_1}$  et  $\overline{z z_2}$  sont situés du même côté de la courbe  $\lambda_k(v)$ . Puisque les

<sup>21)</sup> Le nombre  $r$  dépend en général de  $v$ .

<sup>22)</sup> Définition 1 du § 2.

points  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se trouvent respectivement sur les rayons  $\tau_i(z)$ , il résulte donc des inégalités (7) que tous les points de la courbe  $\lambda_k(v)$ , suffisamment rapprochés du point  $z$ , sont extérieurs à un angle  $\omega(z)$  (fig. 2) d'ouverture  $200\sigma$  et de bissectrice  $\tau(z)$ . Le diamètre de la courbe  $\lambda_k(v)$  étant inférieur à  $\sigma'$ , on tire des relations (8) que cette courbe  $\lambda_k(v)$  est entièrement extérieure à l'angle  $\omega(z)$ .

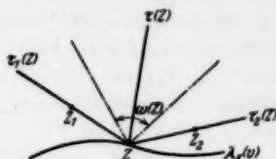


Fig. 2.

Par définition, l'ensemble  $\pi_k(v)$  est la partie commune de l'ensemble  $\pi(v)$  et de la courbe  $\lambda_k(v)$ . Nous allons démontrer que sur chaque droite, parallèle à la direction  $\tau$ , il y a au plus un point de cet ensemble  $\pi_k(v)$ .

En effet, lorsque les deux points  $z'$  et  $z''$  appartiennent à l'ensemble  $\pi_k(v)$ , le point  $z'$  est extérieur à l'angle  $\omega(z'')$  et le point  $z''$  est extérieur à l'angle  $\omega(z')$ . Les côtés de ces deux angles étant parallèles et leurs bissectrices  $\tau(z'')$  et  $\tau(z')$  ayant la même direction que  $\tau$ , il en résulte que les points  $z'$  et  $z''$  ne se trouvent pas sur une même droite parallèle à la direction  $\tau$  (fig. 3).

Fixons dans le plan  $z$  les axes des coordonnées rectangulaires  $(X, Y)$  de telle façon que la direction positive de l'axe  $Y$  coïncide avec la direction  $\tau$ . Désignons par  $\omega$  la projection sur l'axe des  $X$  de l'ensemble  $\pi_k(v)$  et définissons la fonction  $Y = \varphi(X)$  de la manière suivante:

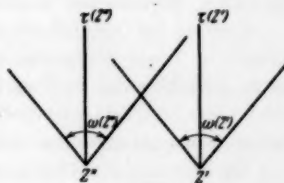


Fig. 3.

I. Lorsque  $X$  appartient à l'ensemble  $\bar{\omega}$ ,  $\varphi(X)$  est égale à la coordonnée  $Y$  du point de l'ensemble  $\pi_k(v)$  dont la première coordonnée est  $X$ .

II.  $\varphi(X)$  varie linéairement dans chaque intervalle contigu de l'ensemble  $\bar{\omega}$ , en restant continue aux extrémités de cet intervalle.

En désignant par  $X_0$  et  $X_1$  les extrémités de l'ensemble  $\bar{\omega}$ , on voit que la fonction  $\varphi(X)$  est continue dans l'intervalle  $(X_0, X_1)$  et ne prend qu'une seule valeur pour chaque valeur de  $X$  dans cet intervalle.

Puisque pour chaque point  $z$  de l'ensemble  $\pi_k(v)$  la courbe  $\lambda_k(v)$  est extérieure à l'angle  $\omega(z)$ , on obtient de la condition I et de la définition de l'angle  $\omega(z)$ :

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 100\sigma\right) < \frac{\varphi(X') - \varphi(X'')}{X' - X''} < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 100\sigma\right)$$

pour des valeurs  $X'$  et  $X''$  quelconques de l'ensemble  $\bar{\omega}$ . En tenant compte de la condition II, on voit ensuite que cette inégalité subsiste pour toutes les valeurs  $X'$  et  $X''$  de l'intervalle  $(X_0, X_1)$ .

La fonction  $\varphi(X)$  possède donc des nombres dérivés bornés dans l'intervalle  $(X_0, X_1)$ . Par suite, il existe presque partout dans l'intervalle  $(X_0, X_1)$  une dérivée  $\varphi'(X)$  qui est sommable dans cet intervalle et l'on a, de plus, en vertu d'un théorème connu de M. Lebesgue,

$$\varphi(X) - \varphi(X_0) = \int_{X_0}^X \varphi'(X) dX$$

pour toutes les valeurs de  $X$  dans l'intervalle  $(X_0, X_1)$ . Il en résulte que la courbe définie par l'équation  $Y = \varphi(X)$  est rectifiable.

L'ensemble fermé  $\pi_k(v)$  étant situé sur cette courbe et les  $l_s(v)$  étant les arcs contigus de l'ensemble  $\pi(v)$  sur la courbe  $\lambda'(v)$ , il résulte de l'inégalité (6) que la courbe  $\lambda_k(v)$  est rectifiable.

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas où il existe sur la courbe  $\lambda_k(v)$  des points intérieurs appartenant à l'ensemble  $\pi(v)$ . Dans le cas contraire la courbe  $\lambda_k(v)$  est une partie d'un des arcs  $l_s(v)$  et, par suite, possède une longueur finie, puisque les  $l_s(v)$  sont rectifiables.

Comme les considérations précédentes sont valables pour toutes les valeurs de  $v$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $e$ , on voit, en vertu de la définition des courbes  $\lambda_k(v)$  et de la relation (3), que les courbes  $\lambda'(v)$  sont rectifiables pour toutes les valeurs de  $v$ , sauf peut-être les valeurs appartenant à un ensemble de mesure nulle.

On démontre de la même manière que les courbes  $\lambda''(u)$  sont rectifiables pour toutes les valeurs de  $u$ , sauf peut-être les valeurs appartenant à un ensemble de mesure nulle. La démonstration du lemme est donc achevée.

Complément au lemme. Dans l'énoncé du lemme on peut prendre pour les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites perpendiculaires quelconques qui vérifient les conditions 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup>.

## § 7.

Pour achever la démonstration du théorème énoncé à la fin du § 1 nous devons nous servir du lemme 3 du § 5 et d'un autre lemme fondamental qui sera démontré dans le § 9. Mais tout d'abord il nous faut considérer les propriétés de certaines figures planes que nous définirons dans ce paragraphe.

Définition 1. Nous dirons qu'une courbe  $\lambda$ , située dans un plan, est un segment à  $\sigma$  près, lorsqu'elle est rectifiable et, de plus,

$$(1 - \sigma) \text{ longueur de } \lambda < \overline{M_1 M_2}$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont les extrémités de la courbe  $\lambda$ .

Définition 2. Nous dirons qu'un domaine plan est un *presque-parallélogramme du type (1,  $\sigma$ )*, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées:

$\alpha$ ) La frontière de ce domaine est une courbe de Jordan fermée simple.

$\beta$ ) Il existe sur la frontière de ce domaine deux segments rectilignes  $\overline{w_1 w_3}$  et  $\overline{w_4 w_2}$ , parallèles l'un à l'autre<sup>23)</sup>.

$\gamma$ ) Si l'on désigne respectivement par  $\smile w_1 w_4$  et  $\smile w_3 w_2$  les arcs situés sur la frontière du domaine considéré et compris entre les points  $w_1, w_4$  et  $w_3, w_2$  et si  $w'$  et  $w''$  sont des points quelconques, situés respectivement sur les courbes  $\smile w_1 w_4$  et  $\smile w_3 w_2$ , on a les inégalités

$$[\overline{w_1 w_4}, \widehat{\smile w_1 w_4} w'] < 3 \sqrt[8]{\sigma}, \quad [\overline{w_3 w_2}, \widehat{\smile w_3 w_2} w''] < 3 \sqrt[8]{\sigma}.$$

$\delta$ )

$$[\overline{w_1 w_4}, \widehat{\smile w_1 w_4} w_3 w_2] < 3 \sqrt[8]{\sigma}.$$



Fig. 4.

Pour un presque-parallélogramme du type (1,  $\sigma$ ) on peut démontrer le lemme suivant.

Lemme 1. En conservant les notations précédentes, supposons qu'on puisse trouver sur les segments  $\overline{w_1 w_3}$  et  $\overline{w_4 w_2}$  deux points  $w_{12}$  et  $w_{34}$  tels que

$$(1) \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma} > [\overline{w_1 w_4}, \widehat{\smile w_1 w_4} w_{12} w_{34}] > 25 \sqrt[8]{\sigma}, \quad \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma} > [\overline{w_3 w_2}, \widehat{\smile w_3 w_2} w_{12} w_{34}] > 25 \sqrt[8]{\sigma}.$$

Dans ces conditions la distance entre les droites sur lesquelles se trouvent les segments  $\overline{w_1 w_3}$  et  $\overline{w_4 w_2}$  est inférieure à chacune des quantités

$$(2) \quad \frac{\overline{w_1 w_3}}{\sin 25 \sqrt[8]{\sigma}}, \quad \frac{\overline{w_4 w_2}}{\sin 25 \sqrt[8]{\sigma}}.$$

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, que  $\overline{w_{34} w_2} \leq \overline{w_{12} w_1}$ . On a alors, en vertu de  $\delta$ ) et (1),  $\overline{w_1 w_{12}} \leq \overline{w_4 w_{34}}$ . Traçons par les points  $w_{12}$  et  $w_{34}$  deux droites parallèles respectivement aux segments  $\overline{w_1 w_4}$  et  $\overline{w_3 w_2}$ . On voit immédiatement que ces deux droites possèdent respectivement des points communs  $w'$  et  $w''$  avec les segments  $\overline{w_1 w_4}$  et  $\overline{w_3 w_2}$ , d'où il résulte

$$\overline{w_{12} w'} \leq \overline{w_1 w_2}, \quad \overline{w_{34} w''} \leq \overline{w_3 w_4}.$$

<sup>23)</sup> Nous choisissons les notations de telle façon que les points  $w_1, w_3, w_2$  et  $w_4$  soient situés dans un ordre cyclique.

En tenant compte des inégalités (1), on voit par la considération des triangles  $w_1, w_3, \omega''$  et  $w_3, w_1, \omega'$  que la distance entre les droites sur lesquelles se trouvent les segments  $w_1, w_2$  et  $w_4, w_3$  est inférieure à la plus petite des quantités

$$\frac{w_1, w_3 \omega''}{\sin 25 \sqrt[8]{\sigma}}, \quad \frac{w_3, w_1 \omega'}{\sin 25 \sqrt[8]{\sigma}}$$

et, par suite, inférieure à chacune des quantités (2), c. q. f. d.

Nous avons encore besoin d'une troisième définition.

Définition 3. Nous dirons qu'un domaine plan est un *presque-parallélogramme du type (2,  $\sigma$ )*, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées:

a) La frontière de ce domaine est une courbe de Jordan fermée simple.

b) Il existe sur la frontière de ce domaine deux segments rectilignes  $\overline{x_1 x_4}$  et  $\overline{x_3 x_2}$  sans points communs et tels que

$$[\widehat{x_1 x_4, x_3 x_2}] < \sqrt[8]{\sigma}^{34}.$$

c) Les arcs  $\frown z_1 z_2$  et  $\frown z_4 z_3$  de la frontière, compris respectivement entre les points  $z_1, z_2$  et  $z_4, z_3$  sont des segments à  $\sigma$  près.

d) 
$$[\widehat{x_1 x_2, x_4 x_3}] < \sqrt[8]{\sigma}.$$

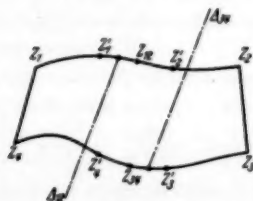


Fig. 5.

Désignons par  $z_1 z_2 z_3 z_4$  le presque-parallélogramme en question. On peut démontrer les lemmes suivants.

Lemme 2. Lorsque  $z_1 z_2 z_3 z_4$  est un presque-parallélogramme du type (2,  $\sigma$ ), les inégalités

$$\overline{x_1 x_4} < \sqrt[8]{\sigma} \text{ longueur de } \frown z_4 z_3, \quad \sqrt[8]{\sigma} < \frac{\pi}{1600}$$

entraînent l'inégalité

$$\begin{aligned} \text{longueur de } \frown z_4 z_3 &> (1 - 10 \sqrt[8]{\sigma}) \text{ longueur de } \frown z_1 z_2 \\ &> \frac{1}{2} \text{ longueur de } \frown z_1 z_2. \end{aligned}$$

<sup>34)</sup> Nous choisissons les notations de telle façon que les points  $z_1, z_2, z_3, z_4$  soient situés dans un ordre cyclique.



Lemme 3. Supposons qu'un presque-parallélogramme  $z_1 z_2 z_3 z_4$  du type  $(2, \sigma)$  vérifie les conditions

$$\sqrt[8]{\sigma} < \frac{\pi}{1600}, \quad \overline{s_1 s_4} < \sqrt[8]{\sigma} \cdot \text{longueur de } \mathcal{C}_1 z_1.$$

Désignons par  $\mathcal{C}_1' z_1'$  l'arc de longueur égale à  $\sqrt[8]{\sigma} \cdot \text{longueur de } \mathcal{C}_1 z_1$  qui est situé sur la courbe  $\mathcal{C}_1 z_1$  et possède le même centre  $z_1$ , que cette courbe<sup>25)</sup>; de la même manière, désignons par  $\mathcal{C}_4' z_4'$  l'arc de longueur égale à  $\sqrt[8]{\sigma} \cdot \text{longueur de } \mathcal{C}_4 z_4$  qui est situé sur la courbe  $\mathcal{C}_4 z_4$  et possède le même centre  $z_4$ , que cette courbe. Supposons, de plus, qu'il existe dans le plan du presque-parallélogramme  $z_1 z_2 z_3 z_4$  un rayon rectiligne  $\Delta_{12}$  (ou un rayon  $\Delta_{34}$ ) qui possède les propriétés suivantes:

a) L'extrémité du rayon  $\Delta_{12}$  (ou bien de  $\Delta_{34}$ ) se trouve sur la courbe  $\mathcal{C}_1' z_1'$  (ou bien sur  $\mathcal{C}_4' z_4'$ ).

b) Le rayon  $\Delta_{12}$  (ou  $\Delta_{34}$ ) se trouve du même côté de la courbe  $\mathcal{C}_1 z_1$  (ou  $\mathcal{C}_4 z_4$ ) que le presque-parallélogramme  $z_1 z_2 z_3 z_4$ .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 25 \sqrt[8]{\sigma} &< [\Delta_{12}, \widehat{s_1 s_2}] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma} \\ &(\text{ou } 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\Delta_{34}, \widehat{s_3 s_4}] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}). \end{aligned}$$

Dans ces conditions le rayon  $\Delta_{12}$  (ou  $\Delta_{34}$ ) possède des points communs avec la courbe  $\mathcal{C}_1 z_1$  (ou  $\mathcal{C}_4 z_4$ )<sup>26)</sup>.

Nous omettons les démonstrations de ces deux lemmes qui sont tout à fait élémentaires.

Lemme 4. En conservant les notations précédentes, supposons que

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{\sigma} &< \frac{\pi}{1600}, \quad 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{s_1 s_2}, \widehat{s_1 s_4}] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}, \\ \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma}} \overline{s_1 s_4} &< \text{longueur de } \mathcal{C}_1 z_1 < \frac{2}{\sqrt[8]{\sigma}} \overline{s_1 s_4}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions l'aire du presque-parallélogramme  $z_1 z_2 z_3 z_4$  est supérieure à

$$\frac{1}{8} \sqrt[4]{\sigma} (\text{longueur de } \mathcal{C}_1 z_1)^2.$$

On obtient immédiatement la démonstration de ce lemme en tenant compte des inégalités

$$\begin{aligned} \text{l'aire du triangle } z_1 z_2 z_4 &> \frac{1}{2} \overline{s_1 s_2} \cdot \overline{z_1 z_4} \sin 25 \sqrt[8]{\sigma} \\ &> 5 \cdot \overline{s_1 s_2}^2 \cdot \sqrt[4]{\sigma}, \\ \frac{1}{2} \text{ longueur de } \mathcal{C}_1 z_1 &< \overline{s_1 s_2}, \\ \frac{1}{2} \text{ longueur de } \mathcal{C}_4 z_4 &< \overline{s_4 s_2} < 2 \overline{s_1 s_2}, \end{aligned}$$

<sup>25)</sup> Nous dirons qu'un point  $z'$ , situé sur une courbe, est le centre de cette courbe, lorsque  $z'$  partage la courbe en deux parties de longueurs égales.

<sup>26)</sup> Voir la fig. 5.

et en remarquant que, d'une part, les distances des points de la courbe  $\zeta_1 z_3$  au segment  $\overline{z_1 z_2}$  sont inférieures à  $\overline{z_1 z_2} \cdot \sqrt{\sigma}$  et que, d'autre part, les distances des points de la courbe  $\zeta_4 z_3$  au segment  $\overline{z_4 z_2}$  sont inférieures à  $\overline{z_4 z_2} \cdot \sqrt{\sigma}$ .

Nous signalerons encore un lemme qui est tout à fait évident.

Lemme 5. *Étant donnés trois segments  $\overline{z_1 z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_4}$  et  $\overline{z_2 z_3}$ , supposons que*

$$\overline{z_1 z_4} < 2\sqrt[8]{\sigma} \cdot \overline{z_1 z_2}, \quad [\widehat{\overline{z_1 z_4} \overline{z_2 z_3}}] < \sqrt[8]{\sigma},$$

$$25\sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{\overline{z_1 z_2} \overline{z_1 z_4}}] < \pi - 25\sqrt[8]{\sigma}.$$

*Dans ces conditions les segments  $\overline{z_1 z_4}$  et  $\overline{z_2 z_3}$  n'ont pas de points communs et, de plus,*

$$\overline{z_2 z_3} > \sqrt[8]{\sigma} \cdot \overline{z_1 z_2}.$$

Nous ajouterons encore la définition suivante:

Nous dirons que les courbes  $\zeta_1 z_2$  et  $\zeta_4 z_3$  sont des *bases* du presque-parallélogramme  $z_1 z_3 z_4$ .

### § 8.

Nous considérerons dans ce paragraphe certaines propriétés des courbes rectifiables et des ensembles parfaits qui nous seront nécessaires pour la démonstration du lemme fondamental du § 9. Nous rappellerons tout d'abord certaines définitions. Considérons un ensemble parfait partout discontinu, situé dans un plan. On définit avec M. Painlevé la *longueur* d'un tel ensemble de la manière suivante:

Définition 1. On commence par enfermer tous les points de l'ensemble dans des contours fermés simples et rectifiables, en nombre fini, extérieurs l'un à l'autre. La longueur de l'ensemble sera alors la plus petite des limites de la somme des longueurs de ces contours, lorsque leurs dimensions tendent simultanément vers zéro.

En même temps, nous définirons la mesure linéaire d'un ensemble  $E$ , situé sur une courbe rectifiable simple. A cet effet, on établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de cette courbe et d'un certain segment rectiligne de telle façon que la longueur d'un arc compris entre deux points quelconques de la courbe soit égale à la distance entre les points correspondants sur le segment considéré. En désignant par  $E$  l'ensemble qui est formé des points du segment correspondant aux points de l'ensemble  $E$ , on suppose, par définition, que la mesure linéaire de l'ensemble  $E$  est égale à la mesure linéaire de l'ensemble  $E$ .

On peut définir directement la mesure linéaire d'un ensemble situé sur une courbe rectifiable, en procédant de la même manière que sur une droite à condition de se servir des arcs de la courbe au lieu des segments rectilignes.

On voit sans peine qu'un ensemble parfait de mesure linéaire nulle possède une longueur nulle au sens de M. Painlevé.

Réciproquement, tout ensemble parfait partout discontinu, situé sur une courbe rectifiable et possédant une longueur nulle au sens de M. Painlevé, est un ensemble de mesure linéaire nulle.

Nous nous servirons dans la suite de la définition suivante:

Définition 2. Nous dirons qu'un segment rectiligne, situé à l'intérieur du domaine  $\Omega$ , possède la propriété *N*, lorsque tout ensemble parfait, situé sur ce segment et ayant une mesure linéaire nulle, possède dans le plan  $z$  une image de longueur nulle au sens de M. Painlevé<sup>27</sup>.

Supposons que la fonction  $F(w)$ , définie comme précédemment, soit holomorphe à l'intérieur d'un certain domaine  $\Omega'$ , situé dans le domaine  $\Omega$ . Soit  $Q$  un ensemble parfait partout discontinu, situé à l'intérieur du domaine  $\Omega'$  et possédant une longueur nulle au sens de M. Painlevé. Il est facile de vérifier que, dans ces conditions, l'image de l'ensemble  $Q$  dans le plan  $z$  possède aussi une longueur nulle. Cette affirmation est valable même dans le cas où l'ensemble possède un nombre fini de points communs avec la frontière du domaine  $\Omega'$ . Il en résulte le lemme suivant:

Lemme 1. Supposons que la fonction  $F(w)$  est holomorphe à l'intérieur d'un domaine  $\Omega'$ , situé dans le domaine  $\Omega$ . Soit  $\overline{w_1 w_2}$  un segment rectiligne dont tous les points, sauf peut-être les extrémités, se trouvent à l'intérieur du domaine  $\Omega'$ .

Dans ces conditions le segment  $\overline{w_1 w_2}$  possède la propriété *N*.

Nous introduirons encore une définition:

Définition 3. Nous dirons qu'une courbe de Jordan simple  $\gamma_{z_1 z_2}$  est unie à  $\sigma$  près, lorsqu'elle est rectifiable et que, de plus, il existe sur cette courbe un ensemble parfait  $\bar{\omega}$  qui possède les propriétés suivantes:

- α)  $\text{mes lin } \bar{\omega} > (1 - \sigma) \text{ longueur de } \gamma_{z_1 z_2}$ ;
- β) les extrémités de la courbe  $\gamma_{z_1 z_2}$  appartiennent à l'ensemble  $\bar{\omega}$ ;
- γ) quels que soient les points  $z'$  et  $z''$  de la courbe  $\gamma_{z_1 z_2}$  dont l'un au moins appartient à l'ensemble  $\bar{\omega}$ , la partie de la courbe  $\gamma_{z_1 z_2}$ , com-

<sup>27</sup>) Voir aussi D. Menchoff, Sur la représentation conforme des domaines plans, Math. Annalen 95 (1926), p. 657.

prise entre les points  $z'$  et  $z''$ , est un segment à  $\sigma$  près (définition 1 du § 7);

δ)  $z'$  et  $z'''$  étant deux points quelconques de l'ensemble  $\bar{\omega}$  et  $z''$ ,  $z^{IV}$  étant deux points arbitraires de la courbe  $\gamma_1 z_2$ , on a l'une des inégalités

$$[\widehat{z' z''}, \widehat{z''' z^{IV}}] < \sigma \quad \text{ou} \quad [\widehat{z' z''}, \widehat{z^{IV} z''}] < \sigma,$$

suivant que le sens de parcours des arcs  $\gamma_1 z''$  et  $\gamma_1 z^{IV}$  est le même ou opposé.

L'ensemble  $\bar{\omega}$  sera dit le *noyau* de la courbe  $\gamma_1 z_2$ .

On peut démontrer le lemme suivant:

**Lemme 2.** Soit  $L$  une courbe rectifiable plane quelconque sur laquelle se trouve un ensemble parfait  $\pi_0$  de mesure linéaire positive et soit  $\sigma$  un nombre positif arbitraire. Il existe toujours sur la courbe  $L$  une courbe  $\gamma^{(1)} z^{(2)}$  qui est unie à  $\sigma$  près et dont le noyau se trouve sur l'ensemble  $\pi_0$ .

On peut d'ailleurs supposer que les extrémités de la courbe  $\gamma^{(1)} z^{(2)}$  soient des points de seconde espèce de l'ensemble  $\pi_0$ <sup>28)</sup>.

**Démonstration.** Soit  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  étant les coordonnées rectangulaires du point  $z$ . Supposons que la courbe  $L$  possède, en un point  $z$ , une tangente déterminée et désignons par  $\omega(z)$  la valeur non négative et inférieure à  $\pi$  de l'angle qui est formé par la direction positive de l'axe des  $x$  et par la direction positive choisie sur la tangente. Pour fixer les idées, nous supposerons que la direction positive sur la tangente correspond au parcours de la courbe  $L$  dans le sens de  $z_1$  vers  $z_2$ , où  $z_1$  et  $z_2$  sont les extrémités de la courbe  $L$ .

En supposant toujours qu'il existe une tangente déterminée au point  $z$  de la courbe  $L$ , prenons un autre point quelconque  $z'$  de cette courbe. Nous désignerons alors par  $T(z, z')$  la direction de la tangente au point  $z$  qui coïncide avec le sens de parcours de la courbe  $\gamma z'$  de  $z$  à  $z'$ .

Il est bien connu que la tangente et, par suite, la quantité  $\omega(z)$  est définie en tous les points de la courbe  $L$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble  $e$  de mesure linéaire nulle. Il en résulte qu'en tous les points  $z$  de la courbe  $L$ , qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $e$ , la valeur de l'angle  $[T(z, z'), \widehat{z z'}]$  tend vers zéro, lorsque le point  $z'$  tend vers  $z$ , en restant toujours sur la courbe  $L$ . D'autre part, le rapport

$$\frac{\text{longueur de } \gamma z'}{\overline{z z'}}$$

<sup>28)</sup> Un point d'un ensemble parfait, situé sur une courbe de Jordan simple, est dit un *point de seconde espèce*, lorsque ce point n'est pas extrémité d'un arc contenu à cet ensemble.

tend vers l'unité presque partout sur la courbe  $L$ , lorsque le point  $z'$  tend vers  $z$  de la même façon que précédemment<sup>29</sup>).

En se servant d'un théorème d'Egoroff<sup>30</sup>), on peut définir sur la courbe  $L$  un ensemble parfait  $\pi'$  de mesure linéaire supérieure à

$$\text{longueur de } L - \text{mes lin } \pi_0$$

sur lequel les quantités

$$[T(z, z'), \widehat{zz'}] \text{ et } \frac{\text{longueur de } \smile zz'}{\overline{zz'}}$$

tendent uniformément respectivement vers zéro et vers l'unité, lorsque  $z'$  tend vers  $z$  en restant toujours sur la courbe  $L$ . Il en résulte qu'on peut définir un nombre positif  $\delta$  tel que

$$(1) \quad [T(z, z'), \widehat{zz'}] < \frac{\sigma}{3}, \quad \frac{\text{longueur de } \smile zz'}{\overline{zz'}} - 1 < \sigma$$

pour tous les points  $z$  de l'ensemble  $\pi'$  et pour tous les points  $z'$  qui se trouvent sur la courbe  $L$  et vérifient l'inégalité

$$(2) \quad \text{longueur de } \smile zz' < \delta.$$

On peut d'ailleurs choisir le nombre  $\delta$  aussi petit que l'on veut.

<sup>29</sup>) Voir: Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2-ième édition, p. 201.

L'énoncé du théorème de M. Lebesgue est le suivant:

$z = x + iy$  étant un point quelconque de la courbe rectifiable  $\smile_1 z_2$ , on désigne par  $s$  la longueur de l'arc  $\smile_1 z$  de cette courbe. Alors la courbe  $\smile_1 z_2$  possède une tangente déterminée et, de plus, on a la relation

$$(a) \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

pour toutes les valeurs de  $s$ , sauf peut-être les valeurs d'un ensemble de mesure nulle.

On obtient immédiatement de ce théorème l'affirmation énoncée dans le texte, si l'on remarque que pour  $s = \text{longueur de } \smile_1 z$  la relation

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{\text{longueur de } \smile zz'}{\overline{zz'}} = 1$$

est une conséquence de la relation (a).

<sup>30</sup>) Egoroff, *Sur les suites de fonctions mesurables*, *Compt. Rend. de l'Académie des Sciences Paris* 152 (1912), p. 244.

L'énoncé du théorème d'Egoroff est le suivant:

Lorsque une suite de fonctions mesurables  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , définie dans un ensemble  $E$  de mesure positive, possède presque partout dans  $E$  une limite finie  $f(x)$  pour  $n \rightarrow \infty$ , on peut définir un ensemble parfait  $P$ , appartenant à  $E$  et de mesure aussi voisine que l'on veut de la mesure de  $E$ , dans lequel  $f_n(x)$  tend uniformément vers  $f(x)$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Le théorème reste valable, lorsque  $E$  est un ensemble de points situé dans l'espace à plusieurs dimensions et lorsqu'on remplace l'indice entier  $n$  par un paramètre continu.

Il est aisé de voir que la fonction  $\omega(z)$  est mesurable. Donc, en vertu d'un théorème de M. Lusin<sup>21)</sup>, on peut définir sur la courbe  $L$  un ensemble parfait  $\pi''$  qui possède les propriétés suivantes:

- a)  $\text{mes lin } \pi'' > \text{longueur de } L - \text{mes lin } \pi_0$ ;
- b) la fonction  $\omega(z)$  est uniformément continue dans l'ensemble  $\pi''$ .

On peut d'ailleurs supposer que l'ensemble  $\pi''$  appartient à  $\pi'$ . En diminuant convenablement le nombre  $\delta$ , défini précédemment, on peut supposer, de plus, que pour deux points arbitraires  $z$  et  $z'$  de l'ensemble  $\pi''$  l'inégalité (2) entraîne l'inégalité

$$(3) \quad |\omega(z) - \omega(z')| < \frac{\sigma}{3}.$$

Désignons par  $\pi'''$  la partie commune des ensembles  $\pi''$  et  $\pi_0$ .  $\pi'''$  est un ensemble fermé et il résulte de l'inégalité a) que cet ensemble n'est pas vide et possède une mesure linéaire positive,

$$(4) \quad \text{mes lin } \pi''' > 0.$$

Soit  $z^{(1)}$  un point d'épaisseur linéaire de l'ensemble  $\pi'''$  et soit  $z^{(2)}$  un point quelconque de la courbe  $L$ . En désignant par  $\pi(z^{(1)}, z^{(2)})$  la partie de l'ensemble  $\pi'''$  comprise entre les points  $z^{(1)}$  et  $z^{(2)}$ , on obtient, en vertu de la définition d'un point d'épaisseur linéaire,

$$\lim_{z^{(2)} \rightarrow z^{(1)}} \frac{\text{mes lin } \pi(z^{(1)}, z^{(2)})}{\text{longueur de } \pi(z^{(1)}, z^{(2)})} = 1.$$

Par suite, pour tous les points  $z^{(2)}$  de la courbe  $L$ , suffisamment voisins de  $z^{(1)}$ , on a l'inégalité

$$(5) \quad 1 - \frac{\text{mes lin } \pi(z^{(1)}, z^{(2)})}{\text{longueur de } \pi(z^{(1)}, z^{(2)})} < \sigma.$$

Choisissons un point déterminé  $z^{(2)}$  pour lequel subsistent simultanément l'inégalité (5) et l'inégalité

$$(6) \quad \text{longueur de } \pi(z^{(1)}, z^{(2)}) < \delta.$$

Soit  $\bar{\omega}$  le noyau parfait de l'ensemble  $\pi(z^{(1)}, z^{(2)})$ <sup>22)</sup>. Le point  $z^{(1)}$  est évidemment un point de seconde espèce de l'ensemble  $\bar{\omega}$  et l'on peut aussi supposer que le point  $z^{(2)}$  possède la même propriété.

<sup>21)</sup> Lusin, L'intégrale et la série trigonométrique, 1915 (en russe).

L'énoncé du théorème de M. Lusin est le suivant:

*Lorsqu'une fonction  $f(x)$  est mesurable et finie presque partout dans un ensemble mesurable  $E$ , on peut définir un ensemble parfait  $P_m$  appartenant à  $E$  et de mesure aussi voisine que l'on veut de la mesure de  $E$ , dans lequel la fonction  $f(x)$  est uniformément continue.*

<sup>22)</sup> *Lorsqu'un ensemble fermé  $E$  est décomposé en deux parties  $\bar{\omega}$  et  $N$  sans points communs dont l'une est parfaite et l'autre finie ou dénombrable (ou bien vide), l'ensemble  $\bar{\omega}$  sera dit le noyau parfait de l'ensemble  $E$ .*

Il résulte de l'inégalité (5)

$$\text{mes lin } \bar{\omega} > (1 - \sigma) \text{ longueur de } \sim z^{(1)} z^{(2)}.$$

Nous avons donc les propriétés  $\alpha$ ) et  $\beta$ ) de la courbe unie à  $\sigma$  près, lorsqu'on considère  $\bar{\omega}$  comme un noyau de la courbe  $\sim z^{(1)} z^{(2)}$ . Puisque l'ensemble  $\bar{\omega}$  est une partie de l'ensemble  $\pi'$  et, par suite, de l'ensemble  $\pi'$ , on obtient aussi les propriétés  $\gamma$ ) et  $\delta$ ), si l'on tient compte des inégalités (1), (2) et des inégalités (3), (6). La courbe  $\sim z^{(1)} z^{(2)}$  est donc unie à  $\sigma$  près et son noyau coïncide avec l'ensemble  $\bar{\omega}$ . Ce dernier ensemble étant une partie de  $\pi_0$  et les points  $z^{(1)}$  et  $z^{(2)}$  étant des points de seconde espèce de  $\pi_0$ , le lemme 2 se trouve complètement démontré.

Dans la suite, nous aurons encore besoin du lemme suivant:

**Lemme 3.** *e étant un ensemble de mesure linéaire positive, situé sur une courbe rectifiable L, on peut faire correspondre à chaque nombre positif  $\sigma$  un ensemble parfait  $\pi'$  appartenant à e, et un nombre positif  $\kappa \equiv \kappa(\sigma)$  qui vérifient les conditions suivantes:*

$$1^\circ \text{ mes lin } \pi' > (1 - \sigma) \text{ mes lin } e.$$

$2^\circ$  La distance de chaque point de l'ensemble  $\pi'$  aux extrémités de la courbe L est supérieure à  $\kappa$ .

$3^\circ$   $\sim z_1 z_2$  étant un arc quelconque de longueur inférieure à  $\kappa$ , situé sur la courbe L et contenant des points de l'ensemble  $\pi'$ , on a

$$\text{mes lin } e(z_1, z_2) > (1 - \sigma) \text{ longueur de } \sim z_1 z_2,$$

où  $e(z_1, z_2)$  est la partie de l'ensemble e située sur l'arc  $\sim z_1 z_2$ .

**Démonstration.** z étant un point quelconque d'épaisseur linéaire de l'ensemble e, on a

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow z \\ z_2 \rightarrow z}} \frac{\text{mes lin } e(z_1, z_2)}{\text{longueur de } \sim z_1 z_2} = 1,$$

où  $\sim z_1 z_2$  est un arc arbitraire, contenant le point z et situé sur la courbe L. Donc, en vertu du théorème déjà cité d'Egoroff, on peut définir, pour chaque nombre positif  $\sigma$ , un ensemble parfait  $\pi'$ , appartenant à e, et un nombre positif  $\kappa$  tels que les conditions  $1^\circ$  et  $3^\circ$  soient vérifiées. Il est d'ailleurs évident qu'on peut définir l'ensemble  $\pi'$  et le nombre  $\kappa$  de telle façon que la condition  $2^\circ$  soit aussi vérifiée. Le lemme est donc démontré.

## § 9.

**Lemme fondamental.** Les domaines D,  $\Omega$  et la fonction F(w) ayant la même signification que plus haut, supposons que F(w) est monogène en chaque point du domaine  $\Omega$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble par-



fait  $Q$  qui se trouve dans  $\Omega$  et contient des points intérieurs à ce domaine. En désignant par  $\Pi$  l'image dans le plan  $z$  de l'ensemble  $Q$ , supposons, de plus, que la condition  $K'$  est remplie partout dans  $\Pi$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble, appartenant à  $\Pi$  et partout de deuxième catégorie sur  $\Pi$ .

Dans ces conditions on peut trouver à l'intérieur de  $\Omega$  un cercle  $\Omega'$  qui contient à son intérieur des points de l'ensemble  $Q$  et qui possède deux diamètres  $d_1$  et  $d_2$ , perpendiculaires l'un à l'autre et tels que chaque corde de  $\Omega'$ , parallèle à  $d_1$  ou à  $d_2$ , a la propriété  $N$ , exception faite des cordes dont les points d'intersection avec  $d_2$  (pour les cordes parallèles à  $d_1$ ) ou avec  $d_1$  (pour les cordes parallèles à  $d_2$ ) constituent des ensembles de mesure linéaire nulle.

Démonstration. Sans restreindre la généralité de la démonstration on peut supposer que la correspondance entre les points des domaines  $D$  et  $\Omega$  soit continue même sur les frontières de ces domaines. Donc il existe deux fonctions  $\varepsilon(h)$  et  $h(\lambda)$  d'arguments positifs qui ne prennent que des valeurs positives et, de plus, vérifient les conditions suivantes:

I. Lorsque les points  $z'$ ,  $w'$  et  $z''$ ,  $w''$  se correspondent mutuellement, l'inégalité

$$\overline{z'z''} < h$$

entraîne l'inégalité

$$\overline{w'w''} < \varepsilon(h)$$

pour tous les points  $z'$  et  $z''$  du domaine  $D$  et, de même, l'inégalité

$$\overline{w'w''} < \lambda$$

entraîne l'inégalité

$$\overline{z'z''} < h(\lambda)$$

pour tous les points  $w'$ ,  $w''$  du domaine  $\Omega$ .

$$\text{II.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} h(\lambda) = 0.$$

D'après les conditions de ce lemme, on peut trouver, en vertu du lemme du § 2, une portion  $\Pi'$  de l'ensemble  $\Pi$  dans laquelle la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sqrt[n]{\sigma}$  près, où  $\sigma$  est un nombre positif vérifiant l'inégalité

$$(1) \quad \sqrt[n]{\sigma} < \frac{\pi}{1600}.$$

Soit  $\lambda_0$  un nombre positif pour lequel subsiste l'inégalité

$$(2) \quad h(\lambda_0) < \sigma',$$

où  $\sigma'$  est le nombre positif qui figure dans la définition 1 du § 2.

En désignant par  $Q'$  l'image dans le plan  $w$  de l'ensemble  $\Pi'$ , on voit que l'ensemble  $Q'$  est une portion de  $Q$ . On peut toujours supposer, en choisissant convenablement  $\Pi'$ , que l'ensemble  $Q'$  soit une telle portion qui est définie par un cercle  $\Omega'$ , intérieur à  $\Omega$  et de diamètre inférieur à  $\lambda_0$ . D'après la définition d'une portion d'un ensemble parfait, l'ensemble  $Q'$  contient des points intérieurs au cercle  $\Omega'$ . En tenant compte de la définition 1 du § 2, on peut affirmer qu'il existe, d'une part, des rayons  $\tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dépendant des points  $z$  de l'ensemble  $\Pi'$  et, d'autre part, des rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , qui possèdent toutes les propriétés figurant dans cette définition<sup>23)</sup>. En numérotant convenablement les rayons  $T_i(w)$ , on peut trouver, en vertu des propriétés a),  $\beta$ ) et c) (définition 1 du § 2), deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , perpendiculaires l'une à l'autre et situées dans le plan  $w$ , telles que pour chaque point  $w$  de l'ensemble  $Q'$  subsistent les trois conditions suivantes:

1° Les rayons  $T_1(w)$  et  $T_3(w)$  sont situés du même côté de la droite, passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_1$ .

2° Les rayons  $T_1(w)$  et  $T_2(w)$  sont situés du même côté de la droite, passant par  $w$  et parallèle à  $\Delta_2$ .

3° Les angles formés par les rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , avec chacune des deux directions opposées de chaque droite  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , sont supérieurs à  $20 \sqrt[8]{\sigma^{24})}$ .

On peut toujours supposer que les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  passent par le centre du cercle  $\Omega'$ .

En vertu des conditions de notre lemme, la fonction  $F(w)$  est monogène partout à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ , sauf peut-être aux points de l'ensemble  $Q'$ . D'ailleurs dans l'ensemble  $\Pi'$  la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sqrt[8]{\sigma}$  près. En tenant compte du lemme du § 6 et surtout du complément à ce lemme (fin du § 6), on voit, d'après les conditions 1°, 2°, 3°, et l'inégalité (1), que chaque corde du cercle  $\Omega'$ , parallèle à  $\Delta_1$  ou à  $\Delta_2$ , possède dans le plan  $z$  une image de longueur finie, exception faite des cordes dont les points d'intersection avec  $\Delta_2$  (pour les cordes parallèles à  $\Delta_1$ ) ou avec  $\Delta_1$  (pour les cordes parallèles à  $\Delta_2$ ) constituent respectivement des ensembles  $e_1$  et  $e_2$  de mesure linéaire nulle,

$$(3) \quad \text{mes lin } e_1 = 0, \quad \text{mes lin } e_2 = 0.$$

<sup>23)</sup> Il faut naturellement remplacer  $\sigma$  par  $\sqrt[8]{\sigma}$  et les ensembles  $\Pi$ ,  $Q$  par  $\Pi'$  et  $Q'$ .

<sup>24)</sup> Nous raisonnons ici comme dans la démonstration du lemme du § 6.

Désignons par  $G_1$  (ou bien par  $G_2$ ) l'ensemble de points d'intersection de la droite  $\Delta_2$  (ou bien  $\Delta_1$ ) avec les cordes du cercle  $\Omega'$ , parallèles à  $\Delta_1$  (ou bien  $\Delta_2$ ) et ne possédant pas la propriété  $N$ . Pour la démonstration du lemme il suffit de démontrer que chacun des ensembles  $G_1$  et  $G_2$  possède une mesure linéaire nulle. La démonstration étant la même pour les deux ensembles  $G_1$  et  $G_2$ , nous démontrerons seulement que

$$\text{mes lin } G_1 = 0.$$

Supposons au contraire que

$$(4) \quad \text{mes lin ext } G_1 > 0^{35}).$$

Désignons par  $G'$  l'ensemble des points de  $G_1$  qui n'appartiennent pas à l'ensemble  $e_1$ . On a, en vertu de (3) et (4),

$$(5) \quad \text{mes lin ext } G' > 0.$$

Soit  $\bar{w}$  un point quelconque de l'ensemble  $G'$  et soit  $\Delta(\bar{w})$  une corde du cercle  $\Omega'$ , parallèle à la droite  $\Delta_1$  et passant par le point  $\bar{w}$ . On voit, en vertu de la définition des ensembles  $G'$  et  $e_1$ , que l'image dans le plan  $z$  de la corde  $\Delta(\bar{w})$  est une courbe rectifiable.

Puisque la corde  $\Delta(\bar{w})$  ne possède pas la propriété  $N$ , il existe sur cette corde un ensemble parfait  $q_0(\bar{w})$  de mesure linéaire nulle dont l'image dans le plan  $z$ , que nous désignerons par  $\pi_0(\bar{w})$ , possède une longueur positive au sens de M. Painlevé et, par suite, une mesure linéaire positive<sup>36)</sup>. On a donc

$$(6) \quad \text{mes lin } q_0(\bar{w}) = 0,$$

$$(7) \quad \text{mes lin } \pi_0(\bar{w}) > 0.$$

On peut supposer, de plus, en remplaçant l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  par une de ses parties, que chaque portion de cet ensemble possède dans le plan  $z$  une image de longueur positive<sup>37)</sup>. La fonction  $F(w)$  étant monogène partout à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ , sauf peut-être aux points de

<sup>35)</sup> Nous désignons par  $\text{mes lin ext } G_1$  la mesure linéaire extérieure de cet ensemble.

<sup>36)</sup> On peut d'ailleurs supposer qu'aucun point de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  ne coïncide avec les extrémités de  $\Delta(\bar{w})$ .

<sup>37)</sup> Nous nous servons ici de la proposition suivante:

*Lorsqu'un ensemble parfait discontinu  $P$  à deux dimensions possède une longueur positive (finie ou non), il existe un autre ensemble, appartenant à  $P$ , dont chaque portion possède une longueur positive (non nulle).*

Menchoff, *Sur la représentation conforme des domaines plans*. Math. Annalen, 95, 650 (lemme 3 du §3).

l'ensemble  $Q'$ , il résulte du lemme 1 du § 8, que l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  appartient à  $\Pi'$ ,

$$(8) \quad \pi_0(\bar{w}) \subset \Pi'.$$

En diminuant convenablement l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  on peut supposer, en vertu du lemme 2 du § 8, que cet ensemble soit le noyau d'une certaine courbe rectifiable  $L_0(\bar{w})$  qui est unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près. La courbe  $L_0(\bar{w})$  constitue naturellement une partie de la courbe qui est l'image dans le plan  $z$  de la corde  $\Delta(\bar{w})$ . Il est clair qu'on peut déterminer à l'intérieur de la courbe  $L_0(\bar{w})$ <sup>28</sup> une autre courbe  $L(\bar{w})$  qui est aussi unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près et dont le noyau  $\pi(\bar{w})$  est la partie de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  sur la courbe  $L(\bar{w})$ . Il suffit de prendre les extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$  assez voisines des extrémités de la courbe  $L_0(\bar{w})$ . On peut d'ailleurs supposer que les extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$  soient des points de seconde espèce de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$ . Nous pouvons, de plus, supposer que

$$(9) \quad \text{longueur de } L(\bar{w}) > \frac{1}{2} \text{ longueur de } L_0(\bar{w}).$$

Soit  $q(\bar{w})$  l'image dans le plan  $w$  de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ . Il résulte de (6) et (8):

$$(10) \quad \text{mes lin } q(\bar{w}) = 0,$$

$$(11) \quad q(\bar{w}) \subset q_0(\bar{w}), \quad q_0(\bar{w}) \subset Q'.$$

Désignons respectivement par  $z' \equiv z'(\bar{w})$ ,  $z'' \equiv z''(\bar{w})$  et par  $z'_0 \equiv z'_0(\bar{w})$ ,  $z''_0 \equiv z''_0(\bar{w})$  les extrémités des courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$  et soient  $w' \equiv w'(\bar{w})$ ,  $w'' \equiv w''(\bar{w})$ ,  $w'_0 \equiv w'_0(\bar{w})$ ,  $w''_0 \equiv w''_0(\bar{w})$  les images dans le plan  $w$  des points  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'_0$  et  $z''_0$ . En désignant par  $\delta(\bar{w})$  et  $\delta_0(\bar{w})$  les segments rectilignes dont les extrémités sont respectivement  $w'$ ,  $w''$  et  $w'_0$ ,  $w''_0$ , on voit que  $\delta(\bar{w})$  et  $\delta_0(\bar{w})$  sont des images des courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$ . Donc le segment  $\delta(\bar{w})$  se trouve à l'intérieur du segment  $\delta_0(\bar{w})$ , d'où il résulte

$$(12) \quad w' \neq w'_0, \quad w'' \neq w''_0.$$

Il est clair que les segments  $\overline{w'_0 w'}$ ,  $\overline{w'' w''_0}$  sont parallèles à la droite  $\Delta_1$  et que l'ensemble  $q(\bar{w})$  se trouve sur le segment  $\delta(\bar{w}) = \overline{w' w''}$ . Dans toutes ces considérations le point  $\bar{w}$  est un point arbitraire de l'ensemble  $G'$ .

$p$ ,  $m$  étant des nombres entiers positifs et  $n'$ ,  $n''$ ,  $r$  étant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, désignons par  $G(p, m, n', n'', r)$

<sup>28</sup> Nous dirons qu'une courbe  $L(\bar{w})$  est à l'intérieur d'une autre courbe  $L_0(\bar{w})$ , lorsque  $L(\bar{w})$  est une partie de  $L_0(\bar{w})$  et, de plus, les extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$  ne coïncident pas avec les extrémités de la courbe  $L_0(\bar{w})$ .

l'ensemble des points  $\bar{w}$  qui appartiennent à l'ensemble  $G'$  et vérifient les conditions

$$A) \quad \overline{w_0 w'} > \frac{1}{p}, \quad \overline{w'' w_0} > \frac{1}{p}, \quad \overline{w' w''} > \frac{1}{p},$$

$$B) \quad \frac{1}{2^{r+1}} < \text{longueur de } L(\bar{w}) \leq \frac{1}{2^r},$$

$$C) \quad \frac{n'}{2p} < \bar{w} w' \leq \frac{n'+1}{2p}, \quad \frac{n''}{2p} < \bar{w} w'' \leq \frac{n''+1}{2p},$$

où l'on désigne par  $\bar{w} w'$  et  $\bar{w} w''$  des valeurs *algébriques* des segments, c'est-à-dire on choisit une direction positive sur la droite  $\Delta_1$  et l'on prend les longueurs des segments  $\bar{w} w'$  et  $\bar{w} w''$  avec le signe (+) ou (-) conformément à leur direction.

$$D) \quad m\sigma < \{0x, \widehat{z'z''}\} \leq (m+1)\sigma,$$

où l'on désigne par  $0x$  la direction positive de l'axe des  $x$  dans le plan  $z$  et où  $\{0x, \widehat{z'z''}\}$  est la valeur de l'angle, définie comme dans le § 2<sup>39</sup>).

En tenant compte des inégalités (12), on obtient

$$G' = \Sigma G(p, m, n', n'', v),$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières et positives de  $p$  et  $m$  et à toutes les valeurs entières de  $n', n''$  et  $v$ , positives, négatives ou nulles. Il résulte de l'inégalité (5) qu'il existe des valeurs de  $p, m, n', n''$  et  $v$  pour lesquelles

$$(13) \quad \text{mes lin ext } G(p, m, n', n'', v) > 0.$$

Nous supposons, dans la suite, que les nombres  $p, m, n', n''$  et  $v$  possèdent des valeurs bien déterminées pour lesquelles l'inégalité (13) est vérifiée. Désignons par  $G_0$  l'ensemble correspondant  $G(p, m, n', n'', v)$ . Nous aurons

$$(14) \quad \text{mes lin ext } G_0 > 0.$$

Soit  $\bar{w}$  un point quelconque appartenant à l'ensemble  $G_0$ . Puisque dans l'ensemble  $\Pi'$  la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sqrt[n]{\sigma}$  près, il résulte, en comparant la condition D) avec la relation (8) et avec les propriétés  $\alpha$ ) et  $\beta$ ) figurant dans la définition 1 du § 2, que  $\bar{w}$  étant un point quelconque de l'ensemble  $G_0$  et  $z$  étant un point arbitraire de l'ensemble correspondant  $\pi_0(\bar{w})$ , l'inégalité

$$50 \sqrt[n]{\sigma} < [\widehat{z'z''}, \tau_i(z)] < \pi - 50 \sqrt[n]{\sigma}$$

<sup>39)</sup> Puisque l'angle  $\{0x, \widehat{z'z''}\}$  est compris entre zéro et  $2\pi$ , la valeur  $2\pi$  exclue, l'ensemble  $G(p, m, n', n'', v)$  est vide pour  $m \geq 2\pi/\sigma$ . Cet ensemble est aussi vide pour  $n'$  et  $n''$  suffisamment grands en valeur absolue.

subsiste pour deux valeurs au moins de l'indice  $i^{40}$ ). Nous supposons, pour fixer les idées, que cette inégalité est vérifiée pour  $i = 2$  et pour  $i = 3$ , c'est-à-dire

$$(15) \quad \begin{cases} 50 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z'z''}, \tau_2(z)] < \pi - 50 \sqrt[8]{\sigma}, \\ 50 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z'z''}, \tau_3(z)] < \pi - 50 \sqrt[8]{\sigma} \end{cases}$$

pour  $z \in \pi_0(\bar{w})$  et, par suite, pour  $z \in \pi(\bar{w})$ , où  $\bar{w} \in G_0$ . (Si l'on remplaçait une des inégalités (15) par l'inégalité

$$50 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z'z''}, \tau_1(z)] < \pi - 50 \sqrt[8]{\sigma}$$

les raisonnements qui vont suivre resteraient les mêmes.) D'après la définition des points  $z'$  et  $z''$  ces points dépendent du point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G_0$ .

Nous avons vu que l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  se trouve sur le segment  $\delta_0(\bar{w}) = \overline{w_0 w_0'}$ . Donc on voit, en vertu de la propriété 1<sup>o</sup> des rayons  $T_i(w)$  et de la définition des cordes  $\Delta(\bar{w})$ , que tous les rayons  $T_2(w)$  sont situés du même côté de la corde  $\Delta(\bar{w})$  quel que soit le point  $w$  de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$ ,  $\bar{w}$  étant un point arbitraire de l'ensemble  $G_0$ .

Désignons par  $G''$  l'ensemble de tous les points  $\bar{w}$  qui appartiennent à l'ensemble  $G_0$  et possèdent la propriété suivante: des deux côtés de la corde  $\Delta(\bar{w})$  il existe des points de l'ensemble  $G_0$  aussi voisins que l'on veut du point  $\bar{w}$ . Il est facile de voir que l'ensemble  $G_0 - G''$  est au plus dénombrable. Donc, en vertu de (14),

$$(16) \quad \text{mes lin ext } G'' > 0.$$

Soit  $\bar{w}$  un point quelconque de l'ensemble  $G''$ . En vertu de la propriété 3<sup>o</sup> des rayons  $T_i(w)$ , pour tous les points de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$ , les angles formés par les rayons  $T_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , avec chacune des directions de la corde  $\Delta(\bar{w})$ , possèdent des valeurs comprises entre  $20 \sqrt[8]{\sigma}$  et  $\pi - 20 \sqrt[8]{\sigma}$ ,

$$(17) \quad 20 \sqrt[8]{\sigma} < [\Delta(\bar{w}), T_i(w)] < \pi - 20 \sqrt[8]{\sigma}, \quad i = 1, 2, 3, \quad w \in q_0(\bar{w})^{41}.$$

Désignons, comme précédemment, par  $J_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , l'image dans le plan  $w$  du rayon  $\tau_i(z)$ . Puisque l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  se trouve sur le

<sup>40</sup>) Ces valeurs d'indice  $i$  ne dépendent pas du point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G_0$  et du point  $z$  de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$ .

<sup>41</sup>) Dans l'inégalité (17) on peut prendre n'importe quelle direction de la corde  $\Delta(\bar{w})$ .

segment  $\delta_0(\bar{w}) = \overline{w'_0 w''_0}$  et, par suite, à l'intérieur du cercle  $\Omega'$  dont le diamètre est inférieur à  $\lambda_0$ , on a

$$(18) \quad \overline{w w'} < \lambda_0,$$

où  $w$  est un point quelconque de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  et  $w'$  est un point arbitraire qui se trouve à la fois à l'intérieur du cercle  $\Omega'$  et sur une des courbes  $J_i(w)$  correspondant au point  $w$ .

En comparant les inégalités (18) et (2) et en tenant compte de la définition de la fonction  $h(\lambda)$ , on obtient

$$(19) \quad \overline{z \zeta'} < \sigma',$$

où  $z$  est un point quelconque de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  et  $\zeta'$  est un point quelconque du rayon correspondant  $\tau_i(z)$  dont l'image  $\omega'$  se trouve à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ .

Nous savons que, pour les rayons  $T_i(w)$ , sont vérifiées toutes les propriétés figurant dans la définition 1 du § 2<sup>43</sup>), lorsque  $w$  est un point quelconque de l'ensemble  $Q'$ . Puisque  $q_0(\bar{w})$  est l'image dans le plan  $w$  de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$ , on voit donc, en comparant la seconde relation (11) avec l'inégalité (19) et avec la propriété b), figurant dans la définition 1 du § 2, que les inégalités

$$(20) \quad \overline{[w \omega', T_i(w)]} < \sqrt[n]{\sigma}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

subsistent pour chaque point  $w$  de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$  et pour chaque point  $\omega'$  qui se trouve à la fois à l'intérieur du cercle  $\Omega'$  et sur la courbe correspondante  $J_i(w)$ .

En vertu de la condition C) figurant dans la définition de l'ensemble  $G_0 \equiv G(p, m, n', n'', v)$ , pour les points  $\bar{w}$  de cet ensemble les projections des points  $w' \equiv w'(\bar{w})$  sur la droite  $\Delta_1$  se trouvent sur un segment de longueur  $1/2 p$ . De même, les projections des points  $w'' \equiv w''(\bar{w})$  sur  $\Delta_1$  se trouvent sur un autre segment de longueur  $1/2 p$ . En comparant cette dernière remarque avec les inégalités (17), (20), avec la relation  $q(\bar{w}) \subset q_0(\bar{w})$  et avec la condition A), on arrive à la conclusion suivante:

Pour chaque point  $w$  de l'ensemble  $q(\bar{w})$ ,  $\bar{w} \in G''$ , et pour chaque point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G_0$ , suffisamment voisin du point  $\bar{w}$  et situé du même côté de la corde  $\Delta(\bar{w})$  que les rayons  $T_2(w)$ , la courbe  $J_2(w)$  possède des points communs avec le segment  $\delta_0(\bar{w})$  qui correspond au point  $\bar{w}$  et dont les extrémités sont  $w'_0 \equiv w'_0(\bar{w})$ ,  $w''_0 \equiv w''_0(\bar{w})$ .

<sup>43</sup>) Bien entendu, il faut remplacer  $\sigma$  par  $\sqrt[n]{\sigma}$ .



D'ailleurs, pour  $w \in q_0(\bar{w})$ , tous les points de chaque courbe  $J_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , différents de  $w$  et suffisamment rapprochés de ce point, ne sont pas situés sur la corde  $\Delta(\bar{w})$  et, par suite, sur le segment  $\delta_0(\bar{w})$ .

Rappelons que  $\bar{w}$  est un point arbitraire de l'ensemble  $G''$ , de sorte qu'il existe des points  $\tilde{w}$  de l'ensemble  $G_0$  aussi voisins que l'on veut du point  $\bar{w}$  et situés du même côté de la corde  $\Delta(\bar{w})$  que les rayons  $T_3(w)$ ,  $w \in q_0(\bar{w})$ . Par suite, on peut trouver des points  $\tilde{w}$  qui vérifient les conditions indiquées plus haut.

Soit  $\omega$  le premier point commun de la courbe  $J_3(w)$  avec le segment  $\delta_0(\bar{w})$  qu'on rencontre en parcourant la courbe  $J_3(w)$  à partir du point  $w$ , de sorte que tous les points  $\omega'$  de la courbe  $J_3(w)$  situés entre les points  $w$  et  $\omega$  ne se trouvent pas sur le segment  $\delta_0(\bar{w})$ . Désignons par  $\omega\omega$  la partie de la courbe  $J_3(w)$  comprise entre les points  $w$  et  $\omega$  et soit  $\zeta$  l'image dans le plan  $z$  du point  $\omega$ . En vertu de la définition de la courbe  $J_3(w)$ , l'image dans le plan  $z$  de chaque courbe  $\omega\omega$  est un segment rectiligne  $\bar{z}\bar{\zeta}$  situé sur le rayon  $\tau_3(z)$ , où  $z$  est un point arbitraire de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ . Chacun des points  $\zeta$  se trouve sur la courbe  $L_0(\bar{w})$  qui est l'image dans le plan  $z$  du segment  $\delta_0(\bar{w})$ , tandis que tous les autres points du segment  $\bar{z}\bar{\zeta}$  ne sont pas situés sur cette courbe.

Soit  $\varepsilon_1$  un nombre positif arbitrairement petit, qui est indépendant de  $\sigma$  et de l'ensemble  $G_0$ , mais auquel nous donnons une valeur fixe. L'ensemble parfait  $q(\bar{w})$  étant de mesure linéaire nulle [l'égalité (10)], on peut trouver un nombre positif  $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2(\bar{w})$  tel que la mesure linéaire de chaque ensemble mesurable  $\tilde{q}$  qui se trouve sur le segment  $\delta_0(\bar{w})$  et dont tous les points sont situés à une distance inférieure à  $\varepsilon_2$  de l'ensemble  $q(\bar{w})$ , est inférieure à  $\varepsilon_1$ ,

$$(21) \quad \text{mes lin } \tilde{q} < \varepsilon_1.$$

En tenant compte des relations II figurant dans la définition des fonctions  $\varepsilon(h)$  et  $h(\lambda)$ , on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon \left[ \frac{2}{\sqrt{\sigma}} h(\lambda) \right] = 0.$$

Par suite, on peut trouver un nombre positif  $\lambda_1 \equiv \lambda_1(\bar{w})$  pour lequel subsiste l'inégalité

$$(22) \quad \varepsilon \left[ \frac{2}{\sqrt{\sigma}} h(\lambda_1) \right] < \varepsilon_2.$$

Considérons maintenant l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  situé sur la courbe  $L(\bar{w})$ . Puisque la longueur et, par suite, la mesure linéaire de cet ensemble est positive, nous pouvons nous servir du lemme 3 du § 8. Par suite, il

existe un ensemble parfait  $\pi'(\bar{w})$ , appartenant à  $\pi(\bar{w})$ , et un nombre positif  $\varkappa$  pour lesquels subsistent toutes les propriétés indiquées dans ce lemme,  $\sigma$  étant le nombre défini dans ce paragraphe. En vertu des propriétés 1<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$ , nous avons les inégalités

$$(23) \quad \text{mes lin } \pi'(\bar{w}) > (1 - \sigma) \text{ mes lin } \pi(\bar{w}),$$

$$(24) \quad \text{mes lin } \pi(z_1, z_2) > (1 - \sigma) \text{ longueur de } \smile z_1 z_2,$$

où  $\smile z_1 z_2$  est un arc quelconque de la courbe  $L(\bar{w})$  contenant des points de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$  et possédant une longueur inférieure à  $\varkappa$ ;  $\pi(z_1, z_2)$  est la partie de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  située sur l'arc  $\smile z_1 z_2$ <sup>43</sup>. En nous servant de la propriété 2<sup>o</sup> de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$  et en tenant compte de ce que les points  $z'$  et  $z''$  sont des extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$ , nous pouvons trouver sur cette courbe deux points  $z^*$  et  $z^{**}$  tels que tous les points de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$  sont situés sur l'arc  $\smile z^* z^{**}$  de la courbe  $L(\bar{w})$  et, de plus,

$$(25) \quad \begin{cases} \text{longueur de } \smile z' z^* > \varkappa, \\ \text{longueur de } \smile z^{**} z'' > \varkappa^{44}. \end{cases}$$

Considérons les courbes  $\smile w \omega$  définies plus haut. Lorsque le point  $\bar{w}$  tend vers  $\bar{w}$  les diamètres de ces courbes tendent uniformément vers zéro pour les points  $w$  de l'ensemble  $q(\bar{w})$  et, de même, les longueurs des segments  $\overline{z\zeta}$  tendent uniformément vers zéro pour les points  $z$  de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ . Par suite, pour chaque point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G''$  on peut déterminer sur la droite  $\Delta_2$  un point  $\bar{w}$ , appartenant à l'ensemble  $G_0$ , situé du même côté de la corde  $\Delta(\bar{w})$  que les rayons  $T_1(w)$  et tel que les diamètres des courbes  $\smile w \omega$  soient inférieurs à  $\lambda_1$ , tandis que les longueurs des segments  $\overline{z\zeta}$  soient inférieures à  $\frac{1}{4} \varkappa \sqrt[8]{\sigma}$ ,  $w$  et  $z$  étant respectivement des points arbitraires des ensembles  $q(\bar{w})$  et  $\pi(\bar{w})$ . Nous pouvons donc écrire

$$(26) \quad \overline{w\omega'} < \lambda_1$$

pour les points  $w$  de l'ensemble  $q(\bar{w})$  et pour les points  $\omega'$  situés sur les courbes correspondantes  $\smile w \omega$  et, de même,

$$(27) \quad \overline{z\zeta} < \frac{1}{4} \varkappa \sqrt[8]{\sigma}$$

pour les points  $z$  de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ .

Nous avons déjà vu que, pour  $w \in q_0(\bar{w})$  et, par suite, pour  $w \in q(\bar{w})$ , tous les points de chaque courbe  $J_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , différents de  $w$  et

<sup>43</sup>) Lorsque deux points quelconques  $z_1$  et  $z_2$  sont situés sur la courbe  $L(\bar{w})$  ou sur la courbe  $L_0(\bar{w})$ , nous conviendrons de désigner par  $\smile z_1 z_2$  l'arc de cette courbe compris entre  $z_1$  et  $z_2$ .

<sup>44</sup>) Nous supposons, en outre, que le point  $z^*$  est situé entre les points  $z'$  et  $z^{**}$ .

suffisamment voisins de ce point, ne sont pas situés sur le segment  $\delta_0(\bar{w})$ . On peut donc choisir le point  $\tilde{w}$  assez voisin de  $\bar{w}$  pour que tous les points de chaque courbe  $\omega$ , sauf  $w$ , ne se trouvent pas sur  $\delta_0(\bar{w})$ . Puisque ce segment est l'image dans le plan  $w$  de la courbe  $L_0(\bar{w})$ , on voit donc que tous les points du segment  $\overline{z\zeta}$ , sauf le point  $z$ , ne sont pas situés sur la courbe  $L_0(\bar{w})$ . Nous pouvons supposer qu'à chaque point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G''$  il correspond un point bien déterminé  $\tilde{w}$  de l'ensemble  $G_0$  qui vérifie toutes les conditions indiquées, y comprises les inégalités (26) et (27). On peut supposer, de plus, que pour les points appartenant à l'ensemble  $q(\bar{w})$  les courbes  $\omega$  soient à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ .

Rappelons que  $z'_0$  et  $z''_0$  sont les extrémités de la courbe  $L_0(\bar{w})$ , tandis que  $z'$  et  $z''$  sont les extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$ ; d'ailleurs le point  $z'$  est situé sur la courbe  $L_0(\bar{w})$  entre les points  $z'_0$  et  $z''_0$ . En supposant toujours que  $\bar{w}$  est un point arbitraire de l'ensemble  $G''$ , soit  $z$  un point quelconque de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$  et soit  $\zeta$  le point, défini plus haut, qui est situé à la fois sur le rayon  $\tau_3(z)$  et sur la courbe  $L_0(\tilde{w})$ . En vertu des inégalités (25) et (27), il existe sur la courbe  $L(\bar{w})$  un arc de longueur  $\frac{4}{\sqrt{\sigma}} \overline{z\zeta} < \varkappa$  dont le centre se trouve au point  $z$ . En tenant compte de

l'inégalité (24), on peut donc déterminer sur la courbe  $L(\bar{w})$  un arc  $l'(z)$  de centre  $z$  pour lequel subsiste l'inégalité

$$(28) \quad \frac{4(1-\sigma)}{\sqrt{\sigma}} \overline{z\zeta} < \text{longueur de } l'(z) < \frac{4}{\sqrt{\sigma}} \overline{z\zeta}$$

et dont l'une des extrémités, à savoir celle qui est située du même côté de  $z$  que le point  $z''$ , appartient à l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ .

Nous voyons que chaque point  $z$  de l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$  est à l'intérieur d'un arc  $l'(z)$  situé sur la courbe  $L(\bar{w})$ . Donc, en vertu d'un lemme<sup>45)</sup>,

<sup>45)</sup> D. Menchoff, *Sur la représentation conforme des domaines plans*. Math. Annalen 95, § 3, lemme 1, p. 648. L'énoncé du lemme est le suivant:

Soit  $G$  un ensemble linéaire de points, c'est-à-dire situé sur une droite  $\Delta$ , dont la mesure linéaire extérieure est positive,

$$\text{mes lin ext } G > 0.$$

Supposons qu'il correspond à chaque point  $x$  de  $G$  un segment  $\delta_x$  situé sur la droite  $\Delta$  et contenant  $x$  à son intérieur.

On peut alors déterminer un nombre fini de segments  $\delta_x$  n'empiétant pas l'un sur l'autre et tels que la somme de leurs longueurs soit supérieure à

$$\frac{1}{8} \text{mes lin ext } G.$$

Nous prenons ici la courbe  $L(\bar{w})$  au lieu d'une droite, ce qui ne change nullement la démonstration du lemme. Dans le cas considéré l'ensemble  $\pi'(\bar{w})$ , qu'on prend au lieu de  $G$ , est mesurable.

il existe un nombre fini d'arcs  $l'(z)$ , n'empiétant pas l'un sur l'autre et tels que la somme de leurs longueurs est supérieure à

$$\frac{1}{6} \text{ mes lin } \pi'(\bar{w}).$$

Désignons par  $r$  le nombre de ces arcs et soient  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, r$ , leurs centres. Désignons par  $l(z)$  la moitié de l'arc  $l'(z)$  qui se trouve entre les points  $z$  et  $z_0''$ ,

$$(29) \quad \text{longueur de } l(z) = \frac{1}{2} \text{ longueur de } l'(z).$$

Il résulte de ce qui précède que les arcs  $l(z_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , sont extérieurs l'un à l'autre et, de plus,

$$(30) \quad \sum_{k=1}^r \text{longueurs de } l(z_k) > \frac{1}{16} \text{ mes lin } \pi'(\bar{w}).$$

Puisque la courbe  $L(\bar{w})$  est unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près et que l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  est son noyau, nous avons

$$\text{mes lin } \pi(\bar{w}) > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } L(\bar{w}).$$

Donc, en tenant compte des inégalités (30), (23) et (1), on a

$$(31) \quad \sum_{k=1}^r \text{longueurs de } l(z_k) > \frac{1}{32} \text{ longueur de } L(\bar{w}).$$

Nous supposons, dans la suite, que les points  $z_k$  soient numérotés dans le sens du parcours de la courbe  $L(\bar{w})$  de  $z'$  à  $z''$ .

En désignant par  $z'_k$  l'extrémité de la courbe  $l(z_k)$ , différente de  $z_k$ , nous avons  $l(z_k) = z_k z'_k$ . On a, en vertu de (29), (28) et (27)

$$\text{longueur de } l(z_k) < \kappa;$$

par suite, en vertu de (24),

$$(32) \quad \text{mes lin } \pi(z_k, z'_k) > (1 - \sigma) \text{ longueur de } l(z_k),$$

où  $\pi(z_k, z'_k)$  est la partie de l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  située sur la courbe  $l(z_k)$ . D'après ce qui précède les points  $z_k$  et  $z'_k$  appartiennent à l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  et, de plus, le sens de parcours des courbes  $z_k z'_k$  et  $z' z'' = L(\bar{w})$  est le même.

Soient  $\zeta_k$  et  $\zeta'_k$  des points qui sont définis par rapport aux points  $z_k$  et  $z'_k$  de la même manière que le point  $\zeta$  est défini par rapport au point  $z$ . Il en résulte que tous les points des segments  $z_k \zeta_k$  et  $z'_k \zeta'_k$ , sauf les extrémités, ne se trouvent pas sur les courbes  $L_0(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$ , tandis que les points  $\zeta_k$  et  $\zeta'_k$  sont situés sur la courbe  $L_0(\bar{w})$ . En comparant (28) et (29) et en tenant compte de la relation  $l(z_k) = z_k z'_k$ , on obtient

$$(33) \quad \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \overline{z_k \zeta_k} < \text{longueur de } z_k z'_k < \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \overline{z_k \zeta_k}.$$

Nous savons que les courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$  sont unies à  $\frac{\sigma}{2}$  près et que les ensembles  $\pi(\bar{w})$  et  $\pi_0(\bar{w})$  sont leurs noyaux. De plus, l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  appartient à  $\pi_0(\bar{w})$ . En vertu de la condition  $\beta$ ), figurant dans la définition d'une courbe unie (définition 3 du § 8), les extrémités  $z'$  et  $z''$  de la courbe  $L(\bar{w})$  appartiennent à son noyau  $\pi(\bar{w})$ . En comparant la condition  $\delta$ ), figurant dans la même définition, avec ce que nous venons de dire, nous obtenons les inégalités

$$[\widehat{z'_k z_j}, \widehat{z' z''}] < \frac{\sigma}{2}, \quad [\widehat{z_k z'_k}, \widehat{z' z''}] < \frac{\sigma}{2},$$

$k < j$ ,  $k, j = 1, 2, 3, \dots, r$ , d'où il résulte, d'après (15),

$$25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z_k z_j}, \tau_k(z_j)] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma},$$

$$25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z_k z_k}, \tau_k(z_k)] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}.$$

Puisque les segments  $\overline{z_k \zeta_k}$  et  $\overline{z_j \zeta_j}$  se trouvent respectivement sur les rayons  $\tau_k(z_k)$  et  $\tau_j(z_j)$ , on obtient de ces dernières inégalités

$$(34) \quad \begin{cases} 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z'_k z_j}, \widehat{z_j \zeta_j}] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}, \\ 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z_k z_k}, \widehat{z_k \zeta_k}] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}. \end{cases}$$

Nous savons que  $z_j$  est le centre de la courbe  $l'(z_j)$  et que, pour  $k < j$ , les points  $z_k$  et  $z'_k$  ne sont pas intérieurs à cette courbe. On a donc

$$\text{longueur de } z'_k z_j \geq \text{longueur de } z_j z'_j,$$

d'où, en vertu de (33),

$$(35) \quad \text{longueur de } z'_k z_j > \frac{1}{\sqrt[8]{\sigma}} \overline{z_j \zeta_j} \quad (k < j).$$

Les points  $z_k$ ,  $z'_k$ ,  $z_j$  et  $z'_j$  appartiennent au noyau  $\pi(\bar{w})$  de la courbe  $L(\bar{w})$ , qui est unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près. Donc, en vertu de la condition  $\gamma$ ) qui figure dans la définition d'une telle courbe, les courbes  $z'_k z_j$  et  $z_k z'_k$  sont des segments à  $\frac{\sigma}{2}$  près, c'est-à-dire

$$(36) \quad \begin{cases} \overline{z'_k z_j} > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } z'_k z_j, \\ \overline{z_k z'_k} > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } z_k z'_k, \end{cases}$$

d'où il résulte, en vertu de (35) et (33),

$$(37) \quad \overline{z_j \zeta_j} < 2 \sqrt[8]{\sigma} \overline{z'_k z_j}, \quad \overline{z_k \zeta_k} < 2 \sqrt[8]{\sigma} \overline{z_k z'_k} \quad (k < j; k, j = 1, 2, \dots, r).$$

Nous savons que les rayons  $\tau_i(z)$ , définis pour les points  $z$  de l'ensemble  $II'$ , possèdent toutes les propriétés figurant dans la définition 1

du § 2, où l'on remplace  $\sigma$  par  $\sqrt[n]{\sigma}$ . Puisque l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  est une partie de l'ensemble  $\Pi'$ , on tire de la propriété  $\alpha$ ) de cette définition

$$[\tau_2(z_k), \widehat{\tau_2(z_j)}] < \sqrt[n]{\sigma}, [\tau_2(z_k), \widehat{\tau_2(z'_k)}] < \sqrt[n]{\sigma}.$$

Puisque les segments  $z_k \zeta_k$ ,  $\overline{z'_k \zeta'_k}$  et  $z_j \zeta_j$  se trouvent respectivement sur les rayons  $\tau_2(z_k)$ ,  $\tau_2(z'_k)$  et  $\tau_2(z_j)$ , on voit donc que

$$(38) \quad [\overline{z'_k \zeta'_k}, \widehat{z_j \zeta_j}] < \sqrt[n]{\sigma}, [\overline{z_k \zeta_k}, \widehat{z'_k \zeta'_k}] < \sqrt[n]{\sigma}.$$

En tenant compte des inégalités (37), (34) et (38), on voit, en vertu du lemme 5 du § 7, que d'une part, les segments  $\overline{z'_k \zeta'_k}$ ,  $\overline{z_j \zeta_j}$ ,  $k < j$ , et d'autre part, les segments  $\overline{z_k \zeta_k}$ ,  $\overline{z'_k \zeta'_k}$  ne possèdent pas de points communs et, de plus,

$$\overline{\zeta_k \zeta'_k} > \sqrt[n]{\sigma} \cdot \overline{z_k z'_k},$$

d'où

$$(39) \quad \text{longueur de } \overline{\zeta_k \zeta'_k} > \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\sigma} \cdot \text{longueur de } l(z_k),$$

puisque  $l(z_k) \equiv \overline{z_k z'_k}$  est un segment à  $\frac{\sigma}{2}$  près.

Désignons par  $w_k$ ,  $w'_k$ ,  $\omega_k$  et  $\omega'_k$  les images dans le plan  $w$  des points  $z_k$ ,  $z'_k$ ,  $\zeta_k$  et  $\zeta'_k$  et soient  $\cup w_k \omega_k$ ,  $\cup w'_k \omega'_k$  les images des segments  $\overline{z_k \zeta_k}$  et  $\overline{z'_k \zeta'_k}$ . Les courbes  $\cup w_k \omega_k$  et  $\cup w'_k \omega'_k$  sont des arcs des courbes  $J_1(w_k)$  et  $J_2(w'_k)$ , compris respectivement entre les points  $w_k$ ,  $\omega_k$  et  $w'_k$ ,  $\omega'_k$ . Ce sont les courbes  $\cup w$ , définies plus haut, qui correspondent aux points  $w = w_k$  et  $w = w'_k$ . Nous avons déjà vu que tous les points des segments  $\overline{z_k \zeta_k}$  et  $\overline{z'_k \zeta'_k}$ , sauf les extrémités, ne se trouvent pas sur les courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$ . Les segments  $\overline{w' w''} \equiv \delta(\bar{w})$  et  $\delta_0(\bar{w})$  étant les images dans le plan  $w$  de ces deux courbes, il en résulte que tous les points des courbes  $\cup w_k \omega_k$  et  $\cup w'_k \omega'_k$ , sauf les extrémités, ne sont pas situés sur les segments  $\overline{w' w''}$  et  $\delta_0(\bar{w})$ . D'ailleurs les points  $z_k$ ,  $z'_k$  et  $\zeta_k$ ,  $\zeta'_k$  sont situés respectivement sur les courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$  et, de même, les points  $w_k$ ,  $w'_k$  et  $\omega_k$ ,  $\omega'_k$  sont situés respectivement sur les segments  $\overline{w' w''}$  et  $\delta_0(\bar{w})$ .

Puisque les segments  $\overline{z_k \zeta_k}$  et  $\overline{z'_k \zeta'_k}$  n'ont pas de points communs, les courbes  $\cup w_k \omega_k$  et  $\cup w'_k \omega'_k$  sont extérieures l'une à l'autre et, par suite, ces deux courbes constituent avec les segments  $\overline{w_k w'_k}$  et  $\overline{\omega_k \omega'_k}$  une courbe de Jordan fermée simple. Nous désignerons par  $w_k w'_k \omega'_k \omega_k$  le domaine ouvert limité par cette courbe.

Puisque les points  $w_k$  et  $w'_k$  appartiennent à l'ensemble  $q(\bar{w})$  et, par suite, à l'ensemble  $Q'$ , on obtient de la propriété  $\alpha$ ), figurant dans la définition 1 du § 2:

$$[T_1(w_k), \widehat{T_1(w'_k)}] < \sqrt[n]{\sigma}.$$

Nous avons déjà vu que, pour les points  $w$  de l'ensemble  $g(\bar{w})$ , les courbes  $\smile w \omega$  sont à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ . Donc il résulte de l'inégalité (20)

$$\begin{aligned} [\overline{w_k \omega_k}, \widehat{T_2(w_k)}] &< \sqrt[n]{\sigma}, \quad [\overline{w'_k \omega'_k}, \widehat{T_2(w'_k)}] < \sqrt[n]{\sigma}, \\ [\overline{w_k \omega'}, \widehat{T_2(w_k)}] &< \sqrt[n]{\sigma}, \quad [\overline{w'_k \omega''}, \widehat{T_2(w'_k)}] < \sqrt[n]{\sigma} \end{aligned}$$

pour tous les points  $\omega'$  de la courbe  $\smile w_k \omega_k$  et pour tous les points  $\omega''$  de la courbe  $\smile w'_k \omega'_k$ . On obtient de toutes ces inégalités les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} [\overline{w_k \omega_k}, \widehat{w'_k \omega'_k}] &< 3 \sqrt[n]{\sigma}, \\ [\overline{w_k \omega'}, \widehat{w_k \omega_k}] &< 2 \sqrt[n]{\sigma}, \quad [\overline{w'_k \omega''}, \widehat{w'_k \omega'_k}] < 2 \sqrt[n]{\sigma}, \end{aligned}$$

les points  $\omega'$  et  $\omega''$  ayant la même signification que plus haut. On peut affirmer, de plus, que les segments  $\overline{w_k \omega'_k}$  et  $\overline{\omega_k \omega'_k}$  sont parallèles, puisqu'ils sont situés respectivement sur les segments  $\overline{w' w''} \equiv \delta(\bar{w})$  et  $\delta_0(\bar{w})$ .

En comparant toutes ces propriétés du domaine  $w_k w'_k \omega'_k \omega_k$  avec la définition 2 du § 7, on voit que ce domaine est un presque-parallélogramme du type (1,  $\sigma$ ).

Nous avons déjà vu que, pour  $k < j$ , les segments  $\overline{z'_k \zeta'_k}$  et  $\overline{z_j \zeta_j}$  n'ont pas de points communs. Par suite, les courbes  $\smile w'_k \omega'_k$  et  $\smile w_j \omega_j$  n'ont pas non plus de points communs, d'où il résulte facilement que les deux domaines  $w_k w'_k \omega'_k \omega_k$  et  $w_j w'_j \omega'_j \omega_j$  sont extérieurs l'un à l'autre, c'est-à-dire les presque-parallélogrammes  $w_k w'_k \omega'_k \omega_k$  sont extérieurs l'un à l'autre pour les valeurs différentes de l'indice  $k$ .

Soit  $z_k z'_k \zeta'_k \zeta_k$  l'image dans le plan  $z$  du domaine  $w_k w'_k \omega'_k \omega_k$ . La frontière de ce domaine est formée de deux segments rectilignes  $\overline{z_k \zeta_k}$ ,  $\overline{z'_k \zeta'_k}$  et de deux courbes rectifiables  $\smile z_k z'_k$ ,  $\smile \zeta_k \zeta'_k$ , situées respectivement sur les courbes  $L(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$ . Pour des valeurs différentes de l'indice  $k$  les domaines  $z_k z'_k \zeta'_k \zeta_k$  sont extérieurs l'un à l'autre. Par suite, les courbes  $\smile \zeta_k \zeta'_k$ , situées sur la courbe  $L_0(\bar{w})$ , sont extérieures l'une à l'autre.

Puisque le point  $\bar{w}$  appartient à l'ensemble  $G_0$  et, par suite, à l'ensemble  $G'$ , la courbe  $L_0(\bar{w})$  est unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près et l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  est son noyau. On a donc, en vertu de la condition  $\alpha$ ) figurant dans la définition d'une telle courbe,

$$(40) \quad \text{mes lin } \pi_0(\bar{w}) > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } L_0(\bar{w}).$$

Désignons par  $g_k$  la partie de l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$  située sur la courbe  $\smile \zeta_k \zeta'_k$  et soit

$$\Sigma^n \text{ longueurs de } \smile \zeta_k \zeta'_k$$



la somme étendue à toutes les valeurs de  $k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , qui vérifient l'inégalité

$$(41) \quad \text{mes lin } g_k > (1 - \sqrt[8]{\sigma}) \cdot \text{longueur de } \zeta_k \zeta'_k.$$

On obtient de l'inégalité (39)

$$\sum_{k=1}^r \text{longueurs de } \zeta_k \zeta'_k > \frac{1}{2} \sqrt[8]{\sigma} \cdot \sum_{k=1}^r \text{longueurs de } l(z_k)$$

et, par suite, en vertu de (31),

$$\sum_{k=1}^r \text{longueurs de } \zeta_k \zeta'_k > \frac{1}{24} \sqrt[8]{\sigma} \cdot \text{longueur de } L(\bar{w}).$$

Puisque les points  $\bar{w}$  et  $\tilde{w}$  appartiennent à l'ensemble  $G_0$  qui coïncide avec un des ensembles  $G(p, m, n', n'', r)$ , il résulte de la condition B), figurant dans la définition d'un tel ensemble,

$$\text{longueur de } L(\bar{w}) > \frac{1}{2} \text{ longueur de } L(\tilde{w}).$$

En comparant les deux dernières inégalités avec l'inégalité (9), on obtient finalement

$$\sum_{k=1}^r \text{longueurs de } \zeta_k \zeta'_k > \frac{1}{126} \sqrt[8]{\sigma} \text{ longueur de } L_0(\tilde{w}).$$

Nous pouvons affirmer que

$$(42) \quad \Sigma' \text{ longueurs de } \zeta_k \zeta'_k > \frac{1}{112} \sqrt[8]{\sigma} \text{ longueur de } L_0(\tilde{w}).$$

En effet, dans le cas contraire il résulterait de l'inégalité (41) que la mesure linéaire de l'ensemble des points, situés sur la courbe  $L_0(\tilde{w})$ , mais n'appartenant pas à l'ensemble  $\pi_0(\tilde{w})$ , serait supérieure ou égale à

$$\Sigma'' (\text{longueurs de } \zeta_k \zeta'_k - \text{mes lin } g_k) \geq \frac{1}{112} \sqrt[8]{\sigma} \text{ longueur de } L_0(\tilde{w}),$$

où la sommation  $\Sigma''$  est étendue à tous les indices  $k$  pour lesquels l'inégalité (41) n'est pas vraie. Cela est en contradiction avec l'inégalité (40), puisque  $\sigma < \frac{\pi}{1600}$  (inégalité (1)) et, par suite  $\frac{\sigma}{2} < \frac{1}{512} \sqrt[8]{\sigma}$ . Nous avons donc l'inégalité (42).

Puisque le point  $\tilde{w}$  appartient à l'ensemble  $G_0 \equiv G(p, m, n', n'', r)$ , où  $p, m, n', n''$  et  $r$  possèdent des valeurs fixes, nous obtenons de (42) et de la condition B), figurant dans la définition des ensembles  $G(p, m, n', n'', r)$ :

$$(43) \quad \Sigma' \text{ longueurs de } \zeta_k \zeta'_k > \frac{1}{2^{r+10}} \sqrt[8]{\sigma^{46}}$$

<sup>46)</sup> Rappelons que la courbe  $L(\tilde{w})$  est une partie de la courbe  $L_0(\tilde{w})$ , de sorte que longueur de  $L_0(\tilde{w}) > \text{longueur de } L(\tilde{w})$ .

Désignons par  $\zeta_k'' \zeta_k'''$  l'arc de longueur égale à

$$\sqrt[n]{\sigma} \text{ longueur de } \zeta_k \zeta_k'$$

qui est situé sur la courbe  $\zeta_k \zeta_k'$  et possède le même centre que cette courbe. On a donc

$$(44) \quad \text{longueur de } \zeta_k'' \zeta_k''' = \sqrt[n]{\sigma} \cdot \text{longueur de } \zeta_k \zeta_k'.$$

En vertu de l'inégalité (41), pour chaque valeur de l'indice  $k$  figurant dans la somme  $\Sigma'$ , on peut trouver à l'intérieur de l'arc  $\zeta_k'' \zeta_k'''$  un point  $\zeta_k^*$  qui appartient à l'ensemble  $g_k$  et, par suite, à l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$ .

Puisque  $\pi_0(\bar{w})$  est le noyau de la courbe  $L_0(\bar{w})$ , qui est unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près, nous pouvons écrire, en vertu des conditions  $\gamma$ ) et  $\delta$ ) figurant dans la définition d'une telle courbe et de la définition d'un segment à  $\sigma$  près (définition 1 du § 7),

$$(45) \quad \begin{cases} \overline{\zeta_k \zeta_k^*} > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } \zeta_k \zeta_k^*, \\ \overline{\zeta_k^* \zeta_k'} > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \text{ longueur de } \zeta_k^* \zeta_k', \\ [\overline{\zeta_k \zeta_k^*}, \widehat{\overline{\zeta_k^* \zeta_k'}}] < \frac{\sigma}{2}. \end{cases}$$

Il résulte de la dernière inégalité

$$\overline{\zeta_k \zeta_k'} > \left(\overline{\zeta_k \zeta_k^*} + \overline{\zeta_k^* \zeta_k'}\right) \cos \frac{\sigma}{2}$$

et, par suite, en vertu de (45),

$$\overline{\zeta_k \zeta_k'} > \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \cos \frac{\sigma}{2} \cdot \text{longueur de } \zeta_k \zeta_k'.$$

On obtient donc finalement

$$\overline{\zeta_k \zeta_k'} > (1 - \sigma) \text{ longueur de } \zeta_k \zeta_k',$$

c'est-à-dire la courbe  $\zeta_k \zeta_k'$  est un segment à  $\sigma$  près, lorsque  $k$  est un indice figurant dans la somme  $\Sigma'$ . De plus, nous avons déjà vu (seconde inégalité (36)) que, pour  $1 \leq k \leq r$ , la courbe  $\zeta_k \zeta_k'$  est un segment à  $\frac{\sigma}{2}$  près et, par suite, un segment à  $\sigma$  près.

En comparant ces propriétés des courbes  $\zeta_k \zeta_k'$  et  $\zeta_k \zeta_k'$  avec la définition du domaine  $z_k \zeta_k' \zeta_k \zeta_k$  et avec la seconde inégalité (38), on voit que, pour l'indice  $k$  appartenant à la somme  $\Sigma'$ , le domaine  $z_k \zeta_k' \zeta_k \zeta_k$  possède les propriétés a), b) et c) qui figurent dans la définition du presque-parallélogramme du type  $(2, \sigma)$  (définition 3 du § 7). Nous allons démontrer que la propriété d) est aussi remplie.

Puisque les points  $\bar{w}$  et  $\bar{w}$  appartiennent à l'ensemble  $G_0 \equiv G(p, m, n', n'', r)$ , on a, en vertu de la condition D), figurant dans la définition d'un tel ensemble,

$$(46) \quad [z' z'', \widehat{z' z''}] < \sigma,$$

où  $z', z''$  sont, comme précédemment, les extrémités de la courbe  $L(\bar{w})$  et  $\zeta', \zeta''$  sont les extrémités de la courbe  $L(\tilde{w})$ . Puisque les courbes  $L(\bar{w})$  et  $L(\tilde{w})$  sont unies à  $\frac{\sigma}{2}$  près et que les ensembles  $\pi(\bar{w})$  et  $\pi(\tilde{w})$  sont respectivement leurs noyaux, il résulte de la condition  $\beta$ ), figurant dans la définition de telles courbes, que les points  $z', z''$  et  $\zeta', \zeta''$  appartiennent respectivement aux ensembles  $\pi(\bar{w})$  et  $\pi(\tilde{w})$  et, par suite, les points  $\zeta', \zeta''$  appartiennent à l'ensemble  $\pi_0(\tilde{w})$ . De plus, les points  $z_k, z'_k$  appartiennent à l'ensemble  $\pi(\bar{w})$  et le point  $\zeta_k^*$  appartient à l'ensemble  $\pi_0(\tilde{w})$  qui est le noyau de la courbe  $L_0(\tilde{w})$ , unie à  $\frac{\sigma}{2}$  près. Donc il résulte de la condition  $\delta$ ), figurant dans la définition des courbes unies, que

$$(47) \quad [\overline{z_k z'_k}, \widehat{z' z''}] < \frac{\sigma}{2},$$

$$[\overline{\zeta_k \zeta_k^*}, \widehat{\zeta' \zeta''}] < \frac{\sigma}{2}, [\overline{\zeta_k^* \zeta_k}, \widehat{\zeta' \zeta''}] < \frac{\sigma}{2}$$

et, par suite,

$$(48) \quad [\overline{\zeta_k \zeta_k^*}, \widehat{\zeta' \zeta''}] < \frac{\sigma}{2}.$$

En comparant les inégalités (47) et (48) avec l'inégalité (46) on obtient finalement

$$[\overline{z_k z'_k}, \widehat{\zeta_k \zeta_k^*}] < 2\sigma < \sqrt[3]{\sigma}.$$

La condition d) est donc vérifiée et, par suite, pour les indices  $k$  appartenant à la somme  $\Sigma'$ , le domaine  $z_k z'_k \zeta_k \zeta_k^*$  est un presque-parallélogramme du type  $(2, \sigma)$ . De plus, les courbes  $z_k z'_k$  et  $\zeta_k \zeta_k^*$  sont des bases de ce presque-parallélogramme.

En tenant compte de l'inégalité (1), de la seconde inégalité (34) et de l'inégalité (33) et en appliquant le lemme 4 du § 7, on obtient

$$(49) \quad \text{l'aire de } z_k z'_k \zeta_k \zeta_k^* > \frac{1}{3} \sqrt[3]{\sigma} (\text{longueur de } z_k z'_k)^3$$

où  $k$  est un indice quelconque qui figure dans la somme  $\Sigma'$ . De plus, en tenant compte des inégalités (1), [(33) et en appliquant le lemme 2 du § 7, on obtient

$$\text{longueur de } z_k z'_k > \frac{1}{3} \text{ longueur de } \zeta_k \zeta_k^*.$$

En comparant cette dernière inégalité avec l'inégalité (43), on trouve finalement

$$(50) \quad \Sigma' \text{ longueurs de } z_k z'_k > \frac{1}{2^{11} + 11} \sqrt[3]{\sigma}.$$

Désignons par  $z_k'' z_k'''$  l'arc de longueur égale à

$$\sqrt[3]{\sigma} \text{ longueur de } l(z_k)$$

qui est situé sur la courbe  $l(z_k) \equiv \zeta_k z'_k$  et possède le même centre que cette courbe. On a donc

$$(51) \quad \text{longueur de } \zeta_k'' z_k''' = \sqrt[8]{\sigma} \text{ longueur de } l(z_k).$$

On voit de l'inégalité (32) que, pour  $1 \leq k \leq r$ , on peut trouver à l'intérieur de l'arc  $\zeta_k'' z_k'''$  un point  $z_k^*$  qui appartient à l'ensemble  $\pi(z_k, z'_k)$  et, par suite, à l'ensemble  $\pi(\bar{w})$ . Nous savons que le point  $\zeta_k^*$ , défini plus haut, appartient à l'ensemble  $\pi_0(\bar{w})$ . Puisque les ensembles  $\pi(\bar{w})$  et  $\pi_0(\bar{w})$  sont des parties de l'ensemble  $II'$ , il résulte que les deux points  $z_k^*$  et  $\zeta_k^*$  appartiennent à  $II'$ . Considérons les deux rayons  $\tau_3(z_k^*)$  et  $\tau_3(\zeta_k^*)$  qui sont respectivement des images des courbes  $J_3(w_k^*)$  et  $J_3(\omega_k^*)$ , où  $w_k^*$  et  $\omega_k^*$  sont les images des points  $z_k^*$  et  $\zeta_k^*$  <sup>47)</sup>.

Puisque les points  $z_k^*$  et  $\zeta_k^*$  appartiennent aux ensembles  $\pi_0(\bar{w})$  et  $\pi_0(\bar{w})$ , il résulte de la seconde inégalité (15) et des inégalités (47), (48):

$$(52) \quad \begin{cases} 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{z_k z_k}, \tau_3(z_k^*)] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}, \\ 25 \sqrt[8]{\sigma} < [\widehat{\zeta_k \zeta_k}, \tau_3(\zeta_k^*)] < \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma}. \end{cases}$$

D'autre part, il est évident que tous les points de chaque courbe  $J_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , différents de  $w$  et suffisamment rapprochés de ce point, ne se trouvent pas sur le segment  $\delta_0(\bar{w})$ , lorsque  $w$  est un point de l'ensemble  $q_0(\bar{w})$ ,  $\bar{w} \subset G_0$  <sup>48)</sup>. Les courbes  $l(z_k) \equiv \zeta_k z'_k$  et  $\zeta_k \zeta'_k$  sont des arcs des courbes  $L_0(\bar{w})$  et  $L_0(\bar{w})$  qui sont des images des segments  $\delta_0(\bar{w})$  et  $\delta_0(\bar{w})$ , tandis que les rayons  $\tau_3(z_k^*)$  et  $\tau_3(\zeta_k^*)$  sont des images des courbes  $J_3(w_k^*)$  et  $J_3(\omega_k^*)$ . Donc tous les points des rayons  $\tau_3(z_k^*)$  et  $\tau_3(\zeta_k^*)$ , différents des points  $z_k^*, \zeta_k^*$  et suffisamment rapprochés de ces points, ne se trouvent pas respectivement sur les courbes  $\zeta_k z'_k$  et  $\zeta_k \zeta'_k$ .

Puisque les points  $z_k^*$  et  $\zeta_k^*$  appartiennent aux ensembles  $\pi(\bar{w})$  et  $\pi_0(\bar{w})$  et, par suite, à l'ensemble  $II'$ , et que la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sigma$  près sur  $II'$ , il résulte de la condition  $\alpha$ ) (définition 1 du § 2):

$$[\tau_3(z_k^*), \tau_3(\zeta_k^*)] < \sqrt[8]{\sigma},$$

où  $\sqrt[8]{\sigma} < \frac{\pi}{1600}$  [inégalité (1)]. On voit donc qu'une des deux circonstances suivantes doit nécessairement avoir lieu:

Ou bien le presque-parallélogramme  $z_k z'_k \zeta_k \zeta'_k$  est situé du même côté de la courbe  $\zeta_k z'_k$  que le rayon  $\tau_3(z_k^*)$ ;

ou bien ce presque-parallélogramme est situé du même côté de la courbe  $\zeta_k \zeta'_k$  que le rayon  $\tau_3(\zeta_k^*)$ .

<sup>47)</sup> Rappelons que les rayons  $\tau_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont définis pour les points  $z$  de l'ensemble  $II'$ .

<sup>48)</sup> Cela résulte de la propriété 3<sup>o</sup> des rayons  $T_i(w)$  et de la condition b) figurant dans la définition 1 du § 2.

En comparant cette dernière remarque avec les inégalités (1), (33) et (52) et en tenant compte de ce que les points  $z_k^*$  et  $\zeta_k^*$  se trouvent respectivement sur les courbes  $\mathcal{L}_k'' z_k'''$  et  $\mathcal{L}_k'' \zeta_k'''$  pour lesquelles subsistent les relations (44) et (51), on voit du lemme 3 du § 7 que, ou bien le rayon  $\tau_2(z_k^*)$  possède un point commun avec la courbe  $\mathcal{L}_k \zeta_k'$ , ou bien le rayon  $\tau_2(\zeta_k^*)$  possède un point commun avec la courbe  $\mathcal{L}_k z_k'$ . Dans le premier cas la courbe  $J_3(w_k^*)$  possède un point commun avec le segment  $\overline{\omega_k \omega_k'}$  et dans le second cas la courbe  $J_3(\omega_k^*)$  possède un point commun avec le segment  $\overline{w_k w_k'}$ .

Nous désignerons par  $w_k^{(0)}$  celui des deux points  $w_k^*$  ou  $\omega_k^*$  pour lequel la courbe correspondante  $J_3(w_k^*)$  (ou bien  $J_3(\omega_k^*)$ ) possède un point commun  $\omega_k^{(0)}$  avec le segment  $\overline{\omega_k \omega_k'}$  (ou bien  $\overline{w_k w_k'}$ ). Les extrémités du segment  $\overline{w_k^{(0)} \omega_k^{(0)}}$  se trouvent donc sur les deux segments  $\overline{w_k w_k'}$  et  $\overline{\omega_k \omega_k'}$  et, de plus, le point  $w_k^{(0)}$  appartient à l'ensemble  $Q'$ , tandis que le point  $\omega_k^{(0)}$  se trouve sur la courbe  $J_3(w_k^{(0)})$ .

Nous pouvons toujours supposer, en prenant le point  $\tilde{w}$  assez voisin de  $\bar{w}$ , que tous les presque-parallélogrammes  $w_k w_k' \omega_k' \omega_k$  se trouvent à l'intérieur du cercle  $\mathcal{O}'$ . Dans ce cas le point  $\omega_k^{(0)}$  est situé à l'intérieur du cercle  $\mathcal{O}'$  et, par suite, on a de l'inégalité (20)

$$(53) \quad [\overline{w_k^{(0)} \omega_k^{(0)}}, \widehat{T_3(w_k^{(0)})}] < \sqrt[8]{\sigma}.$$

Puisque les points  $\omega_k$  et  $\omega_k'$  se trouvent respectivement sur les courbes  $J_3(w_k)$  et  $J_3(w_k')$ , on a par la même raison

$$(54) \quad [\overline{w_k \omega_k}, \widehat{T_3(w_k)}] < \sqrt[8]{\sigma}, \quad [\overline{w_k' \omega_k'}, \widehat{T_3(w_k')}] < \sqrt[8]{\sigma}.$$

Les trois points  $w_k$ ,  $w_k'$  et  $w_k^{(0)}$  appartiennent à l'ensemble  $Q'$  qui est l'image dans le plan  $w$  de l'ensemble  $\Pi'$ . Puisque dans ce dernier ensemble la propriété  $K'$  est remplie uniformément à  $\sqrt[8]{\sigma}$  près, nous avons, d'après les conditions  $\beta$ ) et c) qui figurent dans la définition 1 du § 2,

$$(55) \quad \begin{aligned} 800 \sqrt[8]{\sigma} &< [\overline{T_3(w_k)}, \widehat{T_3(w_k^{(0)})}] < \pi - 800 \sqrt[8]{\sigma}, \\ 800 \sqrt[8]{\sigma} &< [\overline{T_3(w_k')}, \widehat{T_3(w_k^{(0)})}] < \pi - 800 \sqrt[8]{\sigma}. \end{aligned}$$

En comparant ces dernières inégalités avec les inégalités (53) et (54), on obtient finalement

$$\pi - 25 \sqrt[8]{\sigma} > [\overline{w_k \omega_k}, \widehat{\overline{w_k^{(0)} \omega_k^{(0)}}}] > 25 \sqrt[8]{\sigma}, \quad \pi - 25 \sqrt[8]{\sigma} > [\overline{w_k' \omega_k'}, \widehat{\overline{w_k^{(0)} \omega_k^{(0)}}}] > 25 \sqrt[8]{\sigma}.$$

Puisque le domaine  $w_k w_k' \omega_k' \omega_k$  est un presque-parallélogramme du type (1,  $\sigma$ ) et que les extrémités du segment  $\overline{w_k^{(0)} \omega_k^{(0)}}$  se trouvent sur les deux segments  $\overline{w_k \omega_k}$  et  $\overline{\omega_k \omega_k'}$ , nous voyons, d'après le lemme 1 du § 7,

que la distance entre les droites sur lesquelles se trouvent les segments  $\overline{w_k w'_k}$  et  $\overline{\omega_k \omega'_k}$  est inférieure à chacun des deux nombres

$$\frac{\overline{w_k w'_k}}{\sin 25 \sqrt[n]{\sigma}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\omega_k \omega'_k}}{\sin 25 \sqrt[n]{\sigma}}.$$

Les segments  $\overline{w_k w'_k}$  et  $\overline{\omega_k \omega'_k}$  étant situés respectivement sur les cordes  $\Delta(\bar{w})$  et  $\Delta(\bar{\omega})$  du cercle  $\Omega'$  et les points  $\bar{w}$  et  $\bar{\omega}$  étant des points d'intersection de ces cordes avec la droite  $\Delta_2$ , perpendiculaire à ces cordes, nous avons donc:

$$(56) \quad \overline{\bar{w} \bar{\omega}} < \frac{\overline{w_k w'_k}}{\sin 25 \sqrt[n]{\sigma}}.$$

Cette inégalité est vraie pour tous les indices  $k$  figurant dans la somme  $\Sigma'$ .

Rappelons que  $\bar{w}$  est un point arbitraire de l'ensemble  $G''$  qui appartient à l'ensemble  $G_0$  et que  $\bar{\omega}$  est un point, dépendant de  $\bar{w}$  et appartenant à  $G_0$ . Désignons par  $\bar{q}(\bar{w})$  l'ensemble de tous les points  $w$  situés sur les segments  $\overline{w_k w'_k}$ , où  $k$  est un indice arbitraire qui appartient à la somme  $\Sigma'$ .

Nous savons que les points  $w_k$ ,  $1 \leq k \leq r$ , appartiennent à l'ensemble  $\bar{q}(\bar{w})$  et que les courbes  $\omega_k w_k$  sont des courbes  $\omega w$ , définies plus haut, qui correspondent aux points  $w = w_k$  <sup>49)</sup>. Donc, en vertu de (26),

$$\overline{w_k \omega_k} < \lambda_1$$

et, par suite, en vertu de la condition I, définissant les fonctions  $h(\lambda)$  et  $\varepsilon(h)$ ,

$$\overline{z_k \zeta_k} < h(\lambda_1), \quad 1 \leq k \leq r.$$

En comparant cette dernière inégalité avec l'inégalité (33) on obtient

$$\text{longueur de } \omega_k z'_k < \frac{2}{\sqrt[n]{\sigma}} h(\lambda_1)$$

et, par suite,

$$(57) \quad \overline{z_k z} < \frac{2}{\sqrt[n]{\sigma}} h(\lambda_1)$$

pour tous les points  $z$  de la courbe  $\omega_k z'_k$ . En comparant l'inégalité (57) avec la condition I, déjà citée, on trouve

$$\overline{w_k w} < \varepsilon \left[ \frac{2}{\sqrt[n]{\sigma}} h(\lambda_1) \right],$$

<sup>49)</sup> Rappelons que  $\omega$  est le premier point commun de la courbe  $J_2(w)$  avec le segment  $\partial_0(\bar{w})$  qu'on rencontre en parcourant la courbe  $J_2(w)$  à partir du point  $w$ , où  $w \in \bar{q}(\bar{w})$ .

$w$  étant un point quelconque du segment  $\overline{w_k w'_k}$ . Il résulte donc de (22)

$$\overline{w_k w} < \varepsilon_2$$

pour les mêmes points  $w$ . Tous les points de l'ensemble  $\tilde{q}(\overline{w})$  sont donc situés à une distance inférieure à  $\varepsilon_2$  des points de l'ensemble  $q(\overline{w})$  et, par suite, en vertu de (21),

$$(58) \quad \text{mes lin } \tilde{q}(\overline{w}) < \varepsilon_1,$$

où  $\varepsilon_1$  est un nombre positif arbitrairement petit dont la valeur est prise indépendamment du nombre  $\sigma$  et de l'ensemble  $G_0$ .

On obtient, en vertu de la définition de l'ensemble  $\tilde{q}(\overline{w})$

$$\text{mes lin } \tilde{q}(\overline{w}) = \Sigma' \overline{w_k w'_k}$$

et, par suite, en vertu de (58),

$$(59) \quad \Sigma' \overline{w_k w'_k} < \varepsilon_1.$$

Nous avons déjà vu que, pour les indices  $k$  appartenant à la somme  $\Sigma'$ , les presque-parallélogrammes  $z_k \zeta_k z'_k$  sont extérieurs l'un à l'autre. Calculons la somme des aires de ces presque-parallélogrammes. Partageons la somme  $\Sigma'$  en deux parties. A cet effet, désignons par  $\Sigma_1$  la somme étendue aux indices  $k$  qui appartiennent à la somme  $\Sigma'$  et pour lesquels subsiste l'inégalité

$$(60) \quad \text{longueur de } z_k z'_k > \frac{\sqrt[n]{\sigma}}{\varepsilon_1 \cdot 2^{r+12}} \overline{w_k w'_k}.$$

Nous aurons

$$\Sigma' = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

où  $\Sigma_2$  est la somme étendue à tous les indices  $k$  de la somme  $\Sigma'$  pour lesquels subsiste l'inégalité

$$(61) \quad \text{longueur de } z_k z'_k \leq \frac{\sqrt[n]{\sigma}}{\varepsilon_1 \cdot 2^{r+12}} \overline{w_k w'_k}.$$

On a, en vertu de (59) et (61),

$$\Sigma_2 \text{ longueurs de } z_k z'_k < \frac{\sqrt[n]{\sigma}}{2^{r+12}}$$

et, par suite, en vertu de (50),

$$(62) \quad \Sigma_1 \text{ longueurs de } z_k z'_k > \frac{\sqrt[n]{\sigma}}{2^{r+12}}.$$

Il résulte donc, en vertu de (49), (60), (62) et (56)

$$(63) \quad \Sigma' \text{ aires de } z_k z'_k \zeta_k > \frac{C}{\varepsilon_1} \overline{w' w''},$$



où

$$C = \frac{\sqrt{\sigma} \sin 25 \sqrt{\sigma}}{2^{\frac{1}{2}} r + 27}.$$

On voit, en résumant, qu'il correspond à chaque point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G''$  un point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G_0$  et des presque-parallélogrammes  $z_k z'_k \zeta'_k \zeta_k$  du type  $(2, \sigma)$  pour lesquels subsiste l'inégalité (63).

Désignons par  $I(\bar{w})$  un segment de centre  $\bar{w}$  et de longueur  $2\bar{w}\bar{w}$  situé sur la droite  $\Delta_2$  sur laquelle se trouve l'ensemble  $G''$ . On a donc

$$(64) \quad \text{longueur de } I(\bar{w}) = 2\bar{w}\bar{w}.$$

Chaque point  $\bar{w}$  de l'ensemble  $G''$  est à l'intérieur du segment correspondant  $I(\bar{w})$ . En remarquant que la mesure linéaire extérieure de l'ensemble  $G''$  est positive et en tenant compte du lemme déjà cité <sup>50)</sup>, on voit qu'on peut trouver parmi les segments  $I(\bar{w})$  un nombre fini de segments  $I(\bar{w}_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , qui n'empiètent pas l'un sur l'autre et pour lesquels subsiste l'inégalité

$$(65) \quad \sum_{i=1}^N \text{longueurs de } I(\bar{w}_i) > \frac{1}{2} \mu,$$

où

$$\mu = \text{mes lin ext de } G'' > 0.$$

Les points  $\bar{w}_i$  sont les centres des segments  $I(\bar{w}_i)$ .

En supposant que l'indice  $i$  possède une valeur fixe et en posant dans l'inégalité (63)  $\bar{w} = \bar{w}_i$ , considérons tous les presque-parallélogrammes  $z_k z'_k \zeta'_k \zeta_k$  qui figurent dans le premier membre de cette inégalité. Désignons par  $D_{s,i}$ ,  $1 \leq s \leq r_i$ , tous ces presque-parallélogrammes <sup>51)</sup>. D'après ce que nous avons déjà vu, les domaines  $D_{s,i}$  sont extérieurs l'un à l'autre pour une valeur fixe de  $i$  et pour des valeurs différentes de  $s$ . En vertu de (63) et (64), nous pouvons écrire

$$\sum_{s=1}^{r_i} \text{aires de } D_{s,i} > \frac{C}{2\varepsilon_1} \text{ longueur de } I(\bar{w}_i)$$

et, par suite, en vertu de (65),

$$(66) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^{r_i} \text{aires de } D_{s,i} > \frac{C\mu}{16\varepsilon_1}.$$

Désignons par  $\Omega_{s,i}$  l'image dans le plan  $w$  du presque-parallélogramme  $D_{s,i}$  et soit  $\bar{w}$  le point  $\bar{w}$  qui correspond au point  $\bar{w} = \bar{w}_i$ . Les domaines  $\Omega_{s,i}$  sont des presque-parallélogrammes du type  $(1, \sigma)$  qui, pour une valeur fixe de l'indice  $i$ , se trouvent entre les deux cordes  $\Delta(\bar{w}_i)$  et  $\Delta(\bar{w}_i)$  du cercle  $\mathcal{Q}$ .

<sup>50)</sup> D. Menchoff. *Sur la représentation conforme des domaines plans*, l. c. lemme 1 du § 3, p. 648.

<sup>51)</sup> Nous numérotions ces presque-parallélogrammes dans un ordre quelconque.

Puisque les segments  $I(\bar{w}_i)$  n'empiètent pas l'un sur l'autre, les segments correspondants  $\bar{w}_i \bar{w}_i$  sont extérieurs l'un à l'autre; par suite, les domaines  $\Omega_{s,i}$  et  $\Omega_{s',i'}$  sont extérieurs l'un à l'autre, lorsque  $i \neq i'$ . Il en résulte que les domaines  $D_{s,i}$  et  $D_{s',i'}$  sont aussi extérieurs l'un à l'autre pour  $i \neq i'$ . Nous avons vu auparavant que ces domaines sont extérieurs l'un à l'autre pour  $i = i'$  et  $s \neq s'$ . Donc tous les domaines  $D_{s,i}$  qui figurent dans l'inégalité (66) sont extérieurs l'un à l'autre.

Puisque tous ces domaines se trouvent à l'intérieur du domaine  $D$ , il résulte de l'inégalité (66)

$$\text{l'aire de } D > \frac{C \cdot \mu}{16 \varepsilon_1},$$

où  $\varepsilon_1$  est un nombre positif qui peut être pris arbitrairement petit indépendamment du domaine  $D$  et des nombres positifs  $C$  et  $\mu$ . Le domaine  $D$  étant borné, nous arrivons donc à une contradiction en supposant que l'inégalité (4) soit vérifiée. Il en résulte

$$\text{mes lin } G_1 = 0$$

et l'on obtient, de la même manière,

$$\text{mes lin } G_2 = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

### § 10.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé à la fin du § 1, c'est-à-dire le théorème:

**Théorème.** *Les domaines  $D, \Omega$  et la fonction  $f(z)$  ayant la même signification que plus haut, si la propriété  $K'$  est remplie en tous les points du domaine  $D$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable, la fonction  $f(z)$  est holomorphe à l'intérieur de  $D$ .*

**Démonstration.** Soit  $F(w)$  la fonction définie plus haut, c'est-à-dire la fonction inverse à la fonction  $w = f(z)$ . Pour démontrer notre théorème il suffit de démontrer que  $F(w)$  est holomorphe à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Sans restreindre la généralité de la démonstration on peut supposer que la propriété  $K'$  est remplie en tous les points de la frontière du domaine  $D$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable.

Désignons par  $H$  l'ensemble des points, situés à l'intérieur ou sur la frontière du domaine  $D$ , dans lesquels la propriété  $K'$  n'est pas remplie. Soit  $H'$  l'image dans le domaine  $\Omega$  de l'ensemble  $H$ . Par hypothèse, les ensembles  $H$  et  $H'$  sont au plus dénombrables. Puisque la propriété  $K'$  est remplie partout dans le domaine  $D$ , sauf aux points de l'ensemble  $H$ , il résulte, d'après le lemme 3 du § 5, que la fonction  $F(w)$  possède une

dérivée  $F'(w)$  presque partout dans le domaine  $\Omega$ . De plus, le module de cette dérivée est une fonction à carré sommable dans  $\Omega$ .

Posons, comme précédemment,

$$(1) \quad \begin{cases} w = u + i v, \\ F(w) = X(u, v) + i Y(u, v), \end{cases}$$

où  $X(u, v)$  et  $Y(u, v)$  sont des fonctions réelles. On voit que les dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial v}$$

existent presque partout dans  $\Omega$  et sont des fonctions sommables dans ce domaine.

Désignons par  $Q$  l'ensemble des points, situés dans le domaine  $\Omega$ , au voisinage desquels la fonction  $F(w)$  n'est pas partout holomorphe. Il est clair que l'ensemble  $Q$  est un ensemble parfait et que la fonction  $F(w)$  est holomorphe en dehors de  $Q$ . Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que l'ensemble  $Q$  ne contient pas de points intérieurs au domaine  $\Omega$ .

Nous allons démontrer qu'on arrive à une contradiction en supposant que l'ensemble  $Q$  contient des points intérieurs au domaine  $\Omega$ . Désignons par  $\Pi$  l'image dans le domaine  $D$  de l'ensemble  $Q$ . Puisque la propriété  $K'$  est remplie partout dans  $\Pi$ , sauf peut-être aux points d'un ensemble fini ou dénombrable, on peut trouver, d'après le lemme fondamental du § 9, un cercle  $\Omega'$  qui est situé à l'intérieur de  $\Omega$ , contient à son intérieur des points de l'ensemble  $Q$  et, de plus, possède deux diamètres  $d_1$  et  $d_2$  perpendiculaires l'un à l'autre et tels que chaque corde, parallèle à  $d_1$  ou à  $d_2$ , a la propriété  $N$ , exception faite des cordes dont les points d'intersection avec  $d_2$  (pour les cordes parallèles à  $d_1$ ) ou avec  $d_1$  (pour les cordes parallèles à  $d_2$ ) constituent des ensembles de mesure linéaire nulle.

Nous allons démontrer que la fonction  $F(w)$  est holomorphe à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ . À cet effet, nous choisirons les diamètres  $d_1$  et  $d_2$  pour les axes de coordonnées  $u$  et  $v$  et nous prendrons, à l'intérieur de  $\Omega'$ , un rectangle quelconque  $R$  dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Pour démontrer que la fonction  $F(w)$  est holomorphe à l'intérieur de  $\Omega'$  il suffit de démontrer que

$$(3) \quad \int_C F(w) dw = 0,$$

où  $C$  est le contour du rectangle  $R$ .

Désignons par  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$ ,  $(u_1, v_2)$ ,  $u_1 < u_2$ ,  $v_1 < v_2$ , les coordonnées des quatre sommets du rectangle  $R$ . On a, d'après (1),

$$(4) \quad \int_C F(w) dw = \int_C (X du - Y dv) + i \int_C (Y du + X dv),$$

les intégrales étant prises dans le sens positif le long de  $C$ . Les quatre dérivées partielles (2) étant sommables dans  $R$ , il résulte, d'après un théorème de M. Fubini <sup>52)</sup>, que l'intégrale

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial X}{\partial u} du$$

considérée comme une fonction de la variable  $v$ , existe au sens de M. Lebesgue pour toutes les valeurs de  $v$  dans l'intervalle  $(v_1, v_2)$  sauf peut-être les valeurs d'un ensemble  $e$  de mesure nulle. D'ailleurs cette intégrale est une fonction sommable par rapport à  $v$  et l'on a la relation

$$(5) \quad \iint_R \frac{\partial X}{\partial u} du dv = \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial X}{\partial u} du.$$

Nous allons démontrer que  $X(u, v)$ , considérée comme fonction de la variable  $u$ , possède la propriété  $N$  <sup>53)</sup> pour toutes les valeurs de  $v$  dans l'intervalle  $(v_1, v_2)$ , sauf peut-être les valeurs d'un certain ensemble de mesure nulle. Considérons les segments rectilignes  $S(v)$  joignant les deux points  $u_1 + iv$  et  $u_2 + iv$ , où  $v$  est une valeur quelconque dans l'intervalle  $(v_1, v_2)$ . Nous avons déjà vu que chaque corde du cercle  $\Omega'$ , parallèle au diamètre  $d_1$ , possède la propriété  $N$ , exception faite des cordes dont les points d'intersection avec le diamètre  $d_2$  constituent un ensemble de mesure linéaire nulle. Puisque le diamètre  $d_1$  coïncide avec l'axe des  $u$ , il en résulte que tous les segments  $S(v)$  possèdent la propriété  $N$ , sauf peut-être ceux qui correspondent aux valeurs de  $v$  formant un certain ensemble  $e'$  de mesure nulle. Pour chaque valeur de  $v$ , n'appartenant pas à  $e'$ , le segment  $S(v)$  jouit de la propriété:

À tout ensemble parfait, situé sur  $S(v)$  et possédant une mesure linéaire nulle, il correspond dans le domaine  $D$  une image de longueur nulle au sens de M. Painlevé.

Mais la projection sur l'axe des  $X$  (dans le plan du domaine  $D$ ) d'un ensemble de longueur nulle est toujours un ensemble de mesure linéaire nulle. Donc, il résulte du théorème déjà cité de M. Lusin que, pour les valeurs de  $v$  n'appartenant pas à l'ensemble  $e'$ , la fonction  $X(u, v)$ , considérée comme fonction d'une seule variable  $u$ , possède la propriété  $N$ .

<sup>52)</sup> Voir, par exemple, Carathéodory, *Reelle Funktionen*, Leipzig 1918, S. 632.

<sup>53)</sup> Nous dirons avec M. Lusin qu'une fonction  $\varphi(x)$  possède la propriété  $N$  dans l'intervalle  $(a, b)$ , si l'ensemble de ses valeurs pour les points  $x$  appartenant à un ensemble quelconque de mesure nulle a aussi une mesure nulle.

Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (1915), p. 109 (en russe).

D'après un théorème de M. Lusin, une fonction continue  $\varphi(x)$  possède la propriété  $N$ , lorsque l'ensemble de ses valeurs pour les points appartenant à un ensemble parfait quelconque de mesure nulle a aussi une mesure nulle.

Lorsque  $v$  n'appartient à aucun des ensembles  $e$  et  $e'$  la fonction  $X(u, v)$ , considérée comme fonction de  $u$ , possède la propriété  $N$  et, de plus, possède une dérivée sommable  $\frac{\partial X}{\partial u}$ , finie presque partout dans  $(u_1, u_2)$ . Il en résulte, d'après un théorème<sup>54)</sup>, que  $X(u, v)$  est absolument continue dans  $(u_1, u_2)$ , d'où il résulte

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial X}{\partial u} du = X(u_2, v) - X(u_1, v).$$

La mesure de l'ensemble  $e + e'$  étant nulle, il vient de la relation (5)

$$\iint_R \frac{\partial X}{\partial u} du dv = \int_{v_1}^{v_2} [X(u_2, v) - X(u_1, v)] dv = \int_C X(u, v) dv,$$

la dernière intégrale étant prise dans le sens positif du contour  $C$ .

En répétant les mêmes raisonnements pour les dérivées

$$\frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v}$$

et en tenant compte de la relation (4), on obtient finalement

$$\int_C F(w) dw = - \iint_R \left( \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \right) du dv + i \iint_R \left( \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial v} \right) du dv.$$

Puisque la dérivée  $F'(w)$  existe presque partout dans  $\Omega$ , on a presque partout dans ce domaine

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = - \frac{\partial Y}{\partial u},$$

d'où il résulte

$$\int_C F(w) dw = 0.$$

La fonction  $F(w)$  est donc holomorphe à l'intérieur du cercle  $\Omega'$ . Puisqu'il existe, à l'intérieur de ce cercle, des points de l'ensemble  $Q$  au voisinage desquels la fonction  $F(w)$  n'est pas partout holomorphe, on arrive donc à une contradiction ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarquons que le théorème cesse d'être vrai, lorsqu'on remplace dans la propriété  $K'$  les trois rayons rectilignes  $t_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$  par deux rayons différents. On le voit sur l'exemple suivant:

$$f(z) = x + i\alpha y, \quad z = x + iy,$$

où  $\alpha$  est un nombre positif, différent de un.

<sup>54)</sup> D. Menchoff, *Sur la représentation conforme des domaines plans*, l. c. p. 645.

L'énoncé du théorème est le suivant:

Toute fonction continue  $\varphi(x)$  ayant la propriété  $N$  dans un intervalle  $(a, b)$  et possédant une dérivée sommable, finie presque partout dans  $(a, b)$ , est une fonction absolument continue.

### Zusatz

zu der Arbeit von Robert Sauer: „Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung“, Math. Annalen 108, S. 673–693.

Wie ich während der Drucklegung bemerkte, läßt sich die in Gleichung (27) bzw. (25) eingeführte Funktion  $\omega$  sogar ohne Quadraturen angeben: Aus den die infinitesimale Verbiegung der vorgegebenen Fläche  $\Phi$  bestimmenden Gleichungen (7) folgt die Integrabilitätsbedingung

$$\lambda x_{vv} + 2\mu x_{uv} - \nu x_{uu} + \lambda_v x_v + \mu_v x_u + \mu_u x_v - \nu_u x_u = 0.$$

Die skalare Multiplikation dieser Vektorgleichung mit  $x_u \times x_v$  bzw.  $x_u \times x_{uu}$  bzw.  $x_v \times x_{vv}$  liefert, bei Einführung homogener Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  nach (20), drei lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $\lambda, \mu, \nu$ :

$$\begin{aligned} & \lambda |\xi_u, \xi_v, \xi_{vv}, \xi| + 2\mu |\xi_u, \xi_v, \xi_{uv}, \xi| - \nu |\xi_u, \xi_v, \xi_{uu}, \xi| = 0, \\ & \lambda |\xi_u, \xi_{uu}, \xi_{vv}, \xi| + 2\mu |\xi_u, \xi_{uv}, \xi_{uv}, \xi| \\ & \quad - \left( \lambda_v - 2\lambda \frac{\partial_v}{\partial} + \mu_u - 2\mu \frac{\partial_u}{\partial} \right) |\xi_u, \xi_v, \xi_{uu}, \xi| = 0, \\ & -\nu |\xi_v, \xi_{vv}, \xi_{uu}, \xi| + 2\mu |\xi_v, \xi_{vv}, \xi_{uv}, \xi| \\ & \quad + \left( \nu_u - 2\nu \frac{\partial_u}{\partial} - \mu_v + 2\mu \frac{\partial_v}{\partial} \right) |\xi_v, \xi_u, \xi_{vv}, \xi| = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Schreibt man in (29)  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$  statt  $\lambda, \mu, \nu$  und ersetzt  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  durch die projektiv transformierten Koordinaten  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\theta}$  (= Linearkombinationen von  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  mit konstanten Koeffizienten), so ergeben sich die entsprechenden Gleichungen für die infinitesimale Verbiegung der zu  $\Phi$  projektiven Fläche  $\tilde{\Phi}$ . Dabei kann man jedoch in den Determinanten  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  anstelle von  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\theta}$  stehenlassen; denn hierdurch ändert sich der Wert der Determinanten nur um einen gemeinsamen nicht verschwindenden Faktor. Sind nun  $\lambda, \mu, \nu$  Lösungen der Gleichungen (29), so befriedigen

die Funktionen  $\tilde{\lambda} = \omega \lambda, \tilde{\mu} = \omega \mu, \tilde{\nu} = \omega \nu$  mit  $\omega = c \left( \frac{\tilde{\theta}}{\theta} \right)^2$  ( $c$  = beliebige Konstante  $\neq 0$ ) die entsprechenden Gleichungen für die infinitesimale Verbiegung der Fläche  $\tilde{\Phi}$ .

R. Sauer.

# Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. I.

Von

Arnold Scholz in Freiburg i. Br.

## Zusammenfassung.

Nach früheren Ergebnissen<sup>1), 2)</sup> existieren Körper mit beliebiger zweistufiger Gruppe, wenn dies für Gruppen von Primzahlpotenzordnung richtig ist. In der vorliegenden Note wird nun für die Gruppen, die sich aus zwei Elementen von Primzahlordnung erzeugen lassen — für den allgemeinsten Fall vgl. die Bemerkungen am Schluß der Arbeit —, die Konstruktion von zugehörigen Körpern durchgeführt. Die Konstruktion ist so allgemein gehalten, daß man daraus einen Überblick über die wichtigsten Typen absoluter zweistufiger Körper (Klassenkörper der Kreiskörper, kurz Kreisklassenkörper) von Primzahlpotenzgrad erhält. Und zwar werden die Fragen behandelt: Wie fällt die Mannigfaltigkeit der Kreisklassenkörper mit demselben maximalen Kreiskörper aus, wenn man dessen Zahlentheorie kennt, und wie dessen Zahlentheorie, wenn man die seiner zyklischen Unterkörper kennt? — Außer mit den Sätzen der Klassenkörpertheorie und dem Reziprozitätsgesetz, den naturgemäßen Hilfsmitteln, wird hier wie in<sup>1), 2)</sup> in weitgehendem Maße mit symbolischen Potenzen und Ordnungen operiert und mit einem Faktorguppenkalkül, der es ermöglicht, im Bereich der Normalkörper ohne Schwierigkeit zu andern Körpern und deren Galoisgruppe überzugehen. Wesentlich erleichtert werden diese Übergänge durch den Tschebotarsjowschen Monodromiesatz<sup>3)</sup>, der es gestattet, jedesmal die Galoisgruppe wieder aus Trägheitsubstitutionen zu erzeugen.

Inhaltsangabe: 0. Einleitung und vorbereitende Definitionen.

1. Eine notwendige Konstruktionsbedingung.
2. Eine hinreichende Konstruktionsbedingung.
3. Erfüllung der hinreichenden Bedingung.
4. Der Fall  $l = 2$ .

## 0.

Die Frage, ob jede endliche zweistufige metabelsche Gruppe als Galoisgruppe eines Zahlkörpers  $K/K_0$  auftreten kann, wenn  $K_0$  als endlicher Grundkörper gegeben ist, kann durch Betrachtung der absolut zweistufigen Körper („Kreisklassenkörper“, als Klassenkörper der Kreiskörper)



von Primzahlpotenzgrad in erheblich weiterem Umfange als bisher — vielleicht auch endgültig — entschieden werden. In einer ersten Abhandlung<sup>1)</sup> über dieses Problem zeigte ich, daß sich zu einem besonders durchsichtigen zweistufigen Typus, den ich Dispositionsgruppe nannte, stets zugehörige Zahlkörper  $K/K_0$  aufweisen lassen. Mit der Konstruktion von „Dispositionskörpern“ war zugleich die Konstruktion für solche Gruppen  $\mathfrak{G} > \mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}$  kommutativ) ausführbar, wo die Ordnung von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  zu der von  $\mathfrak{A}$  teilerfremd ist oder die Bestandteile gemeinsamer Ordnung in  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  nur zyklisch auftreten. Insbesondere war damit für alle Gruppen quadratfreier Ordnung die Körperkonstruktion ausführbar. In einer weiteren Abhandlung<sup>2)</sup> nahm ich eine Zerspaltung der allgemeinen zweistufigen Gruppe in zwei charakteristische Bestandteile vor, die es ermöglichte, die Konstruktion beliebiger zweistufiger Körper auf die Konstruktion von Dispositionskörpern und „Zweikörpern“, einem zweistufigen Typus vom Primzahlpotenzgrad, zurückzuführen, und zwar so, daß jedesmal in einem passenden Produkt von Dispositions- und Zweikörpern ein Körper mit der vorgeschriebenen zweistufigen Gruppe enthalten wäre. Die zum Zweikörper gehörige Zweiggruppe  $\mathfrak{G}$  hat folgende Haupteigenschaften:

1. Sie hängt außer von den Invarianten der Abelschen Gruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  (der Gruppe des Abelschen Körpers, über dem dann der zweite Abelsche Körper gebildet werden soll) nur von der in der Abelschen Gruppe  $\mathfrak{A}$  vorkommenden Maximalordnung ab, genau so wie die Dispositionsgruppe.

2. Im Gegensatz zur Dispositionsgruppe ist bei ihr  $\mathfrak{A}$  die Kommutatorgruppe; der erste Abelsche Schritt in der Konstruktion soll also maximal genommen werden.

3. Jede zweistufige Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist Faktorgruppe einer Zweiggruppe.

Genauer hat die Zweiggruppe vom Typus  $(l^{h_1}, l^{h_2}, \dots, l^{h_n}; l^k)$  folgende Gestalt:

1. Die Erzeugenden  $S_1, S_2, \dots, S_n$  haben die Ordnungen  $l^{h_1}, l^{h_2}, \dots, l^{h_n}$  ( $l$  Primzahl), und dies sind zugleich die Ordnungen der Basiselemente  $S_1\mathfrak{A}, S_2\mathfrak{A}, \dots, S_n\mathfrak{A}$  des „Kommutanden“  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ . Die zyklischen Gruppen  $\{S_i\}_{i=1, \dots, n}$  sind also zum Kommutator  $\mathfrak{A}$  teilerfremd.

2. Die Kommutatoren  $A_{x_1} = S_1^{-1} S_x^{-1} S_1 S_x$  je zweier Erzeugender  $S_n, S_1$  haben alle die Ordnung  $l^k$ .

<sup>1)</sup> Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoischer Gruppe, Math. Zeitschr. 30, S. 332–356. Diese Note sei im folgenden mit D. abgekürzt.

<sup>2)</sup> Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger Gruppe. Sitzber. d. Heidelb. Akad. 1929, Nr. 14.

3. Es gelten außer den zwangsläufigen Relationen<sup>3)</sup>

$$(1) \quad A_{\lambda\mu}^{d_x} A_{\mu x}^{d_\lambda} A_{x\lambda}^{d_\mu} = E \quad (\Delta_r = S_r - 1)$$

und, wegen  $S_x^{f_x} = S_\lambda^{f_\lambda} = E$ ,

$$(2) \quad A_{x\lambda}^{f_x} = A_{x\lambda}^{f_\lambda} = E \quad (f_r = \sum S_r^{i_r}; i_r = 0, 1, \dots, t^{h_r} - 1)$$

keine weiteren davon unabhängigen, d. h. es läßt sich jedes Element von  $\mathfrak{A}$  eindeutig in der Form darstellen:

$$(3) \quad A = \prod_{x < \lambda} A_{x\lambda}^{F_{x\lambda}(S_{x_1}, S_{x_2}, \dots, S_{x_{h_1}})},$$

wobei  $F_{x\lambda} \bmod (l^k, S_1^{h_1} - 1, \dots, S_n^{h_n} - 1, f_x, f_\lambda)$  zu werten und dieser Modul die symbolische Ordnung (vgl. D., S. 336) von  $A_{x\lambda}$  ist.

Nach dem bisher Gesagten bleibt uns die Aufgabe zu lösen, zu jeder Zweiggruppe einen zugehörigen Zweigkörper zu finden. Dabei dürfen wir als Grundkörper  $K_0$  den rationalen Zahlkörper wählen, wenn sich die Konstruktion so ausführen läßt, daß der Zweigkörper  $K$  zu einem gegebenen Körper  $K_1$  teilerfremd ist. Denn dann ist  $KK_1/K_1$  ein Zweigkörper mit derselben Gruppe über  $K_1$ , und damit ist die Aufgabe zugleich für einen beliebigen Grundkörper  $K_1$  gelöst. Diese Nebenbedingung für die Wahl von  $K$  ist nun sicher erfüllbar, wenn man die Diskriminante von  $K$  zu einer gegebenen Zahl, z. B. der Diskriminante von  $K_1$ , teilerfremd wählen darf; denn wenn die Diskriminanten von  $K$  und  $K_1$  teilerfremd sind, sind es auch  $K$  und  $K_1$  selbst. Wir werden es nun überhaupt so einrichten, daß die zum Aufbau des Zweigkörpers  $K$  nötigen zyklischen Bestandteile (absolut oder relativ zyklischen Körper) eine Primzahlpotenz-(Relativ)-Diskriminante besitzen, und jedesmal hierfür eine unendliche Schar von Primzahlen bereithalten, womit dann die Teilerfremdheitsbedingung erfüllbar ist. Die Beschränkung auf Primzahlpotenzen hat dabei den großen Vorteil der Übersichtlichkeit in der Konstruktion und dürfte andererseits die Konstruktionsmöglichkeiten kaum einengen, wie sich bald zeigen wird.

Bevor wir an die Konstruktion des Zweigkörpers gehen, bemerken wir noch folgendes: An sich liegt in der Hervorhebung der Zweiggruppe unter den zweistufigen Primpotenzgruppen eine gewisse Willkür, indem nämlich gerade von den  $n$  Erzeugenden verlangt wird, daß sich ihre Ordnung nicht vergrößert, wenn man vom Kommutanden  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  zu  $\mathfrak{G}$

<sup>3)</sup> Vgl. Ph. Furtwängler: Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. Hamb. Math. Sem. Abh. 7 (1929), S. 14–36; dort: Formel (4), (7), (11). Die linke Seite von (7) ist hier  $= E$ .

übergeht<sup>4)</sup>), ohne daß das gleichzeitig etwa für  $S_1 S_2$  der Fall zu sein braucht. Da aber die Wahl der Basis von  $\mathbb{G}/\mathbb{M}$  selbst ziemlich willkürlich ist, ist die Bildung der Zweiggruppe gegenüber Automorphismen der Gruppe  $\mathbb{G}/\mathbb{M}$  im allgemeinen gar nicht invariant. Die gemachte Auszeichnung bekommt jedoch sofort eine konkrete Bedeutung, sobald man Galois-Gruppen von absoluten Normalkörpern  $K$  betrachtet und als Erzeugende Trägheitssubstitutionen wählt. Nach dem Tschebotarjowschen Monodromiesatz<sup>5)</sup> erzeugen ja die Trägheitsgruppen der einzelnen Primideale in  $K$  die ganze Gruppe von  $K$ . Bei unseren „Primkonstruktionen“ werden nun die  $\{S_i\}$  ganz von selbst als die Trägheitsgruppen innerhalb  $\mathbb{G}/\mathbb{M}$  herauskommen, und daß die  $S_i$  als *Trägheitssubstitutionen* beim Übergang von  $\mathbb{G}/\mathbb{M}$  auf  $\mathbb{G}$  ihre Ordnung behalten, wird sicher dadurch erreicht, daß man die Relativdiskriminante oder den Führer von  $K/K^0$  zur Diskriminante von  $K^0$  teilerfremd wählt, wenn  $K^0$  der maximale Abelsche Unterkörper (der Kreiskörperbestandteil) von  $K$  ist<sup>6)</sup>).

Wir haben hier eben schon eine Bezeichnungsweise angewandt, die sich überhaupt in der Theorie der absoluten Normalkörper  $K$  als zweckmäßig erweist, und die wir darum genau formulieren wollen:

Als Erzeugende der Galoisgruppe  $\mathbb{G}$  von  $K$  wählen wir immer Trägheitssubstitutionen  $T_1, \dots, T_k$ . Verwenden wir ferner der Anm. <sup>4)</sup>) entsprechend in einer Faktorgruppe  $\mathbb{G}/\mathbb{H}$  ebenfalls  $T_1, \dots, T_k$  für die Restklassen  $T_1\mathbb{H}, \dots, T_k\mathbb{H}$ , die sie repräsentieren, und war etwa  $T_1$  in  $K$  Trägheitssubstitution für das Primideal  $\mathfrak{p}$ , so ist es jetzt im zu  $\mathbb{H}$  gehörigen Unterkörper  $K'$  Trägheitssubstitution des durch  $\mathfrak{p}$  teilbaren Primideals  $\mathfrak{p}'$  in  $K'$ . Umgekehrt wollen wir aber auch beim Übergang zu einem Oberkörper eine Trägheitssubstitution des Unterkörpers immer wieder nur mit einer Trägheitssubstitution des Oberkörpers identifizieren. —

<sup>4)</sup> Über diese Ausdrucksweise vgl. A. Scholz, Über das Verhältnis von Idealklassen- und Einheitengruppe in Abelschen Körpern von Primzahlpotenzgrad. Sitzber. d. Heidelbg. Akad. 1930, Nr. 3; Anm. 4. Diese Note sei im folgenden mit V. bezeichnet.

<sup>5)</sup> N. Tschebotarjow: Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers. J. f. M. 161 (1929), S. 179—193; Satz 1 (1924).

<sup>6)</sup> Genau wird erreicht, daß die Trägheitsgruppen der Diskriminantenteiler von  $K^0$  beim Übergang zu  $K$  ihre Ordnung behalten. Das ist für zyklische Gruppen gleichbedeutend mit Beibehaltung der Elementeordnung. Da aber die Trägheitsgruppen der einzelnen Primideale zyklisch sind, außer wenn sie im Körpergrad aufgehen, dürfen demnach die Diskriminanten von  $K^0$  und  $K/K^0$  nur eine Potenz von  $l$  gemein haben. Diese singuläre Möglichkeit für die Konstruktion eines Zweigkörpers wollen wir jedoch wegen ihrer Kompliziertheit — außer in der Formulierung des Satzes 2 — nicht berücksichtigen, und überhaupt wollen wir ausführlich nur den Fall betrachten, daß die Diskriminante von  $K/K^0$  zu  $l$  prim ist, und für den andern Fall nur die nötigen zusätzlichen Angaben machen.

Betont sei, daß wir hier nur mit den  $T_1, \dots, T_k$  so verfahren. Daß auf diese Weise keine Widersprüche entstehen können, macht man sich am besten so klar: Man denkt sich erst die  $T_1, \dots, T_k$  als unabhängige Erzeugende einer freien Gruppe  $\mathfrak{F}$ .  $\mathfrak{G}$  entsteht aus  $\mathfrak{F}$  durch Anbringen definierender Relationen. Beim Übergang zu einer Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$  kommen neue Relationen hinzu, dagegen fallen bei einer Aufspaltung von  $\mathfrak{G}$ , zu deren Erzeugung die  $T$  noch ausreichen, Relationen fort. Insbesondere hängt die Ordnung eines  $T$  immer von der Gruppe  $\mathfrak{G}$  mit ihren Relationen ab, in der wir  $T$  gerade betrachten.

## 1.

Wir wenden uns jetzt der Zweiggruppe  $\mathfrak{G}$  zu und wollen den ersten Abelschen Schritt in der Konstruktion des Zweigkörpers, die Bildung des Kreiskörpers  $K^0$  zum Kommutanden  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^0$  vom Typus  $(l^{h_1}, l^{h_2}, \dots, l^{h_n})$  betrachten. Die Wahl von  $K^0$  darf hier nicht wie bei der Konstruktion des Dispositionskörpers unabhängig vom zweiten Abelschen Schritt erfolgen. Wir wollten  $K^0$  aus zyklischen Körpern von Primzahlpotenzdiskriminante aufbauen; also muß  $K^0$  ein Produkt  $K_{p_1}^{h_1} \cdot K_{p_2}^{h_2} \dots K_{p_n}^{h_n}$  werden, wo für  $l > 2$  die  $p$ , verschiedene Primzahlen  $\equiv 1 \pmod{l^{h_v}}$  (oder auch ein  $p_\mu = l^{h_\mu + 1}$ ) sind und dann  $K_p^{h_v}$  den Unterkörper  $l^h$ -ten Grades des  $p$ -ten Kreisteilungskörpers bedeute<sup>7)</sup>. Die Gruppe  $\mathfrak{G}^0$  von  $K^0$  besitzt dann wirklich  $n$  Basiselemente  $S_1, \dots, S_n$  von den Ordnungen  $l^{h_1}, \dots, l^{h_n}$ , wobei  $S_v$  erzeugende Substitution in  $K_{p_v}^{h_v}$ , in den anderen zyklischen  $K_{p_\mu}^{h_\mu}$  aber die Identität ist, und zugleich die Trägheitsgruppe (der Primteiler) von  $p_v$  in  $K^0$  erzeugt.

Bilden wir den absoluten Klassenkörper  $\bar{K}^0$  von  $K^0$  (wir meinen hier immer den  $l$ -Klassenkörper, d. h. den Bestandteil von  $l$ -Potenzgrad des vollständigen Klassenkörpers<sup>8)</sup>), obwohl wir im Augenblick auch den vollständigen Klassenkörper selbst betrachten könnten), so werden wir mit  $S_1, \dots, S_n$  jetzt erzeugende Trägheitssubstitutionen je eines Primteilers von  $p_1, \dots, p_n$  in  $\bar{K}^0$  bezeichnen. Wegen der Unverzweigtheit von  $\bar{K}^0/K^0$  be-

<sup>7)</sup> Für  $l = 2$  sind überall mehr oder weniger starke Abänderungen in der Auswahl der zyklischen Körper nötig, weswegen wir den an sich viel einfacher zu behandelnden Fall  $l = 2$  ganz abtrennen und am Ende der Note anbringen wollen.

<sup>8)</sup> Ebenso ist dann die zugehörige Klassengruppe von  $l$ -Potenzordnung zu nehmen, d. h. Hauptideal ist jedes  $\mathfrak{h}$  mit  $\mathfrak{h}^l = (\gamma)$  und  $(g, l) = 1$ . Als Repräsentanten für die Idealklassen kann man immer solche  $j$  wählen, für die eine Potenz  $j^{l^h}$  Zahlideal  $(\gamma)$  ist, womit man sich auf eine Untergruppe (statt Faktorgruppe) der ursprünglichen Idealklassengruppe von  $l$ -Potenzordnung in der Betrachtung beschränkt. — Entsprechend verfähre man mit Strahlklassengruppen.

halten die  $S_i$  in der Gruppe  $\mathfrak{S}$  von  $\bar{K}^0$  ihre Ordnung  $l^{h_i}$ , und es erzeugen nach dem Tschebotarijowschen Monodromiesatz die  $S_i$  mit ihren Konjugierten schon  $\mathfrak{S}$ . Daraus folgt, daß der Kommutand von  $\mathfrak{S}$ , der  $\mathfrak{G}^0$  sicher als Faktorgruppe enthält, auch schon aus den (hier selbstkonjugierten)  $S_1, \dots, S_n$  mit den Ordnungen  $l^{h_1}, \dots, l^{h_n}$  erzeugt wird. Also ist  $\mathfrak{G}^0$  selbst der Kommutand von  $\mathfrak{S}$ , d. h.:  $K^0$  ist der maximale Abelsche Unterkörper von  $\bar{K}^0$ . Wir nennen dann  $\bar{K}^0$  *Wechselkörper* von  $K^0$ . — Daß  $\bar{K}^0$  Wechselkörper ist, kann man auch durch Betrachtung der Differente von  $K^0$  beweisen, die bei Kreiskörpererweiterungen wachsen müßte.

(Hätte man dagegen irgendeinen Abelschen Körper  $K^0$  mit der Gruppe  $\mathfrak{G}^0$  genommen, so wäre  $\prod K_q^k$  der Kreiskörperteil von  $\bar{K}^0$ , wenn  $q$  alle Diskriminantenteiler von  $K^0$  durchläuft und  $l^k$  jedesmal gerade so groß gewählt ist, daß  $K^0$  noch in  $\prod K_q^{l^k}$  liegt.)

Der absolute Klassenkörper  $\bar{K}^0/K^0$  oder die absolute Klassengruppe von  $K^0$  spielt schon deswegen eine wesentliche Rolle für die Konstruktion des Zweigkörpers, weil die Konstruktion bei zu schmaler Klassengruppe von vornherein versagt, wie in Satz 1 und 2 zum Ausdruck gebracht ist. Sei nämlich, um auf Satz 1 zu kommen,  $K$  irgendein zweistufiger Körper mit dem Kreisteil  $K^0 = \prod K_{p_i}^{l^{h_i}}$ ,  $K/K^0$  Klassenkörper mit dem Führer  $\mathfrak{f}$ , und  $\mathfrak{f}$  zu allen  $p_i$  teilerfremd. Da  $K$  Normalkörper ist, muß  $\mathfrak{f}$  ein invariantes Ideal sein, also wegen seiner Unverzweigtheit in  $K^0$  auch rational:  $\mathfrak{f} = q_1 q_2 \dots q_m$ , wo wieder alle  $q_\mu$  Primzahlen  $\equiv 1 \pmod{l}$  sind oder auch ein  $q_i$  eine höhere Potenz von  $l$  ist). Ist nun  $\hat{K}^0$  der vollständige  $l$ -Klassenkörper (Strahlklassenkörper) mod  $\mathfrak{f}$ , so enthält er sicher den Körper

$$K' = K_{q_1}^l \cdot K_{q_2}^l \dots K_{q_m}^l.$$

Ferner gilt

$$K^0 < \frac{\bar{K}^0}{K} < \hat{K}^0.$$

Dabei ist  $K'$  zu  $K^0$  teilerfremd, und darum auch noch zu  $K$ ; denn der Durchschnitt  $[K, K']$  muß als Kreiskörper noch im Kreisteil  $K^0$  von  $K$  liegen, also auch in  $[K^0, K'] = (1)$ . Ebenso ist  $K'$  fremd zu  $\bar{K}^0$ .

Sei nun etwa  $T_\mu$  erzeugende Substitution des Körpers  $K_{q_\mu}^l$ , ebenso  $\mathfrak{S}_i$  wie zuvor in  $K_{p_i}^l$ , so sind  $S_i$  und  $T_\mu$  als Trägheitssubstitutionen in  $\hat{K}^0$  deutbar, so daß in  $\bar{K}^0$  die  $T_\mu$  und in  $K'$  die  $S_i$  und mit ihnen ihre Kommutatoren  $A_{i,\mu}$  die Identität ergeben. Während im direkten Produkt  $\bar{K}^0 K'$  die Galoisgruppe noch direkt  $\{S_1, \dots, S_n\} \times \{T_1, \dots, T_m\}$  in die

<sup>9)</sup> Vgl. den Anfang von V.

Gruppen von  $\bar{K}^0$  und  $K'$  zerfällt, sieht die Gruppe  $\mathfrak{G}^0$  von  $\bar{K}^0$  so aus: Trägheitsgruppen sind wieder nur die  $\{S_\nu\}$  und  $\{T_\mu\}$  mit ihren Konjugierten<sup>10)</sup>. Daher erzeugen auch hier  $S_1, \dots, S_n; T_1, \dots, T_m$  schon  $\mathfrak{G}^0$  (als Kommutandenbasis einer Primpotenzgruppe auch ohne ihre Konjugierten). Aber die  $T_\mu$  können beim Übergang von  $\bar{K}^0 K'$  auf  $\bar{K}^0$  ihre Ordnung erhöht und Kommutatoren mit den  $S_\nu$  erhalten haben. Dagegen kann sich bei  $\{S_1, \dots, S_n\}$  nur die Kommutatorgruppe ausgeweitet haben. Galt indessen in  $\bar{K}^0$  und  $\bar{K}^0 K'$  noch  $\prod A_{x\lambda}^{H_{x\lambda}(S)} = E$ , so muß jetzt

$$(4) \quad \prod A_{x\lambda}^{H_{x\lambda}} = \prod T_\mu^{L_\mu}; \quad L_\mu < \mathfrak{Q} = (l, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$$

ausfallen (d. h. in der zu  $\bar{K}^0 K'$  gehörigen Untergruppe von  $\mathfrak{G}^0$  liegen).

Gehen wir nun von  $\bar{K}^0$  auf  $K$  zurück und beachten, daß  $K^0$  der Kreisteil von  $K$  ist, so muß  $\mathfrak{G}^0$  wieder der Kommutand werden; also müssen in der Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $K$  die  $T_\mu$  mit Elementen der Kommutatorgruppe zusammenfallen, die sich hier aber wieder allein durch die  $A_{x\lambda}$  darstellt. Ließen sich nun in der Gruppe von  $\bar{K}^0$  die  $A_{x\lambda}$  durch  $r$  symbolisch unabhängige<sup>11)</sup>, etwa  $A_1, \dots, A_r$ , ausdrücken, so lassen sich in  $\mathfrak{G}$  die  $T_\mu$  gleichzeitig mit den  $A_{x\lambda}$  wegen (4) auch schon durch  $A_1, \dots, A_r$  in Verbindung mit den  $T^L$  ausdrücken, also etwa

$$(5) \quad T_\mu = \prod_{\varrho=1}^r A_\varrho^{F_{\mu\varrho}} \cdot \prod_{\nu=1}^m T_\nu^{L_{\mu\nu}}; \quad L_{\mu\nu} < \mathfrak{Q}.$$

Wendet man (5) wieder auf den rechten Faktor  $\prod T_\nu^{L_{\mu\nu}}$  an, so erhält man nach  $k$ -maliger Anwendung des Verfahrens eine Darstellung

$$(6) \quad \begin{aligned} T_\mu &= \prod_{\varrho} A_\varrho^{F_{\mu\varrho}^{(k)}} \cdot \prod_{\nu} T_\nu^{L_{\mu\nu}^{(k)}}, \quad \text{wo } L_{\mu\nu}^{(k)} < \mathfrak{Q}^k, \\ &= \prod_{\varrho} A_\varrho^{F_{\mu\varrho}^{(k)}} \quad \text{für genügend hohes } k^{12)}. \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Für ein  $q = l^h$  reicht auch ein  $T$  mit Konjugierten.

<sup>11)</sup> Wir nennen Elemente  $A_1, A_2, \dots, A_r$  einer Gruppe symbolisch unabhängig, wenn sich keines der Elemente durch die übrigen und deren Konjugierte ausdrücken läßt, also sich keines als symbolisches Potenzprodukt der übrigen darstellen läßt. Und zwar verwenden wir hier diese Bezeichnungsweise zugleich innerhalb der vollen Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  als in der Idealklassengruppe von  $K^0$  bei Transformationen mit Elementen, d. h. Anwendung der Substitutionen, aus  $\mathfrak{G}^0$ , indem wir ein für allemal die Idealklassen eines Körpers mit den Relativ-Substitutionen seines Klassenkörpers dem Artinschen Reziprozitätsgesetz entsprechend identifizieren. — Aus der Unabhängigkeit folgt noch keine direkte Zerlegbarkeit in  $r$  Faktoren. [Vgl. auch <sup>13)</sup>].

<sup>12)</sup> A. Scholz: Die Behandlung der zweistufigen Gruppe als Operatorengruppe. Heidelb. Ak.-Ber. 1933. Loewy-Festschr. Diese Note sei im folgenden mit O. bezeichnet.



Hieraus folgt insbesondere, daß die  $A_e$  auch ohne Hinzunahme der  $T^L$  schon die Kommutatorgruppe von  $\mathfrak{G}$  erzeugen. Wir erhalten daher den folgenden

**Satz 1.** *Ist  $K$  ein zweistufiger Körper von Primzahlpotenzgrad mit der Gruppe  $\mathfrak{G} = \{S_1, \dots, S_n\}$ ,  $K^0$  sein maximaler Kreisunterkörper, und sind die Diskriminanten von  $K^0$  und  $K/K^0$  relativ prim, so besitzt die Gruppe  $\mathfrak{A}$  von  $K/K^0$  höchstens so viel symbolisch unabhängige Erzeugende (Kommutatoren der  $S_i$ ) wie die absolute Klassengruppe von  $K^0$ .*

Unsymbolisch kann man das Ergebnis auch so ausdrücken:

*Ist  $\bar{K}^0$  der absolute  $l$ -Klassenkörper von  $K^0$ ,  $r_0$  die Anzahl der unabhängigen relativ zyklischen Unterkörper von  $\bar{K}^0/K^0$ , die zugleich absolute Normalkörper sind,  $r$  die entsprechende Anzahl für  $K/K^0$ , so gilt  $r \leq r_0$ .*

(Dieser Satz gilt auch ohne Teilerfremdheit der Diskriminanten, wenn man statt des absoluten Klassenkörpers  $\bar{K}^0$  den vollständigen Klassenkörper mod  $p_1 \dots p_n$  nimmt, sogar abzüglich der darin enthaltenen Kreiskörpererweiterungen.)

Zur Formulierung von Satz 1 ist folgendes zu bemerken:

a) Die zweite Fassung des Satzes 1 erhält man, indem man wie in O. statt der Gruppe  $\mathfrak{A}$  nur den Stumpf  $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$  betrachtet, dessen zugehöriger Körper sich aus diesen  $r$  relativ zyklischen Normalkörpern (hier vom Grade  $l$ ) zusammensetzt, und beachtet, daß die Anzahl der Unabhängigen in  $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$  mit der Zahl der symbolisch Unabhängigen in  $\mathfrak{A}$  übereinstimmt.

b) Wir waren zwar ursprünglich davon ausgegangen, daß der maximale Abelsche Unterkörper  $K^0$  von  $K$  ein 'Vollkörper'  $K^0 = \prod_p K_p^{h_p}$  ist. Im gegenteiligen Falle kommt aber bei der obigen Überlegung nur eine Verschärfung heraus: Bezeichnen hier  $S_1, \dots, S_t$  die Trägheitssubstitutionen von  $p_1, \dots, p_t$ , wenn dies die Primteiler der Diskriminante von  $K^0$  sind, so sind in  $K^0$  nur etwa  $S_1, \dots, S_n$  ( $n < t$ ) unabhängig. Im maximalen Abelschen Unterkörper von  $\bar{K}^0$ , einem Vollkörper  $K^{00} = \prod_{\tau=1}^t K_{p_\tau}^{h_\tau}$ , sind aber

$S_1, \dots, S_t$  unabhängig. Haben wir in der Gruppe von  $\bar{K}^0/K^0$  wieder  $r_0$  symbolisch unabhängige Erzeugende  $A_1, \dots, A_{r_0}$ , so schließen wir jetzt nicht bloß wie oben, daß im zweistufigen Körper  $K$ , Wechsellkörper von  $K^0$ , wieder die  $T_\mu$  mit Elementen  $A_1^{F_1} \dots A_{r_0}^{F_{r_0}}$  zusammenfallen müssen, sondern sich auch noch die  $t - n$  erzeugenden Substitutionen von  $K^{00}/K^0$  durch die übrigen  $A_e$  ausdrücken lassen, so daß die Gruppe von  $K/K^0$  sogar höchstens  $r_0 - (t - n)$  symbolisch Unabhängige besitzt. (Man beachte nämlich, daß wir oben nicht die Voraussetzung benutzt haben, daß  $\bar{K}^0$  Wechsellkörper von  $K^0$  sei; darum folgt die Aussage über die  $T_\mu$  genau so wie oben, und es bleibt dann noch eine Kreiskörpererweiterung



von  $t - n$  Unabhängigen zu beseitigen, um wirklich auf einen Wechselkörper  $K$  von  $K^0$  zu stoßen.)

c) Da die Zweiggruppe  $\mathfrak{G} \left( \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$  symbolisch Unabhängige  $A_{x,1}$  ( $1 \leq x < 2 \leq n$ ) im Kommutator besitzt, die Maximalzahl für zweistufige Primgruppen mit  $n$  Erzeugenden, muß für sie der Vollkörper  $K^0$  so gewählt werden, daß seine absolute Klassengruppe schon  $\left( \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$  symbolisch Unabhängige besitzt, ohne daß darum schon die Galoisgruppe des Klassenkörpers  $\bar{K}^0$  eine Zweiggruppe zu sein braucht. Das folgt aus Satz 1, wenn wir uns an die Bestimmung der Anm. <sup>9)</sup> halten.

Diese notwendige Bedingung für die Existenz eines Zweigkörpers mit dem Kreisteil  $K^0$ , daß die Klassengruppe von  $K^0$   $\left( \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$  symbolisch Unabhängige besitzen muß, läßt sich, auf Satz 2 hinzielend, noch auf andere Weise ausdrücken: Sie ist erst einmal damit gleichbedeutend, daß jeder in  $K^0$  enthaltene Vollkörper  $K_{x,1}^0 = K_{p_x}^{l_{p_x}} \cdot K_{p_1}^{l_{p_1}}$  eine durch  $l$  teilbare Klassenzahl besitzt. Denn beim Übergang von  $\bar{K}^0$  zum Klassenkörper  $\bar{K}_{x,1}^0$  von  $K_{x,1}^0$  hat man in der Gruppe  $\mathfrak{G}^0$  von  $\bar{K}^0$  die Faktorgruppe nach allen  $S$ , außer  $S_x$  und  $S_1$  zu bilden. Zugleich ergeben dann in  $\bar{K}_{x,1}^0$  alle Kommutatoren der  $S$ , die Identität, ausgenommen höchstens  $A_{x,1}$ , und das hängt, gruppentheoretisch betrachtet, davon ab, ob  $A_{x,1}$  in  $\mathfrak{G}$  von den übrigen  $\left( \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right) - 1$  Kommutatoren  $A_{\mu,1}$  unabhängig ist, zahlentheoretisch betrachtet aber davon, ob die Klassenzahl von  $K_{x,1}^0$  durch  $l$  teilbar ist. Also ist die Aussage, daß alle  $\left( \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$  Kommutatoren  $A_{x,1}$  voneinander unabhängig sind, wirklich damit gleichbedeutend, daß alle  $K_{x,1}^0$  eine durch  $l$  teilbare Klassenzahl haben, und das ist wieder dann und nur dann der Fall, wenn jeder „Körperstumpf“  $K_{x,1}^l = K_{p_x}^{l_{p_x}} \cdot K_{p_1}^{l_{p_1}}$  eine durch  $l$  teilbare Klassenzahl hat. Denn beim Übergang von  $K_{x,1}^0$  zu  $K_{x,1}$  wird nur  $S_x^l = S_1^l = E$ ;  $A_{x,1} = E$  also nur dann, wenn es durch  $S_x^l$  und  $S_1^l$  ausdrückbar wäre, d. h.  $= S_x^x S_1^y \bar{A}$ , wo  $S_x^x, S_1^y < \mathfrak{H}$  und  $\bar{A}$  im Kommutator  $\bar{\mathfrak{H}}$  von  $S_x^l$  und  $S_1^l$  liegt. Da aber  $S_x$  und  $S_1$  Trägheitssubstitutionen sind, gilt  $S_x^x = S_1^y = E$ , während

$$\bar{\mathfrak{H}} = \{ A_{x,1}^{(1)} A_{1,1}^{(1)} \}_{\mathfrak{G}} < \mathfrak{H}^c,$$

wenn man  $f_r^{(1)} = \sum_{\rho=0}^{l-1} S_r^\rho$  setzt und  $\{ \}_{\mathfrak{G}}$  das Zeichen für symbolische Erzeugung ist. Das heißt aber:  $A_{x,1} = E$  auch in  $K_{x,1}^0$ .

Dafür aber, daß die Klassenzahl von  $K_{11} = K_{p_1}^l \cdot K_{p_2}^l$  durch  $l$  teilbar ist, ist notwendig (und hinreichend, wie schon in V. bewiesen, vgl. hier Kap. 3), daß  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitig  $l$ -te Potenzreste sind <sup>13)</sup>. Ist nämlich

<sup>13)</sup> Vgl. A. Scholz: Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm. J. f. M. 161 S. 205.

etwa  $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_l \neq 1$ , so zerfällt  $p_2$  in  $K_{p_1}^l$  nicht; daher gibt es über  $K_{p_1}^l$  zum Führer  $p_2$  nur einen zyklischen Klassenkörper  $l$ -ten Grades, nämlich  $K_{12}$ . Wäre nun der Klassenkörper  $\bar{K}_{12} \neq K_{12}$ , so nach O. auch der Klassenkörperstumpf; dies ist aber ein relativ Abelscher Körper über  $K_{p_1}^l$  und daher, wegen seiner Unverzweigtheit über  $K_{12}$ , Klassenkörper über  $K_{p_1}^l$  mit dem Führer  $p_2$ . Wir haben damit den

**Satz 2.** *Damit sich der Vollkörper  $K^0 = \prod K_{p_i}^{h_i}$  zu einem Zweigkörper erweitern läßt, ist notwendig, daß die  $p_i$  untereinander  $l$ -te Potenzreste sind, soweit sie nicht durch  $l$  teilbar sind. Kommt jedoch eine Potenz von  $l$  unter den  $p_i$  vor, so braucht  $l$  kein  $l$ -ter Potenzrest der übrigen  $p_i$  zu sein, sondern nur umgekehrt, d. h. dann  $p_i \equiv 1 \pmod{l}$  für die übrigen  $p_i$ <sup>14)</sup>.*

Diese Potenzrestbedingung ist aber für jedes  $l$  erfüllbar; man braucht die  $p_i$  nur etwa aus der Klasse der Primzahlen zu nehmen, die im  $l$ -ten Kreisteilungskörper Normen von Primärzahlen  $\pi_i$  sind — das ist eine Aussonderung positiver Relativdichte —, dann gilt für sie das Reziprozitätsgesetz der  $l$ -ten Potenzreste, und man braucht jedes  $\pi_i$  nur noch so zu wählen, daß es  $l$ -ter Potenzrest für alle vorangehenden  $\pi_j$  ist. Schneller kommt man aber zum Ziel, und mit kleineren Zahlen, wenn man die Kombinationen  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  etwa nach der Größe ihres Produkts geordnet auf ihren gegenseitigen Potenzrestcharakter der Reihe nach durchprüft. Man gelangt dann immer zu einer höheren Relativdichte der günstigen Fälle als bei der obigen Primärauswahl. Z. B. haben für  $n = 2$  unter allen Primzahlpaaren der Form  $lx + 1$  die gegenseitigen  $l$ -ten Potenzreste die Dichte  $1:l^2$ . Oft findet man allerdings ein anfängliches Zurückbleiben hinter der Dichte — eine auch sonst häufig auftretende Erscheinung, daß sich die kleinen Zahlen untereinander schlecht vertragen. So müßte für  $l = 3$  jedes neunte Paar  $p_1 \cdot p_2$ ;  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{3}$  gegenseitiger kubischer Rest sein; tatsächlich sind aber die sechs ersten kubischen Restepaare:

Produkt . . .	1267	1339	1561	2869	2947	2977
$p_1 \cdot p_2$ . . . .	7 · 181	13 · 103	7 · 223	19 · 151	7 · 421	13 · 229
überhaupt das .	32.	35.	42.	81.	85.	86. Paar

<sup>14)</sup> Im Falle  $p_i = l^h$  bestand ja noch die früher von uns ausgeschaltete Möglichkeit,  $l$  im Führer von  $K/K^0$  aufzunehmen, ohne die Ordnung der Trägheitsubstitution  $S_l$  zu vergrößern. Diese Möglichkeit besteht z. B. bei  $K_{12} = K_{12}^l \cdot K_{p_2}^l$  immer, wenn  $p_2 \equiv 1 \pmod{l}$ , aber  $\left(\frac{l}{p_2}\right)_l \neq 1$ ; nicht aber für  $p_2 \equiv 1 \pmod{l}$ , wie man aus den Ausführungen des 3. Kap., insbesondere (16), angewandt auf  $K_{p_2}^l$ , entnehmen kann. Absolut einklassig ist  $K_{12}$  in beiden Fällen.

Vollständigkeithalber sei noch hinzugefügt, daß man bei beliebiger Potenzrestverteilung der  $p$ , untereinander nur darüber verfügt, ob jeder Kommutator  $A_{x,i}$  von den übrigen unabhängig oder abhängig ist, nicht aber über die Anzahl der symbolisch Unabhängigen in der Kommutatorgruppe. Es wäre selbst bei totalem Nichtrest  $\left(\frac{p}{p_r}\right) \neq 1$  (für jedes  $\mu \neq r$ ) möglich, daß noch je  $\binom{n}{2} - 1$  Kommutatoren unabhängig sind, während etwa  $\prod_{x < i} A_{x,i} = E$ .

## 2.

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen sich der Vollkörper  $K^0 = \prod K_{p_r}^{h_r}$  wirklich zu einem Zweigkörper vom Typ  $(l^{h_1}, \dots, l^{h_n}; l^k)$  erweitern läßt. Der Satz 2 lieferte uns ja nur eine notwendige Bedingung, von der wir nicht wissen, ob sie auch hinreichend ist. Als Zweigkörper kommen nach 1. Wechselkörper von  $K^0$  mit einem Führer  $f = q_1 q_2 \dots q_m$  in Frage, der zu  $p_1 \dots p_n$  teilerfremd ist. Der volle Klassenkörper  $\widehat{K}^0 \bmod f$  hatte eine Relativgruppe  $\widehat{\mathfrak{A}}$  mit den Kommutatoren  $A_{x,i}$  der  $S$ , und den Trägheitssubstitutionen  $T_1, \dots, T_m$  von  $q_1, \dots, q_m$  als symbolischen Erzeugenden. Für einen in  $\widehat{K}^0$  enthaltenen Wechselkörper müssen diese Trägheitssubstitutionen  $T_s$  mit irgendwelchen  $\prod A_{x,i}^{e_{x,i,s}}$  zusammenfallen. Es fragt sich, wann ein maximaler, d. h. in keinem anderen unserer Wechselkörper enthaltener Wechselkörper Zweigkörper ist.

Wir beginnen hier mit dem Fall  $n = 2$ . Es wird  $K^0$  das Produkt zweier zyklischer Körper  $K_1 = K_{p_1}^{h_1}$  und  $K_2 = K_{p_2}^{h_2}$ . Der absolute Klassenkörper  $\widehat{K}^0/K^0$  hat eine 'hypozyklische' Gruppe  $\{A\}_\varepsilon = \mathfrak{A}^0$ , wo  $A$  der Kommutator der Trägheitssubstitutionen  $S_1$  und  $S_2$  von  $p_1$  und  $p_2$  ist. Nach Satz 2 sind wir darauf angewiesen, daß  $\widehat{K}^0 \neq K^0$  ausfällt; im allgemeinen liefert uns aber  $\widehat{K}^0$  noch keinen Zweigkörper, sondern wir müssen für einen passenden Klassenkörper über  $K^0$  einen Führer zu Hilfe nehmen. Es wird uns hier aber eine Primzahl  $q$ , Trägheitssubstitution  $T$ , als Führer reichen, während wir später im Falle  $n$  Erzeugender  $\binom{n}{2}$  Substitutionen  $T$  zur 'Belegung' der  $A_{x,i}$  brauchen werden. Der Strahlklassenkörper  $\widehat{K}^0 \bmod q$  hat daher in seiner Gruppe nur die symbolischen Erzeugenden  $A$  und  $T$ , und man erhält alle in  $\widehat{K}^0$  enthaltenen maximalen Wechselkörper von  $K^0$ , indem man in der Galoisgruppe  $T$  mit beliebigem  $A^F$  identifiziert, d. h. zu jeder Gleichung  $T = A^F$  gehört ein bestimmter maximaler Wechselkörper  $K$ , und jeder läßt sich durch wenigstens eine solche Gleichung charakterisieren. Der Wechselkörper  $K$  ist wiederum

hypozyklisch (vgl. O.), und seine erzeugende Relativsubstitution, die infolge der Identifizierung  $T = A^F$  wieder  $A$  lautet, bleibt Kommutator von  $S_1$  und  $S_2$ . Ferner ist die Struktur der absoluten Galoisgruppe  $\mathfrak{G}$  von  $K$  schon durch die symbolische Ordnung  $\mathfrak{M}$  von  $A$  (bei festem  $K^0$ ) bestimmt, da  $S_1^{p^h} = S_2^{p^h} = E$  in  $\mathfrak{G}$  gilt. Wir nennen  $\mathfrak{M}$  auch die symbolische Ordnung von  $\mathfrak{G}$ .

Wie bestimmt man nun  $\mathfrak{M}$ ? Angenommen,  $A$  habe in der absoluten Klassengruppe von  $K^0$  die Ordnung  $\mathfrak{H}$ , die sich beim Übergang zur Strahlklassengruppe  $\widehat{\mathfrak{M}} \bmod q$  vergrößert haben kann, aber dann so, daß  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{H}} (= \Sigma A^H \text{ mit } H < \mathfrak{H})$  aus Zahlidealen besteht, die sich auf verschiedene Restklassen  $\bmod q$  verteilen können. Die symbolische Ordnung  $\mathfrak{R}$  der erzeugenden Hauptidealrestklasse  $T^{13}) \bmod q$  hängt außer von der in  $q-1$  (bzw.  $q$ ) aufgehenden Potenz von  $l$  von der Verteilung der Einheiten auf die Restklassen  $\bmod q$  ab. Ist ferner  $\mathfrak{R}$  die symbolische Relativordnung von  $T$  in bezug auf die Potenzen von  $A$ , d. h. besteht  $\mathfrak{R}$  aus allen Polynomen  $K$ , für die  $T^K = A^H$  in  $\widehat{\mathfrak{M}}$  ausfällt, was  $A^{\mathfrak{H}} = T^{\mathfrak{R}}$  bedeutet, so hat der zur Gleichung  $T = A^F$  gehörige Weiskörper eine zweistufige Gruppe mit der symbolischen Ordnung

$$(7) \quad \mathfrak{M} = (F\mathfrak{R}, FK_1 - H_1, FK_2 - H_2, \dots, FK_t - H_t).$$

Hierin bedeute  $K_1, \dots, K_t$  eine Basis für  $\mathfrak{R}$ , und es sei  $T^{K_i} = A^{H_i}$ . (Es ist dann  $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$  isomorph mit  $\mathfrak{H}/\Omega$ , wenn  $\Omega$  die symbolische Ordnung von  $A$  in  $\widehat{\mathfrak{M}}$  ist.)

Nach (2) gilt immer  $\mathfrak{M}|f_1, f_2$ , und unsere Aufgabe ist es jetzt, für vorgegebenes  $k$  zu erreichen, daß  $\mathfrak{M}$  durch den Zweigmodul  $\mathfrak{R} = (l^k, f_1, f_2)$  teilbar wird. Völlig frei verfügen wir über  $F$ , und bei passender Wahl des Führers  $q$  ist auch die Teilbarkeit von  $\mathfrak{R}$ , ebenso  $\mathfrak{R}$ , durch einen vorgegebenen Modul erreichbar. Ein hohes  $\mathfrak{R}$  ist aber nicht immer erwünscht. Ebenso wenig darf man  $F$  zu hoch wählen; denn wenn auch in (7) dadurch  $F\mathfrak{R}$  hoch ausfällt, so könnten die übrigen Basiselemente  $FK_i - H_i$ , wenn eben  $FK_i$  im Verhältnis zu  $H_i$  zu hoch liegt ('Höhe' immer an der Teilbarkeit durch  $\mathfrak{R}$  gemessen), schon den Modul  $\mathfrak{H}$  erzeugen, d. h. wir kämen nicht weiter als mit dem absoluten Klassen-

<sup>13)</sup> Der zu  $\{T\}_{\mathfrak{G}}$  gehörige Unterkörper von  $\widehat{K}^0$  ist der absolute Klassenkörper; daher besteht  $\{T\}_{\mathfrak{G}}$  in der Strahlklassengruppe  $\bmod q$  in  $K^0$  aus den Hauptidealrestklassen und ist äquivalent der Faktorgruppe der Zahlrestklassen nach den Einheitenklassen  $\bmod q$ . Zerfällt  $q$  voll in  $K^0$ , d. h. in lauter verschiedene Primideale 1. Grades, so existiert eine symbolisch erzeugende Zahlrestklasse  $\alpha$  der Ordnung  $(l^r, S_1^{p^h} - 1, S_2^{p^h} - 1)$ , wenn  $l^r | q-1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  oder  $q = l^{r+1}$  (vgl. D. S. 351). — Für  $q = l^{r+1}$  genügt sogar schon, daß  $l$  in  $K^0$  unverzweigt. Wir halten uns weiter an  $q \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

körper. Dies wäre ganz bestimmt der Fall, wollte man  $F$  aus  $\mathfrak{H}$  wählen; denn die  $K_q$  liegen nach 1. sicher in  $\mathfrak{Q}$ , und für  $F = H$  wäre  $T = A^H = T^K$  in  $\mathfrak{G}$ , d. h.  $T = E$  wegen  $K < \mathfrak{Q}$ . Also käme hier der absolute Klassenkörper selbst mit  $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}$  heraus.

Vielmehr werden wir  $F \sim 1$ , d. h.  $F = J \triangleleft \mathfrak{Q}^{16}$ ) und dann  $\mathfrak{R}$  durch  $\mathfrak{R}$  teilbar wählen, insbesondere  $q \equiv 1 \pmod{l^k}$  und voll zerfallend. Der zur Gleichung  $T = A^F$  gehörige Wechselkörper ist bei  $F \sim 1$  zum absoluten Klassenkörper teilerfremd, nach einer Tschebotarschischen Bezeichnung 'rein verzweigt'; denn der Klassenkörperstumpf gehört ja zur Untergruppe  $\{A^{\mathfrak{Q}}, T\}_{\mathfrak{E}}$ , ein dem Stumpf *enthaltender* Wechselkörper also zu einer Gleichung  $T = A^L$ .

Wenn auch bei der Beschränkung auf rein verzweigte Wechselkörper einige Konstruktionsmöglichkeiten verlorengehen, so gestaltet sich doch für  $F \sim 1$  die Aufgabe viel einfacher, und Satz 3 liefert dann als Resultat der folgenden Überlegungen eine übersichtliche Bedingung für die Lösbarkeit. Für  $F \sim 1$  ist nach (7) stets  $\mathfrak{R} | \mathfrak{R}$ , und zwar ist  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$  erreichbar, wenn sich in  $\hat{\mathfrak{R}}$  ein  $T^J A$  von der Ordnung  $\mathfrak{H}$  finden läßt. In diesem Falle besteht nämlich die direkte Zerlegung

$$(8) \quad \hat{\mathfrak{R}} = \{T\}_{\mathfrak{E}} \times \{T^J A\}_{\mathfrak{E}} = \{T\}_{\mathfrak{E}} \times \{T^{-1} A^F\}_{\mathfrak{E}},$$

wo sich  $F$  durch  $FJ \equiv -1 \pmod{\mathfrak{H}}$  bestimmt. Denn in diesem Falle kommen nur  $\mathfrak{R}$ -te Potenzreste mod  $q$  als Potenzen von  $T^{-1} A^F$  oder  $T^J A$  vor, und es erhalten alle Elemente  $\hat{A}$  von  $\hat{\mathfrak{R}}$  eine eindeutige Darstellung  $T^{F_1} (T^J A)^{F_2}$ ;  $F_1$  eindeutig mod  $\mathfrak{R}$ ,  $F_2$  mod  $\mathfrak{H}$ , und dabei ist  $F_2$  der Exponent der absoluten Idealklasse von  $\hat{A}$ , woraus sich dann auch  $F_1$  ergibt. Bildet man nun  $\hat{\mathfrak{R}}/\{T^J A\}_{\mathfrak{E}}$ , so hat man eine hypozyklische, aus  $T$  oder  $A$  erzeugbare Gruppe der Ordnung  $\mathfrak{R}$ . Gelingt die direkte Zerlegung (8) noch bei  $\mathfrak{R} | \mathfrak{R}$ , so haben wir in dem zugehörigen rein verzweigten Wechselkörper einen Zweigkörper vom Typ  $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$  gefunden.

Bestimmt bedeutet aber die direkte Zerlegbarkeit eine Einschränkung für die Wahl von  $\mathfrak{R}$ : An sich könnte man ja  $\mathfrak{R}$  als vollen Dispositionsmodul  $\mathfrak{D} = (l^k, \Delta_1 f_1, \Delta_2 f_2) = (l^k, S_1^{h_1} - 1, S_2^{h_2} - 1)$  wählen, indem man alle Zahlen, die  $l^k$ -te Idealpotenzen sind, zu  $l^k$ -ten Potenzresten mod  $q$  macht<sup>17)</sup>; aber dann darf sich die Zerlegung (8) nicht vornehmen lassen,

<sup>16)</sup> Wie in O. bezeichnen wir mit  $L$  immer Polynome in  $\mathfrak{Q}$ , mit  $J$  solche außerhalb  $\mathfrak{Q}$ ; ferner schreiben wir  $F_1 \sim F_2 \pmod{\mathfrak{R}}$  für  $F_1 \equiv J F_2 \pmod{\mathfrak{R}}$ , was  $F_2 \equiv J' F_1$  mit sich bringt. Also hier  $F \sim 1$ .

<sup>17)</sup> Vgl. D., S. 348 ff. Bei der Konstruktion des (auch rein verzweigten) Dispositionskörpers gleichen Typs, der aber kein Wechselkörper ist, hat die zugehörige Zerlegung die Gestalt  $\{T\}_{\mathfrak{E}} \times \{T^L A\}_{\mathfrak{E}}$  mit Ord  $T = \mathfrak{D}$ .

da ja alle Wechselkörper von  $K^0$  Zweigfaktorgruppen besitzen, also eine Ordnung  $\mathfrak{M}|f_1, f_2$  haben.

Es fragt sich jetzt also: Kann man in  $K^0$  immer einen Modul  $q$  bestimmen, daß dort alle Einheiten  $\mathfrak{N}$ -te Potenzreste sind, und daß sich die direkte Zerlegung (8) durchführen läßt, oder wie muß  $K^0$  beschaffen sein?

Zunächst bedingt  $\mathfrak{N}|\mathfrak{N}$  einen voll zerfallenden Modul  $q \equiv 1 (l^k)$ , wie schon oben bemerkt, damit die Zahlrestklassengruppe mod  $q$  eine durch  $\mathfrak{N}$  teilbare Ordnung besitzt. Setzen wir nun im folgenden immer

$$S_1 - 1 = X; \quad S_2 - 1 = Y,$$

so läßt sich die  $\mathfrak{N}$ -te Potenzrestbedingung für alle Einheiten  $\varepsilon$  auch durch

$$\left(\frac{\varepsilon^{XY}}{q}\right)_f = 1$$

ausdrücken. Die  $\mathfrak{N}$ -ten Potenzreste mod  $q$  sind nämlich diejenigen, deren  $XY$ -te Potenzen  $l^k$ -te Potenzreste sind; denn da die Restklassengruppe mod  $q$  hypozyklisch: jeder Rest in der Form  $T^F$  darstellbar ist, so liegt ein  $\gamma$ , das die Bedingung

$$\gamma^{XY} \equiv \alpha^l (q)$$

erfüllt, in einer Klasse  $T^N$ , die die Bedingung

$$NXY \equiv 0 (\mathfrak{D})$$

erfüllt, d. h. aber  $N < \mathfrak{D}; (\mathfrak{D}, XY) = \mathfrak{N}$  (vgl. O.).

Rechnen wir weiterhin nur noch mit der Klassengruppe nach den  $\mathfrak{N}$ -ten Potenzresten mod  $q$  (Strahlklassengruppe mod  $q; \mathfrak{N}$ ) und behalten die Bezeichnung  $\widehat{\mathfrak{A}}$  für sie bei, so bedeutet zweitens die direkte Zerlegbarkeit

$$\widehat{\mathfrak{A}} = \{T\}_{\varepsilon} \times \{T^P A\}_{\varepsilon}$$

für irgend ein  $P$ , daß es in der absoluten Idealklasse  $A$  ein Ideal  $\mathfrak{r}$  geben muß, dessen  $\mathfrak{S}$ -te Potenzen schon  $\mathfrak{N}$ -te Potenzreste mod  $q$  sind. Ist dabei  $T^P A$  die Strahlklasse von  $\mathfrak{r}$ , so gilt die direkte Zerlegung mit  $P$  als Exponenten von  $T$ .

Also: für  $(\varrho) = \mathfrak{r}^H$  muß  $\varrho$  ein  $\mathfrak{N}$ -ter oder  $\varrho^{XY}$  ein  $l^k$ -ter Potenzrest mod  $q$  sein. Darin ist jetzt die obige gleichlautende Forderung für die Einheiten, die ja unter die  $\varrho$  fallen, eingeschlossen.

Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß der Exponent  $P$  der Abspaltung  $\{T^P A\}_{\varepsilon}$  primitiv sein soll ( $P = J$ ). Das war ja gerade die

Bedingung der Teilerfremdheit zu  $K_q^l$ , die den Körper  $K/K^0$  mit der Gruppe  $\widehat{\mathfrak{U}}/(T^J A)_\infty$  zum Wechselkörper machte. Die Teilerfremdheit zu  $K_q^l$  ( $K_q^l \nless K$ ) drückt sich aber dadurch aus, daß nicht alle Ideale aus  $(T^J A)_\infty$  eine absolute Norm haben, die  $l$ -ter Potenzrest mod  $q$  ist<sup>18)</sup>. Das ist aber damit gleichbedeutend, daß  $r = N(r)$  kein  $l$ -ter Potenzrest ist; denn die Normen von Idealen einer Klasse aus  $\widehat{\mathfrak{U}}$  besitzen denselben  $l$ -ten Potenzrestcharakter mod  $q$ , und die Normen der  $(T^J A)_\infty$ -Ideale sind sicher  $l$ -te Potenzreste, weshalb die erzeugende Klasse  $T^J A$  keine solche Norm haben darf. — Wir haben jetzt die beiden Bedingungen

$$\left(\frac{q^{XY}}{q}\right)_k = 1; \quad \left(\frac{r}{q}\right)_l \neq 1,$$

und diese sind nach der Theorie der Potenzreste dann und nur dann verträglich — d. h. es gibt ein passendes  $q$  —, wenn  $r$  von allen  $q^{XY}$   $l$ -unabhängig ist; also wenn für alle  $q$  die Ungleichung

$$(9) \quad r \neq q^{XY} \sigma^l \\ [(r) = r^{f_1 f_2}; (q) = r^H, (\sigma) = r^{H'}]$$

erfüllt ist. Und zwar kommt dann als Führer jede Primzahl  $q$  in Frage, die noch in

$$(10) \quad K^* = K^0(\zeta_k, \sqrt[k]{\psi_1}, \dots, \sqrt[k]{\psi_s}),$$

aber nicht mehr in  $K^*(\sqrt[l]{r})$  voll zerfällt. Hierbei bedeute  $\psi_1, \dots, \psi_s$  eine Basis für die  $XY$ -ten Potenzen der Zahlen, die  $(\mathfrak{S})$ -te Potenzen von  $r$  sind, also etwa  $(\psi_1) = r^{H_1 XY}, \dots, (\psi_s) = r^{H_s XY}$ , wenn  $\mathfrak{S} = (H_1, \dots, H_s)$ ;  $\psi_{s+1}$  bis  $\psi_e = e^{XY}$ , soweit noch von den vorangehenden  $\psi$  symbolisch unabhängige  $XY$ -te Einheitspotenzen vorhanden sind<sup>19)</sup>. Es liegt dann  $\sqrt[l]{r}$  noch nicht in  $K^*$ , wenn die Ungleichung (9) erfüllt ist<sup>20)</sup>.

Über die Bedeutung der Ungleichung (9) ist folgendes zu bemerken:

1. In Potenzen des Ideals  $r$  gilt sicher eine Gleichung

$$(11) \quad (r) = r^{f_1 f_2} = r_1^{XY} r_2^l;$$

<sup>18)</sup> A. Scholz, Abgrenzungssatz der Kreiskörper, Berliner Akad.-Ber. 1931, XXI. Satz I.

<sup>19)</sup> Es genügt eine symbolische Basis; durch Ergänzung zu einer natürlichen Basis erhielte man nur den Normalkörper von  $K^*$ . Voller Zerfall in einem Körper und dessen Normalkörper fällt aber stets zusammen.

<sup>20)</sup> Vgl. etwa H. Hasse, Bericht über das Reziprozitätsgesetz §9 III. Jahresber. d. D. M. V. Ergänzungsband 6, S. 43.



denn wegen

$$(12) \quad 1 + S_r + S_r^2 + \dots + S_r^{l-1} = (S_r - 1)^{l-1} + l J_r$$

braucht man nur zu setzen

$$(13) \quad r_1 = r^{x^{l-2}} r^{l-2}; \quad r_2 = r^{l J_1 J_2 + J_2 x^{l-1} + J_1 r^{l-1}}$$

für den Fall, daß  $K^0$  vom Typ  $(l, l)$ , und für den allgemeinen Fall  $(l^1, l^2)$  muß man  $r_1$  und  $r_2$  noch mit

$$(14) \quad (1 + S_1^l + S_1^{2l} + \dots + S_1^{l^1 l - l}) (1 + S_2^l + \dots + S_2^{l^2 l - l})$$

potenzieren. Meistens werden  $r_1$  und  $r_2$  sogar Hauptideale sein, so daß dann eine Hauptidealgleichung

$$(r) = (e)^{x^Y} (\sigma)^l$$

besteht. Dann besagt unsere Ungleichung  $r \neq e^{x^Y} \sigma^l$ , daß bei Fortlassen der Klammer notwendig eine Einheit hinzutreten muß. Eine solche Zahlungleichung zwischen symbolischen Potenzprodukten, die sich in eine Gleichung verwandelt, wenn man Zahlen durch Ideale ersetzt, wollen wir eine *Irrealität* nennen und die Ungleichung (9) als *Hauptirrealität* bezeichnen.

Auch andere Irrealitäten sind bei der Betrachtung der zahlen-theoretischen Struktur nichtzyklischer Körper von Bedeutung: Ist in  $K^0$  z. B.  $(\alpha) = r^X$ ,  $(\beta) = r^Y$ , ohne daß  $r$  durch ein Hauptideal ersetzbar, so ist  $\alpha^Y = \varepsilon \beta^X$  mit  $\varepsilon \neq 1$ .

2. Die Hauptirrealität hängt nicht wesentlich vom Ideal  $r$  ab: Gilt sie für irgendein Ideal  $s = r r^F$ , so gilt sie auch für  $r^F$ , weil (11) bei Einsetzen von (13)<sup>21)</sup> auch für  $r$  statt  $r$  gilt; dann kann aber nicht gleichzeitig  $r = e^{x^Y} \sigma^l$  gelten; denn daraus folgte auch  $r^F = e^{F x^Y} \sigma^{F l}$ . Es genügt daher für unsere Zwecke, daß für irgendein Ideal  $s$  aus  $K^0$  und dessen Norm die Hauptirrealität besteht<sup>21)</sup>; dann besteht sie zugleich für jedes Ideal einer erzeugenden Idealklasse  $A^J$ . Wir haben jetzt als abschließendes Resultat gewonnen:

**Satz 3.** *Dann und nur dann läßt sich der Vollkörper  $K^0$  vom Typ  $(l^1, l^2)$  zu einem rein verzweigten Zweigkörper  $K$  vom Typ  $(l^1, l^2, l^3)$  mit einem Primzahlführer  $q$  erweitern, wenn in  $K^0$  die Hauptirrealität (9) für irgendein Ideal  $r$  besteht.  $q$  muß dabei der Schar der Primzahlen angehören, die noch in dem unter (10) definierten Körper  $K^*$  voll zerfallen, aber nicht mehr in  $K^* (\sqrt[r]{r})$ .*

<sup>21)</sup> Unser Repräsentant  $r$  für die absolute Idealklasse  $A$  ist zwar der Anmerkung <sup>9)</sup> entsprechend gewählt; ist aber  $s$  erst in  $g^{l^m}$ -ter Potenz mit  $(g, l) = 1$  Zahlideal, so gilt die Hauptirrealität, wenn für  $s$ , auch für  $s^g$ .

(Diese Vorschrift gälte auch noch für einen Führer  $l^{k+1}$ , wenn  $l$  nicht in  $p_1$  oder  $p_2$  aufgeht; jedoch ist für  $l$  der Zerfall erst von  $K^0(\zeta^k)$  aus zu betrachten.)

Notwendig für das Bestehen der Hauptirrealität ist jedenfalls, daß  $r$  kein Hauptideal ist; es braucht daher die Bedingung, daß die Klassenzahl von  $K^0$  durch  $l$  teilbar sein muß, nicht besonders ausgesprochen zu werden. Es wäre nun sehr interessant, zu untersuchen, ob die Teilbarkeit der Klassenzahl durch  $l$  auch schon hinreichend für das Bestehen der Hauptirrealität ist<sup>22)</sup>. Wir wollen dies im folgenden nur für einen leicht verifizierbaren Spezialfall beweisen, nämlich für den Fall, daß der Primteiler  $p_1$  von  $p_1$  in  $K^0$  in einer erzeugenden Idealklasse  $A'$  liegt und  $K^0$  außerdem die einfachste Gestalt  $K_{p_1}^1 \cdot K_{p_2}^1$  hat. Wir wählen dann  $r = p_1$  ( $r = p_1$ ). Der Beweis der Hauptirrealität für  $r = p_1$ , mit dem dann die Konstruktion eines Zweigkörpers vom Typ  $(l, l; l^k)$  erledigt ist, wird eine noch eingehendere Untersuchung der Einheitengruppe von  $K^0$  erfordern als in V.

Bevor wir jetzt die Strahlklassengruppe  $\widehat{U}$ , die der Hauptgegenstand dieses Kapitels war, ganz verlassen, sei noch ein Wort über die Eindeutigkeit ihrer Untergruppen  $\{A\}_\varepsilon$  und  $\{T\}_\varepsilon$  gesagt:  $\{T\}_\varepsilon$  ist völlig eindeutig bestimmt als die zum absoluten Klassenkörper von  $K^0$  gehörige Untergruppe, zugleich damit als die „Trägheitsmasse“ der Primteiler von  $q$ .  $T$  selbst ist als erzeugende Substitution der Trägheitsgruppe eines Primteilers von  $q$  durch Elemente  $T^{g \cdot s_1^{a_1} s_2^{b_1}}$  ( $g \neq 0(l)$ ) seiner Abteilung<sup>23)</sup> ersetzbar, die Abteilung aber eindeutig bestimmt. Ebenso sind aber auch in der Gesamtgruppe  $\widehat{G}$  des Strahlklassenkörpers die anderen erzeugenden Trägheitssubstitutionen  $S_1, S_2$  nur ihrer Abteilung nach bestimmt. Für ihre Kommutatorgruppe  $\{A\}_\varepsilon$  ist das solange belanglos, als man  $S_1, S_2$  in ihrer Abteilung innerhalb  $\{S_1, S_2\}$  beläßt. Transformiert man aber  $S_1$  etwa mit  $T^{F_1}$  und  $S_2$  mit  $T^{F_2}$ , so geht dabei  $A = S_1^{-1} S_2^{S_1}$  in  $A T^{(F_2 - F_1)XY}$  über. Die Gruppe  $\{A\}_\varepsilon$  ist also nur bis auf Faktoren  $T^{FXV}$  eindeutig bestimmt. — Zur Charakterisierung von  $\{T^{XY}\}_\varepsilon$  betrachte man  $\widehat{G}$  als zweistufige Gruppe mit den drei Erzeugenden  $S_1, S_2; S_3 = T$ . Wegen der Vertauschbarkeit von  $A_{12} = A$  mit  $T$  lauten hier die drei Faktoren der Gleichung (1):  $T^{FX}, T^{-XY}, 1$ .

## 3.

Wie schon hervorgehoben, ist zur weiteren Verfolgung unseres Zieles eine nähere Untersuchung der Einheitengruppe des Vollkörpers  $K^0 = K_1 K_2 = K_{p_1}^1 K_{p_2}^1$  erforderlich. Dabei meinen wir immer nur die Einheiten  $\varepsilon$

<sup>22)</sup> Nach der Bezeichnung von Frobenius.

mit der Norm  $+1$ , d. h. wir betrachten eigentlich nur eine Einheitenuntergruppe vom Index 2, während dann alle Einheiten die Gestalt  $\pm \varepsilon$  hätten. Wir könnten uns auch auf eine Untergruppe von beliebigem endlichen, zu  $l$  teilerfremden Index einrichten, da es auch bei den folgenden Untersuchungen auf eine gemeinsame symbolische Potenzierung aller Einheiten mit einem  $J \neq 0(\mathfrak{Q})$  nicht ankommt. Das gäbe für die  $l+1$  zyklischen Unterkörper von  $K^0$  die Erleichterung, daß man dort immer nur mit den symbolischen Potenzen einer (relativen) Grundeinheit zu rechnen hätte. Immerhin könnte man dann dafür gebrochene Exponenten mit zu  $l$  fremdem Nenner zulassen, um alle Einheiten positiver Norm einzufangen, was aus rein formalen Gründen vielleicht am vorteilhaftesten ist. Zu den  $l+1$  Unterkörpern gehören die schon bisher in Erscheinung getretenen Stammkörper  $K_1 = K_{p_1}^l$  und  $K_2 = K_{p_2}^l$  und noch  $l-1$  weitere Körper  $K$  ( $a = 1, \dots, l-1$ ), in denen sowohl  $p_1$  als  $p_2$  eine  $l$ -te Idealpotenz werden, und die wir die „Mittelkörper“ nennen wollen. Entsprechend nennen wir die Einheiten dieser Körper *Stamm-* und *Mittel-*einheiten, zusammengefaßt: *zyklische* Einheiten. Wir machen uns folgende Tabelle:

Körper	$K_1$	$K_2$	$K_a$
Invarianz . . . . .	$S_2 = 1$	$S_1 = 1$	$S_2 = S_1^a$
Grundeinheit . . .	$\varepsilon_1 = \pi_1^X$	$\varepsilon_2 = \pi_2^Y$	$v_a = \varphi_a^X$
Ambiges Hauptideal	$(\pi_1) = p_1^{1/l}$	$(\pi_2) = p_2^{1/l}$	$(\varphi_a) = p_1^{1/l} p_2^{a/l}$

Was die Substitutionen der Galoisgruppe  $\{S_1, S_2\}$  von  $K^0$  betrifft, so waren sie so definiert, daß  $S_2$  in  $K_1$  und  $S_1$  in  $K_2$  die Identität bewirkt, wie in der Tabelle vermerkt. Die Mittelkörper unterscheiden sich dann durch die Identifizierung von  $S_2$  mit den verschiedenen Potenzen von  $S_1$ . Daher fällt insbesondere

$$(15) \quad \varepsilon_1^Y = \varepsilon_2^X = v_a^{S_2 - S_1^a} = 1$$

aus, und daher genügen als Exponenten von  $\varepsilon_1$  Polynome in  $X$ , für  $\varepsilon_2$  Polynome in  $Y$  und für die  $v_a$  in  $X$  oder  $Y$ . Trotzdem ist es praktisch, allgemein mit Polynomen  $F(X, Y)$  zu rechnen, da oft eine gemeinsame symbolische Potenzierung der Einheiten vorgenommen wird.

Die Grundeinheiten richtet man in den Stammkörpern am besten nach den Primhauptidealen  $(\pi_1)$  und  $(\pi_2)$ , wie in der Tabelle angegeben. Natürlich ist  $\pi_1$  nur bis auf Einheiten und daher  $\varepsilon_1$  bis auf einen Faktor  $\varepsilon_1^{F^X}$  bestimmt, d. h. es ist  $\varepsilon_1$  durch  $\varepsilon_1^J$  mit  $J \equiv 1(\mathfrak{Q})$  ersetzbar. Für die Mitteleinheiten läßt sich schlecht eine einheitliche Normierung

eingeführen. Hervorzuheben ist nur, daß das Verhältnis  $z_1:z_2 \pmod{l}$  für jeden Körper  $K_a$  einzeln festliegt, nämlich durch die Gleichung  $v_a = \varphi_a^x$  bestimmt ist. Wären nämlich  $p_1^{J_1}$  und  $p_2^{J_2}$  beides Hauptideale, so hätte man auch zwei symbolisch unabhängige Einheiten  $v_a$ . — Es gelten noch die Relationen

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^{x^{J_1}-1} = p_1 \pi_1^{-1J_1}, \\ \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2^{y^{J_2}-1} = p_2 \pi_2^{-1J_2}, \\ \bar{v}_a = v_a^{x^{J_1}-1} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \varphi_a^{-1J_1}, \end{cases}$$

wo  $J_1$  und  $J_2$ , beide  $\equiv 1 \pmod{l}$ , dieselbe Bedeutung wie in (12) haben und die überstrichenen Größen immer als Abkürzung verwandt werden sollen.

Wir gehen jetzt zu  $K^0$  über und stellen zunächst einige Ergebnisse aus V. zusammen:

1. Die  $l$ -te Potenz jeder Einheit  $\eta$  aus  $K^0$  ist eine Alteinheit, d. h. ein Produkt von Einheiten der zyklischen Unterkörper (bekanntes Resultat); daher ist

$$\eta = \sqrt[l]{\varepsilon_1^{F_1} v_1^{H_1} \dots v_{l-1}^{H_{l-1}} \varepsilon_l^{F_l}}$$

darstellbar.

2. Hierbei müssen  $F_1, F_2$  und die  $H_a$  folgender Bedingung genügen: Sind alle diese Polynome  $\equiv 0 \pmod{l}$  und wenigstens eines von ihnen  $\not\equiv 0 \pmod{l+1}$ , so müssen mindestens  $l - \mu$  Polynome  $\not\equiv 0 \pmod{l+1}$  sein. Diese nur notwendige Bedingung dafür, daß die Alteinheit  $\varepsilon_1^{F_1} \varepsilon_2^{F_2} \prod v_a^{H_a}$  eine  $l$ -te Potenz ist, heiße die *Breitebedingung*.  $\mu$  heiße der *Grad* der Alteinheit, ist somit das Minimum der Grade der Komponenten  $\varepsilon^F, v^H$ . Die Anzahl der Komponenten von Minimalgrad heiße die *Breite* der Alteinheit. — Der Beweis der Breitebedingung ( $\text{Breite} \geq l - \mu$ ) beruhte darauf, daß eine Alteinheit  $\eta'$  geringerer Breite, bei der etwa  $F_1 \not\equiv 0 \pmod{l+1}$ , als symbolische Potenz (vgl. den Beweis des verschärfenden Satzes 4) eine Einheit  $\varepsilon_i v^i$  besitzt ( $v$  selbst Alteinheit; Komponenten: die Faktoren höheren Grades von  $\eta'$ ). Mit  $\eta'$  wäre dann  $\bar{\varepsilon}_i$  eine  $l$ -te Potenz.

3. Betrachtet man alle

$$(17) \quad \eta^l = \varepsilon_1^{F_1} v_1^{H_1} \dots v_{l-1}^{H_{l-1}} \varepsilon_l^{F_l},$$

und sind  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_a$  die vorkommenden Minima der Einzelgrade in  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, v_a$ , so ist

$$\varepsilon_1^{x^{\lambda_1}}, \varepsilon_2^{y^{\lambda_2}}, v_a^{x^{\mu_a}} (v_a^{y^{\mu_a}})$$

schon Norm einer Einheit von  $K^0$ , aber noch keine niedrigere Potenz. Es sind nämlich

$$\varepsilon^{F_1}, v_1^{H_1}, \dots, v_{l-1}^{H_{l-1}}, \varepsilon_l^{F_l}$$

die Relativnormen von  $\eta$  in bezug auf die  $l+1$  Unterkörper, wenn (17) gilt.

4. Idealtheoretisch haben  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_a$  die Bedeutung, daß die um 1 vermehrten Zahlen die Anzahl der unabhängigen ambigen Hauptideale von  $K^0/K_1, K^0/K_2, K^0/K_a$  ergeben, oder kürzer: die Anzahl der unabhängigen „Amben“, wenn man unter der Ambengruppe eines Relativkörpers die Restklassengruppe der gegenüber den Relativsubstitutionen invarianten Hauptideale nach den Hauptidealen des Grundkörpers versteht<sup>29)</sup>. Für  $K^0/K_a$  sind diese Amben Idealklassen von  $K_a$ , die in  $K^0$  in die Hauptklasse übergehen; in der Sprache des Reziprozitätsgesetzes erzeugen sie die Untergruppe von  $\mathfrak{U}/[A^{s_1^a - s_2^a}]_{\mathfrak{S}}$ , deren „Verlagerung“ nach  $\mathfrak{A}$  eins wird<sup>30)</sup>. Dabei sei jetzt  $\mathfrak{A}$  die absolute Idealklassengruppe von  $K^0$ ,  $\mathfrak{M}$  die symbolische Ordnung von  $A$ , durch die die  $\mu_a$  bestimmt sind. — Die  $\lambda+1$  Stammamben sind dagegen unverzweigte Hauptideale; für  $K^0/K_1$ :

$$p_2^{X^{l-1}}, p_2^{X^{l-2}}, \dots, p_2^{X^{l-1}-\lambda_1},$$

während  $p_2^{X^{l-2}-\lambda_1}$  kein Hauptideal mehr ist.  $p_2$  sei dabei Primteiler von  $p_2$  in  $K^0$ . Allgemein sieht der Zerfall von  $p_1$  und  $p_2$  so aus:

Normenrelationen:

Verzweigungen:

$$\begin{array}{c} (K_1) \\ \nearrow \quad \searrow \\ = N \quad \pi_1, \pi'_1 = N \\ \searrow \quad \nearrow \\ p_1, p_2 \quad \pi'_1, \pi_2 = N \\ (K_2) \end{array} \quad p_1, p_2 (K^0)$$

$$(p_1) = (\pi_1)^{l_1}; \quad (\pi'_1) = p'_1.$$

$$(p_2) = (\pi_2)^{l_2}; \quad (\pi'_2) = p'_2.$$

Resultat für die symbolische Ordnung  $\mathfrak{M}$ :

$$(\mathfrak{M}, Y) < (l, X^{l-1-\lambda_1}, Y),$$

$$(\mathfrak{M}, X) < (l, Y^{l-1-\lambda_2}, X).$$

5. Ist  $\varepsilon_1^{X^{s_1}}$ , aber noch nicht  $\varepsilon_1^{X^{s_1}-1}$   $l$ -ter Potenzrest mod  $p_2$  in  $K_1$ , ebenso  $\varepsilon_2^{Y^{s_2}}$ , aber noch nicht  $\varepsilon_2^{Y^{s_2}-1}$   $l$ -ter Rest mod  $p_1$  in  $K_2$ , so gilt genau

$$(\mathfrak{M}, Y) = (l, X^{l-1-s_1}, Y); \quad (\mathfrak{M}, X) = (l, Y^{l-1-s_2}, X).$$

Also ist  $\kappa_1 \leq \lambda_1, \kappa_2 \leq \lambda_2$ .

<sup>29)</sup> In H. Hasse's Bericht Ia (Klassenkörpertheorie) die Gruppe  $(A)/(x)$  in § 13.

<sup>30)</sup> In der Bezeichnung von H. Hasse: Bericht über das Reziprozitätsgesetz, I. c. S. 170; vgl. Fußnote <sup>25)</sup>.

6. Ist  $\kappa_1 > 0$ , so ist erst  $\pi_1^{x_{\kappa_1} + 1}$   $l$ -ter Rest mod  $p_2$ , wegen  $\pi_1^X = \varepsilon_1$ .  $(\pi_1)$  gehört daher in der Strahlklassengruppe mod  $p_2$  von  $K_1$  einer Klasse der Ordnung  $(l, X)$  an, und daher in  $K^0$  auch  $p_1$  einer absoluten Idealklasse mod  $A^Y$  der Ordnung  $(l, X)$ , also  $p_1 < A^{P_1}$ , wo  $P_1 \neq 0$ , aber  $P_1 X \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{M}, Y)}$ . — Ist dagegen  $\kappa_1 = 0$ , so kann  $\pi_1$  selbst  $l$ -ter Rest sein oder auch nicht. Je nachdem ist hier  $P_1$  mod  $\mathfrak{M}$  durch  $Y$  teilbar oder nicht.

Die Zusammenhänge 4. bis 6. beruhen auf V. 3 und der Anwendung des Artinschen Reziprozitätsgesetzes beim Übergang von den zyklischen Körpern zu  $K^{025)}$ , und zwar entsprechen beim Übergang von den Mittelkörpern wie in <sup>25)</sup> die absoluten Idealklassen einander, während beim Übergang  $K_1 \rightarrow K^0$  den Restklassen mod  $p_3$  in  $K_1$  die absoluten Idealklassen in  $K^0$  entsprechen.

Wir nennen weiterhin eine Alteinheit „Breiteinheit“, wenn sie der Breitebedingung genügt, im gegenteiligen Falle „Engeinheit“. Besitzt eine Breiteinheit vom Grade  $\lambda$  gerade nur  $l - \lambda$  Komponenten  $\varepsilon^F, v^H$ , so nennen wir sie eine *Paßeinheit*. Ihre Komponenten müssen dann alle vom Grade  $\lambda$  sein.

Sodann ergänzen wir die Ergebnisse aus V. durch eine Verschärfung der Breitebedingung für Vollkörper  $K^0$ , während die Breitebedingung in 2. für beliebige Körper vom Typ  $(l, l)$  gilt; außerdem durch einen Satz über Paßeinheiten.

**Satz 4.** *Eine Alteinheit vom Grade  $\mu$ , die gerade die Breite  $l - \mu$  hat, kann nur dann  $l$ -te Potenz sein, wenn in allen zu ihren Komponenten  $\mu$ -ten Grades gehörigen Mittelkörpern dasselbe Ideal  $(p_1^{\frac{1}{\mu}}, p_2^{\frac{1}{\mu}})^{1/l}$  Hauptideal ist, und zwar gerade  $p_1^{1/l} (p_2^{1/l})$ , wenn sie eine Komponente  $\varepsilon_1^{JX^{\mu}} (\varepsilon_2^{JY^{\mu}})$  besitzt. Von einer der beiden Stammeinheiten muß sie also von höherem Grade oder überhaupt nicht abhängig sein.*

**Beweis:** Der Satz ist nach (16) sicher für  $\mu = l - 2$  richtig, da dann die Alteinheit durch Potenzierung mit einem  $J$  und Multiplikation mit der  $l$ -ten Potenz einer Alteinheit auf die Gestalt

$$\bar{\varepsilon}_1^{\frac{1}{2}} \bar{v}_a, \bar{\varepsilon}_2^{\frac{1}{2}} \bar{v}_a \quad \text{oder} \quad \bar{v}_a^{\frac{1}{2}} \bar{v}_c$$

gebracht werden kann. Für  $\mu < l - 2$  erreicht man wie bei 2. durch Potenzierung mit einem passenden  $\Pi(S_1^{a_1} - S_2^{a_2})$  aus  $\mathfrak{Q}^{l-2-\mu}$  — das Produkt besteht aus  $l - 2 - \mu$  Faktoren mit untereinander inkongruenten Verhältnissen  $a_1 : a_2$  mod  $l$  — auf Grund von (15) die Beseitigung aller bis auf zwei ausgewählte Komponenten  $\mu$ -ten Grades, die durch diese

<sup>25)</sup> E. Artin, Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Abh. Math. Sem. Hamburg 7 (1929), 46—51.

Potenzierung den Grad  $l-2$  erhalten. Während die Komponenten von höherem als  $\mu$ -tem Grade einen Grad  $\geq l-1$  erhalten, also in  $l$ -te Potenzen übergehen. Dadurch ist der Beweis auf den Fall  $\mu = l-2$  reduziert.

**Satz 5.** Ist  $\epsilon^l = v_1^{F_1} \dots v_{l-2}^{F_{l-2}}$  (Grad  $\lambda$ ) eine Paßeinheit, so ist jede Breiteinheit der Gestalt  $\bar{\eta} = v_1^{H_1} \dots v_{l-2}^{H_{l-2}}$  (Grad  $\mu \geq \lambda$ ) symbolische Potenz von  $\epsilon^l$ , wenn sie selbst eine  $l$ -te Potenz  $\eta^l$  ist ( $\eta = \epsilon^F$ ); anderenfalls ist  $\bar{\eta} = \epsilon^{lF} \eta'$  darstellbar, wo  $\eta'$  eine Engeinheit ist.

Die Richtigkeit des Satzes ist unabhängig davon, ob die  $v_i$  Einheiten sind und  $K^0$  überhaupt Vollkörper ist. Lediglich, um mit den symbolischen Exponenten bequemer beim Beweis operieren zu können, treffen wir diese Auswahl der zyklischen Unterkörper; für  $\lambda = 0$  setzen wir  $v_l = \epsilon_1$ . Es reichen dann Exponenten in  $X$ , und es bleibt  $v_a^{S_2} - s_1^a = 1$ .

Um Satz 5 zu beweisen, genügt es, zu einer Darstellung  $\bar{\eta} = \epsilon^l \eta'$  zu gelangen, wo  $\eta'$  entweder Engeinheit oder von höherem Grade als  $\bar{\eta}$  ist. Im ersten Fall ist  $\bar{\eta}$  keine  $l$ -te Potenz und für diesen Fall Satz 5 bewiesen; im zweiten Fall wäre der Beweis vom Grad  $\mu$  auf den Grad  $\mu+1$  reduziert, und diese Reduktion genügt für einen vollständigen Induktionsschluß, da man schließlich beim Grade  $l-1+\lambda$  auf Komponenten  $v_i^{F_i}$  stößt, die Relativnormen von  $\epsilon^l$  sind. — Wir dürfen zum Beweis

$$\epsilon^l = (v_1 \dots v_{l-1})^{X^2}$$

setzen, indem wir die  $v_i$  durch Potenzierung mit passendem  $J$  normieren, und schreiben dann

$$\bar{\eta} = (v_1^{a_1} \dots v_{l-1}^{a_{l-1}})^{X^\mu} \eta'_1; \quad \begin{cases} 0 \leq a_i < l \\ \text{Grad } (\eta'_1) > \mu. \end{cases}$$

Jetzt läßt sich sukzessive abspalten:

$$\bar{\eta} = \epsilon^{l a_1 X^{\mu-1}} \bar{\eta}_1,$$

wo

$$\bar{\eta}_1 = (v_2^{a'_2} \dots v_{l-1}^{a'_{l-1}})^{X^\mu} \eta'_1;$$

$$\bar{\eta}_1 = \epsilon^{l a'_2 (S_1 - S_1) X^{\mu-1}} \bar{\eta}_2,$$

wo

$$\bar{\eta}_2 = (v_3^{a''_3} \dots v_{l-1}^{a''_{l-1}})^{X^\mu} \eta'_2 \quad \text{mit Grad } (\eta'_2) > \mu.$$

Allgemein lautet unser Algorithmus:

$$(18) \quad \bar{\eta}_x = \prod_{q>x} v_q^{a_q^{(x)}} \cdot \eta'_x = \epsilon^{l F^{(x)}} \cdot \bar{\eta}_{x+1},$$



wo immer  $\text{Grad}(\eta'_x) > \mu$  und

$$(18) \quad F^{(x)} \equiv \frac{\alpha_{x+1}^{(x)}}{x!} \prod_{a=1}^x (S_a - S_1^a) \cdot X^{\mu-\lambda-x} \pmod{l}$$

zu wählen ist. Dann gelangt man durch Abspaltung von  $\varepsilon^{lF^{(x)}}$  zu einem  $\eta_{x+1}$ , bei dem  $v_1, \dots, v_x$  wegen  $v_a^{S_2-S_1^a} = 1$  nicht wieder unter den Komponenten  $\mu$ -ten Grades auftreten, während  $v_{x+1}$  wegen

$$\prod_{a=1}^x (S_2 - S_1^a) \equiv x! X^x \pmod{S_2 - S_1^{x+1}}$$

jetzt herausfällt.

Da in (18)  $x \leq \mu - \lambda$  bleiben muß, läßt sich der Prozeß zum letzten Mal auf  $\eta_{\mu-\lambda}$  anwenden. Es bleibt dann als Restfaktor eine Einheit  $\eta_{\mu-\lambda+1}$ , die höchstens noch in  $v_{\mu-\lambda+2}, \dots, v_{l-2}$  vom Grade  $\mu$  ist; d. h.  $\eta_{\mu-\lambda+1}$  ist entweder Einseinheit oder von höherem Grade. Damit ist alles bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur passenden Auswahl von  $K^0$ . Wir können mit Hilfe von 5. und 6. erreichen, daß  $p_1$  in eine „Grundklasse“  $A'$  fällt, indem wir festsetzen, daß  $\varepsilon_1^{X^{l-2}}$ , aber nicht  $\varepsilon_1^{X^{l-3}}$   $l$ -ter Rest mod  $p_2$  sein soll, also  $\kappa_1 = l-2$ . Dann ist  $(\mathfrak{R}, Y) = \Omega$ , also  $X \equiv 0 (\mathfrak{R}, Y)$ , und nach 6. ist  $P_1 \neq 0 (\Omega)$ , d. h.  $p_1$  liegt in einer Grundklasse. Über  $\kappa_1$  verfügen wir aber frei, wenn  $p_1$  und damit der Körper  $K_1$  schon festliegt, dagegen die Wahl von  $p_2$  noch offensteht. Denn in  $K_1$  ist

$$\varepsilon_1^{X^{\kappa_1}} \equiv \alpha^l, \quad \varepsilon_1^{X^{\kappa_1-1}} \neq \beta^l \pmod{p_2}$$

gleichbedeutend mit

$$\left( \frac{\varepsilon_1^{X^{\kappa_1}} \varepsilon_1^{\lambda}}{\pi_2^{\lambda}} \right)_l = 1, \quad \left( \frac{\varepsilon_1^{X^{\kappa_1-1}} \varepsilon_1^{\lambda}}{\pi_2^{\lambda}} \right)_l \neq 1 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

da  $p_2 = N(\pi_2')$  und diese Potenzrestbedingungen dann auch für die Konjugierten von  $\pi_2'$  erfüllt sind. Sind die Restbedingungen links erfüllt, so auch die Nichtrestbedingungen rechts, wenn sie nur für  $\lambda = 0$  erfüllt sind, da die linken Zähler als Quotienten der rechten auftreten. Durch Basistransformation der linken Zähler drücken sich die Potenzrestbedingungen prägnanter so aus:

$$\left( \frac{\varepsilon_1^{X^q}}{\pi_2^q} \right)_l = 1 \text{ für } q \geq \kappa_1; \quad \left( \frac{\varepsilon_1^{X^{\kappa_1-1}}}{\pi_2^{\kappa_1-1}} \right)_l \neq 1.$$

Da aber  $\varepsilon_1, \varepsilon_1^X, \dots, \varepsilon_1^{X^{l-2}}$  voneinander  $l$ -unabhängig sind, sind diese Potenzrestbedingungen für jedes  $\kappa_1 \leq l-1$  erfüllbar.

Wir wollen also  $\kappa_1 = l-2$  wählen, damit  $p_1$  in einer Grundklasse liegt. Wegen  $p_1^X = 1$  ist dann sogar  $X \equiv 0 (\mathfrak{R})$ , d. h.

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}, X) = (l, X, Y^{l-1-X_2}).$$

Nur die  $\mathfrak{M}$ -ten Potenzen von  $p_1$  sind Hauptideale, nach 4. und 5. daher  $\kappa_2 = \lambda_2$ . Da ferner  $p_2^X$  schon Hauptideal, ist  $\lambda_1 = l-2$  oder  $= l-1$ ; im letzten Falle ist schon  $p_2$  ein Hauptideal<sup>26)</sup>.

Die niedrigsten Einheitsnormen sind daher in den Stammkörpern

$$K_1: \varepsilon_1^{X^{l-1}} \sim \varepsilon_1^l \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1^{X^{l-2}} = \bar{\varepsilon}_1,$$

$$K_2: \varepsilon_2^{Y^{l_2}} = \varepsilon_2^{Y^{l_2}},$$

in den Mittelkörpern

$$v_1^X, v_2^X, \dots, v_{l-1}^X$$

oder

$$v_1, v_2, \dots, v_{l-1},$$

je nachdem  $\lambda_2 \geq 0$ . Denn in  $K_a$  existieren nur die zwei unabhängigen Idealklassen  $S_1^{-a} S_2$  und  $A$ , da schon  $A^X = E$ . Also  $\mu_a \leq 1$ . Nach 2. und 3. müssen jetzt für  $\lambda_2 = 0$  alle  $\mu_a = 0$  sein, für  $\lambda_2 > 0$  aber  $\mu_a > 0$ , also  $= 1$ .

Jetzt setzen wir die *Hauptirrealität* für  $r = p_1$  an. Durch Multiplikation mit  $\pi_1^{-l_1}$  gewinnt sie nach (16) die Gestalt:

$$(19) \quad \bar{\varepsilon}_1 \neq \varrho^{XY} \eta^l.$$

Da  $\varrho$  und  $\eta$  dabei Potenzen von  $p_1$  sein müssen, ist wegen  $p_1^X = 1$  schon  $\varrho^X$  eine Einheit und daher auch  $\eta$ . Unsere Aufgabe ist es, (19) zu beweisen. Dann läßt sich  $K^0$  zu einem Zweigkörper erweitern. Wir gehen nun von der entgegengesetzten Annahme aus, es bestehe in (19) die Gleichheit. Durch Normbildung nach  $K_1$  folgt wegen  $N(\varrho^{XY}) = \varrho^{XY/l_2} = 1$ :

$$\bar{\varepsilon}_1^l = N(\eta^l); \quad \bar{\varepsilon}_1 = N(\eta).$$

Damit ist der Fall  $\lambda_1 = l-1$  schon erledigt: für ihn besteht sicher die Hauptirrealität. Es bleibt uns der Fall  $\lambda_1 = l-2$ , daß  $\bar{\varepsilon}_1$  die niedrigste Einheitsnorm in  $K_1$  ist. Wäre hier  $\bar{\varepsilon}_1 = \varrho^{XY} \eta^l$ , so wäre  $\varrho^{XY}$  mit  $\bar{\varepsilon}_1$  und  $\eta^l$  eine Alteinheit, und zwar bloß ein Potenzprodukt der Miteinheiten, weil die Relativnormen nach  $K_1$  und  $K_2$ :  $\varrho^{XY/l_2} = \varrho^{XY/l_1} = 1$  ausfallen, also dann

$$(20) \quad \eta^l = \bar{\varepsilon}_1 \prod_{a=1}^{l-1} v_a^{H_a} \quad (\text{Grad } H_a > 0).$$

Jetzt gilt es also, (20) zu widerlegen. Ist nun  $A^{P_1}$  die Idealklasse von  $p_1$ ,  $A^{P_2}$  die von  $p_2$  ( $P_1 \sim 1$ ), und ist  $P_2 \equiv Q P_1 (\mathfrak{M})$ , so bilden wir das Hauptideal

$$p_1^{-Q} p_2 = (\varphi).$$

<sup>26)</sup> Was hier gleichbedeutend mit  $\pi_2 \equiv \pi' \bmod p_1$ , da  $X \equiv 0 (\mathfrak{M})$ .

$\varphi$  besitzt hierbei die Eigenschaft, daß weder  $\varphi^X$  noch  $\varphi^Y$  eine Einheit ist, wohl aber  $\varphi^{XY}$ . Betrachten wir die Einheit  $\omega = \varphi^{XY}$  näher: ihre  $l$ -te Potenz ist ebenso wie  $\varphi^{XYl}$  ein Produkt

$$\omega^l = \varphi^{XYl} = \prod v_a^{F_a}.$$

Nun läßt sich aber noch genauer sagen, daß alle  $F_a$  vom Grade 1 sind. Wir zerlegen

$$\varphi^{XYl} = \prod_a N_a^{K_a}(\varphi^{XY}).$$

Diese Faktoren stimmen nach 3. einzeln mit den  $v_a^{F_a}$  überein. Andererseits ist aber

$$\varphi_a = N(\varphi) \text{ in } K_a.$$

Denn da in allen Mittelkörpern  $p_1^{1/l}$  und  $p_2^{1/l}$  die Relativnormen von  $p_1$  und  $p_2$  sind, ist

$$N(\varphi) = N(p_1^{-Q} p_2) = p_1^{1/l} p_2^{1/l},$$

wenn  $Q \equiv -z \pmod{(X, Y)}$ . Das ist aber in  $K_a$  das oben definierte invariante Hauptideal  $(\varphi_a)$ , wenn man  $z_2 = 1$  setzt, und es hat sich beiläufig ergeben, daß alle Mittelkörper dasselbe ambige Hauptideal mit  $z_1 : z_2 \equiv z \pmod{l}$  haben. (Das gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß das eine verzweigte Primideal  $p_1$  in einer Grundklasse liegt, oder etwas allgemeiner, wenn das eine verzweigte Primideal  $p_2$  in einer Potenzklasse des anderen  $p_1$  liegt.) Es hat sich hier sogar ergeben, daß in den  $K_a$  bestimmt nicht  $p_1^{1/l}$  Hauptideal ist,  $p_2^{1/l}$  dagegen dann, wenn  $z \equiv 0(l)$ ;  $Q \equiv 0(\mathfrak{Q})$ , wenn also  $p_2$  kein Grundideal ist, und das ist der Fall, wenn  $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{Q}$ , nämlich  $\mathfrak{R} = (l, X, Y^e)$  mit  $e > 1$ . Für  $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}$  dagegen, im Falle zyklischer Klassengruppe, wäre  $Q = -z$  zu setzen.

Jetzt hat man in  $K_a$

$$N(\varphi) = \varphi_a; \quad N(\varphi^X) = v_a; \quad N(\varphi^{XY}) = v_a',$$

also

$$\omega^l = \varphi^{XYl} = (v_1 \dots v_{l-1})^{Y^{2l}}.$$

$\omega^l$  ist somit eine Paßeinheit. Aus (20) folgte nun, daß  $\prod v_a^{H_a}$  keine  $l$ -te Potenz ist, und dann besagt unser Satz 5, daß

$$\bar{\varepsilon}^{-1} \eta^l = \prod v_a^{H_a} = \omega^{lF} \eta'$$

darstellbar, wo  $\eta'$  Enginheit. Aus der Gleichung ergibt sich, daß  $\bar{\varepsilon}_1 \eta'$  eine  $l$ -te Potenz und daher Breiteinheit ist. Daß aber die Enginheit  $\eta'$

<sup>27)</sup> Hätten wir  $v_a = \varphi_a^Y$  gewählt, hieße es  $\omega^l = (v_1 \dots v_{l-1})^X$ . Bisweilen ist diese Schreibweise (s. u.) vorzuziehen.

durch Multiplikation mit einer einzigen zyklischen Einheit  $\bar{\varepsilon}_1$  zu einer Breiteinheit wird, ist nur so möglich, daß sie denselben Grad wie diese besitzt, also hier  $l-2$ ;  $\eta' = \bar{v}_a'$ . Nun ist aber  $\bar{\varepsilon}_1 \bar{v}_a'$  nach Satz 4 wegen  $\varphi_a = p_1^{l/2} p_1^{1/2}$  keine  $l$ -te Potenz, und damit ist (20) widerlegt.

Hiermit ist die Hauptidealrealität in  $K^0$  für  $r = p_1$  bewiesen, und es folgt die Existenz von Zweigkörpern des Typs  $(l, l; l^k)$  mit  $K^0$  als Kreisteil.

Durch die Überlegungen, die zur Gültigkeit der Hauptidealrealität in  $K^0$  geführt haben, sind wir zugleich in der Lage, für diesen Typus  $K^0$  die Einheitengruppe bis auf einige unwesentliche Exponenten  $J$  vollständig aus der Alteinheitengruppe zu bestimmen.

Einheitengruppe  $\mathfrak{E}$  in  $K^0 = K_{p_1}^J K_{p_2}^J$  mit  $p_1 = A^J$ :

$$\mathfrak{M} = (l, X, Y^{l-1-\lambda}).$$

A.  $\lambda = 0$ ;  $p_2$  Hauptideal ( $\lambda_1 = l-1$ ;  $\lambda_2 = \mu_a = 0$ ):

$$\mathfrak{E} = \{\varepsilon_1, \eta\} \mathfrak{E}; \quad \eta = \sqrt[l]{\varepsilon_2 v_1 \dots v_{l-1}}.$$

B.  $\lambda = 0$ ;  $p_2$  Nichthauptideal ( $\lambda_1 = l-2$ ;  $\lambda_2 = \mu_a = 0$ ):

$$\mathfrak{E} = \{\varepsilon_1, \eta\} \mathfrak{E}; \quad \eta = \sqrt[l]{\bar{\varepsilon}_1^J \varepsilon_2 v_1 \dots v_{l-1}},$$

wobei hier  $v_a = \varphi_a^Y$  zu setzen ist und dann  $\omega = \varphi^{XY} = \eta^X$  ausfällt.

C.  $\lambda > 0$  ( $\lambda_1 = l-2$ ;  $\lambda_2 = \lambda$ ;  $\mu_a = 1$ ).

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi^{XY} = \sqrt[l]{(v_1 \dots v_{l-1})^X}, \\ \mathfrak{E} &= \{\varepsilon_1, \omega, \eta\} \mathfrak{E}; \\ \eta &= \sqrt[l]{\bar{\varepsilon}_1 (\varepsilon_2^J v_1^{J-1} \dots v_{l-1-\lambda}^{J-1-\lambda})^{Y^\lambda}}. \end{aligned}$$

Speziell für  $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}(\lambda = l-2)$ :  $\eta = \sqrt[l]{\bar{\varepsilon}_1^2 \bar{\varepsilon}_2 \bar{v}_1^{-1}}$ . Hierbei liegen gerade die  $\mathfrak{M}$ -ten Potenzen von  $\eta$  in  $\{\varepsilon_1, \omega\} \mathfrak{E}$ , während  $\omega$  in bezug auf die Alteinheitengruppe die Ordnung  $(l, \mathfrak{Q}^{l-2})$  besitzt. Danach ist die Alteinheitengruppe eine Einheitenuntergruppe vom Index  $l^2$  mit

$$e = \binom{l-1}{2} + l - 1 - \lambda = \binom{l}{2} - \lambda.$$

Entsprechend ist  $e = \binom{l}{2}$  im Falle A. und B.<sup>29)</sup>

<sup>29)</sup> Der erhaltene Index der Alteinheitengruppe stimmt mit dem Resultat aus V. 7 überein, wenn man beachtet, daß die „Idealklassenschrumpfung“ (vgl. V. 7)

Erläuterung zum Aufbau der Einheitengruppe: Was ihre Erzeugung  $\{\varepsilon_1, \eta\} \in$  oder  $\{\varepsilon_1, \omega, \eta\} \in$  anbelangt, braucht aus der Alteinheitengruppe nur  $\varepsilon_1$  herangezogen zu werden, da  $\varepsilon_2$  symbolische Potenz von  $\eta$ ,  $v_a$  von  $\eta$  oder  $\omega$  ist, wenn  $\eta$  und  $\omega$  in der obengenannten Form als Einheiten auftreten, was zu bestätigen bleibt:

Im Falle A. können  $\varepsilon_2, v_1, \dots, v_{l-1}$  nur gemeinsam als Komponenten einer  $l$ -ten Einheitspotenz auftreten, und nach Satz 5 sind dann alle von  $\varepsilon_1$  unabhängigen Einheiten Potenzen von  $\eta$ .

Im Falle B. muß  $\bar{\varepsilon}_1$  als Komponente einer  $l$ -ten Potenz auftreten. Gäbe es außerdem ein  $\eta^i$ , das wie bei A. von  $\varepsilon_1$  unabhängig, von  $\varepsilon_2$  aber vom Grade 0 abhängig ist, so erhielte man durch passende Quotientenbildung eine  $l$ -te Potenz  $\bar{\varepsilon}_1 \Pi v_a^{H_a}$ , was der Hauptirrealität widerspräche. Also muß eine Einheit  $\eta^i$  mit der Komponente  $\varepsilon_2$  die oben angegebene Gestalt haben, was die Grade der Komponenten betrifft. Jetzt gibt es auch keine Einheit außerhalb  $\{\varepsilon_1, \eta\} \in$  mehr; denn eine solche Einheit könnte man zuerst durch Abspaltung einer primitiven  $\eta$ -Potenz von  $\varepsilon_1$  befreien und dann noch von  $\varepsilon_2$  durch Abspaltung einer  $(Y)$ -ten Potenz. Es bliebe in  $l$ -ter Potenz ein Produkt von Mitteleinheiten, das aber nach Satz 5 eine Potenz  $\eta^{X+Y}$  ist. Insbesondere muß auch  $\varphi^{XY}$  eine Potenz von  $\eta^X$  sein, und zwar selbst  $= \eta^X$ , wenn wir 1 als Exponenten von  $v_1$  in  $\eta^i$  festsetzen. Es haben dann alle  $v_a$  den Exponenten 1, bei passender Wahl von  $\pi_2$  auch  $\varepsilon_2$ .

Im Falle C. muß aus demselben Grunde wieder  $\bar{\varepsilon}_1$  mit  $\varepsilon_2^{1/2}$  gekoppelt sein.  $\omega$  ist hier keine  $l$ -te Einheitspotenz, da die  $v_a$  in Minimalgrad  $\mu_a = 1$  auftreten. Jetzt kann es nur noch eine von  $\{\varepsilon_1, \omega\} \in$  symbolisch unabhängige Einheit  $\eta = \sqrt[l]{\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2^{Y/2} \Pi v_a^{H_a}}$  geben, was wie oben folgt.  $\Pi v_a^{H_a}$  läßt sich nach Satz 5 in  $\omega^{1/F} \eta^i$  zerlegen, wo  $\eta^i$  eine Engeinheit ist, die nur von  $v_1, \dots, v_{l-1-2}$  abhängt, wenn man die Abspaltung (18) bei den hinteren  $v_a$  beginnt<sup>28)</sup>.

## 4.

Wir tragen jetzt die Konstruktion des Zweigkörpers vom Typ  $(l, l; l^k)$ , in deren Besitz wir für  $l > 2$  sind, für  $l = 2$  nach. Für  $l = 2$  ist sie viel einfacher, weil dann die Kommutatorgruppe der Zweiggruppe zyklisch ist ( $\text{Ord } A = (2^k, 1 + S_1, 1 + S_2)$ , also  $A^{S_1} = A^{S_2} = A^{-1}$ ).

hier  $l - 1 + k$  beträgt. Unter Heranziehung von V. 7 brauchte man also oben nicht nachzuprüfen, daß man in A. bis C. schon die ganze Einheitengruppe hat. Dann hätte man oben die Hauptirrealität nicht benutzt, und diese ergäbe sich dann aus der Gestalt der Einheitengruppe, da  $\bar{\varepsilon}_1$  nie ohne  $\varepsilon_2^{1/2}$  auftritt. — Unser ursprünglicher Beweis der Hauptirrealität ist aber einfacher, und schließlich ist V. 7 auch von analytischen Hilfsmitteln abhängig.

Wenn wir einen reellen Zweigkörper  $K$  haben wollen, muß  $K^0$  ein Produkt zweier quadratischer Körper  $P(\sqrt{p_1})$ ,  $P(\sqrt{p_2})$  werden, wo  $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$  (nach Vereinbarung Primzahlen). Damit die Klassenzahl von  $K^0 = P(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$  gerade ausfällt, müssen  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitige quadratische Reste sein; das ist aber hier nur eine notwendige Bedingung; es folgt daraus — im Gegensatz zu ungeradem  $l$  — noch nicht, daß schon die Fundamenteinheit  $\varepsilon_1$  (Norm  $-1$ ) von  $P(\sqrt{p_1})$  quadratischer Rest mod  $p_2$  ist, was erst hinreicht.

Das gewinnt man durch Betrachtung des Klassenkörperstumpfes von  $K^0/K^0$ , eines Diederkörpers achten Grades für den Fall  $\bar{K}^0 \neq K^0$ . Er ist ein relativ Abelscher Körper vom Typ  $(2, 2)$  über  $P(\sqrt{p_1})$  und  $P(\sqrt{p_2})$  zyklisch vom Grade 4 über  $P(\sqrt{p_1 p_2})$ .

Wir wählen  $p_1$  beliebig von der Form  $4n+1$ , und  $p_2$  ist dann so zu wählen, daß es in  $P(\sqrt{p_1}, i, \sqrt{\varepsilon_1})$  voll zerfällt. Es kommt die Hälfte aller Primzahlen der Form  $4n+1$  in Betracht, die in  $P(\sqrt{p_1})$  zerfallen. Jetzt liegt  $K^0$  fest. Den gewünschten Zweigkörper  $K$  vom Typ  $(2, 2; 2^k)$  kann man nun wieder als rein verzweigten Klassenkörper über  $K^0$  mit einem Primzahlführer  $q$  erhalten, und zwar hier, ohne die Auswahl von  $p_2$  weiter einzuschränken: Man beachte, daß bei den gruppentheoretischen Überlegungen des zweiten Kapitels nirgends verwandt wurde, daß  $l > 2$ . Sie gelten alle auch für  $l = 2$ ; insbesondere ist das Bestehen der Hauptirrealität in  $K^0$  wiederum notwendig und hinreichend für die Erweiterung von  $K^0$  zu einem rein verzweigten Zweigkörper. Die Hauptirrealität ist aber in unserem biquadratischen Körper  $K^0$  immer erfüllt, wenn er überhaupt eine gerade Klassenzahl hat. Denn es ist hier

$$f_1 f_2 = 1 + S_1 + S_2 + S_1 S_2; XY = 1 - S_1 - S_2 + S_1 S_2,$$

also  $XY \equiv f_1 f_2 \pmod{2}$ , und daher läßt sich die Hauptirrealität

$$(21) \quad r \neq \varrho^{XY} \sigma^2 = \varrho^{f_1 f_2} \tau^2 = N(\varrho) \cdot \tau^2$$

schreiben. Ist nun die Klassenzahl von  $K^0$  gerade, so ist  $\varrho$  eine 2-te Potenz von  $\tau$ , wenn  $\tau$  in einer Grundklasse liegt, und dann ist  $N(\varrho)$  eine Potenz von  $\tau^2$ . Die rechte Seite von (21) ist also ein Quadrat, die linke Seite aber nicht, wie man am deutlichsten erkennt, wenn man  $\tau$  als Primideal ersten Grades wählt<sup>29)</sup>.

Damit ist auch die Existenz von Zweigkörpern vom Typ  $(2, 2; 2^k)$  bewiesen.

<sup>29)</sup> Nach der Bemerkung 2 zur Hauptirrealität ist dann auch keine Norm eines Ideals aus der Grundklasse  $A$  Quadratzahl.

Beiläufig sei erwähnt, daß es noch einfacher wäre, den einen der beiden quadratischen Stammkörper imaginär zu wählen, also

$$K^0 = P(\sqrt{-p_1}, \sqrt{p_2}); -p_1 \equiv p_2 \equiv 1(4).$$

Da es in  $P(\sqrt{-p_1})$  nur die Einheiten  $\pm 1$  gibt<sup>30)</sup>, hat dort die Klassengruppe mod  $p_2$  stets zwei Basisklassen, also  $K^0$  eine gerade Klassenzahl, wenn  $p_2$  quadratischer Rest mod  $p_1$  ist. Jedoch ist dieser Ansatz für höhere Konstruktionen von einem Typ  $(2^{h_1}, 2^{h_2}; 2^k)$  nicht mehr brauchbar. Daß beide Stammkörper imaginär sind, kommt nicht in Frage, da dann  $P(\sqrt{p_1 p_2})$  reell wäre: dieser Körper besitzt dann keinen relativ zyklischen Körper vierten Grades mehr, der den imaginären Körper  $K^0$  enthält. Auch, daß etwa  $K^0$  noch reell und erst  $K$  imaginär wäre, würde keine für jeden Typ  $(2, 2; 2^k)$  brauchbare Konstruktionsmöglichkeit liefern. Dies sei nur an dem Fall erläutert, daß  $p_2$  in  $P(\sqrt{p_1})$  zerfällt, aber  $\varepsilon_1$  kein quadratischer Rest für  $q$  ist. Hier hat  $K^0$  ungerade Klassenzahl, besitzt aber einen unverzweigten imaginär-quadratischen Oberkörper<sup>31)</sup>. Dieser läßt sich darum zyklisch nicht verlängern und ist daher schon in keinem Zweigkörper vom Typ  $(2, 2; 2^k)$  mehr enthalten. Aber es gibt auch keinen rein verzweigten Wechselkörper von  $K^0$ , da wegen der Einklassigkeit von  $K^0$  die Hauptirrealität nicht erfüllbar ist.

Zur Durchführung der allgemeinen Zweigkörperkonstruktion sind jetzt noch zwei Schritte vorzunehmen, die einer weiteren Abhandlung vorbehalten bleiben müssen: zuerst der Übergang vom Typ  $(l, l; l^k)$  zum allgemeineren Typ  $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$ . Das erfordert eine dem Kap. 3 entsprechende, allerdings kompliziertere Untersuchung der Einheitengruppe von Körpern  $K_{p_1}^{l^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{l^{h_2}}$  bezüglich der Hauptirrealität<sup>32)</sup>. Zweitens ist der Übergang zu  $n$  Basisklassen  $S_1, \dots, S_n$  zu machen. Hier sind die Untersuchungen des Kap. 2 über die Strahlklassengruppen entsprechend auszubauen.

Wir wollen dabei gleichzeitig immer das Ziel im Auge behalten, einen möglichst allgemeinen Überblick über die Gesamtheit der Normalkörper vom Primzahlpotenzgrad zu gewinnen, indem wir von ihrer Galoisgruppe ausgehen und diese uns immer aus den Trägheitssubstitutionen erzeugt denken. So haben wir uns bisher im allgemeinen an die wichtigsten Körpertypen gehalten: Wir haben zuerst einmal eine Schar von Körpertypen (Primführer, gegenseitige gute Potenzreste) hervorgeholt, in

<sup>30)</sup> Abgesehen von etwaigen dritten Einheitswurzeln, die selbst Quadrate sind.

<sup>31)</sup> Hier besitzt die Fundamenteinheit von  $P(\sqrt{p_1 p_2})$  positive Norm.

<sup>32)</sup> Vgl. jedoch den Schluß der Note.



deren beliebiger Zusammensetzung möglichst viele Körper als Unterkörper enthalten sind. Wir haben dann erst einige singuläre Fälle, in denen die Primzahl  $l$  besonders hohe Verzweigungen erhält, zurückgestellt, ebenso die „gemischt verzweigten“ Klassenkörper, deren Gruppe sich nach Formel (7) schlechter beschreiben läßt als die der rein verzweigten. Ein eigentlicher Schönheitsfehler in der Auswahl des Zweigkörpers liegt erst im dritten Kapitel, wo wir die absolute Klassengruppe von  $K^0$  durch eine negative Potenzrestbedingung niedrig gehalten haben, um verhältnismäßig einfach zur Hauptirrealität zu gelangen. An sich müßte man aber annehmen, daß gerade eine hohe Klassengruppe günstig ist. Eben darum wäre eine allgemeine Untersuchung über die Gültigkeit der Hauptirrealität von Interesse.

[Zusatz bei der Korrektur (5. 10. 33)]: Inzwischen bin ich zu dem Ergebnis gelangt, daß die Hauptirrealität sogar in  $K_{p_1}^{h_1} \cdot K_{p_2}^{h_2}$  immer schon gültig ist, wenn nur  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitige  $l^{\text{te}}$  Potenzreste sind, ganz unabhängig von der Gestalt der Einheitengruppe. Das liefert die Existenz von Körpern mit beliebig zweistufiger Gruppe aus zwei Erzeugenden.

(Eingegangen am 18. 3. 1933.)

## Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper.

Von

Helmut Hasse in Marburg.

---

Der Beweis für den Existenzsatz der Klassenkörpertheorie gibt keine explizite Konstruktion des zu einer bestimmten Idealgruppe  $H$  des Grundkörpers  $k$  gehörigen Klassenkörpers  $K$ . Die Sache liegt vielmehr so <sup>1)</sup>:

Man beweist zunächst die Existenz von Klassenkörpern  $K_i$  zu den endlich vielen Idealgruppen  $H_i$  vom Exponenten  $n$ , deren Führer  $f_i$  Teiler eines genügend hoch gewählten Erklärungsmoduls  $m$  sind, unter der Voraussetzung, daß  $k$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält; dabei heißt eine Idealgruppe  $H$  vom Exponenten  $n$ , wenn die Ordnung jeder Klasse nach  $H$  ein Teiler von  $n$  ist. Dieser Beweis stützt sich auf den zuvor bewiesenen Umkehrsatz und Isomorphiesatz, wonach jeder abelsche Körper  $K$  über  $k$  vom Exponenten  $n$  — d. h. die Gruppe von  $K/k$  ist vom Exponenten  $n$  — Klassenkörper zu einer Idealgruppe  $H$  vom Exponenten  $n$  ist, und beruht dann auf einer Abzählung der genannten Idealgruppen  $H_i$  einerseits und der abelschen Körper  $K_i$  vom Exponenten  $n$ , die auf Grund der Führerforderung in Frage kommen, andererseits. Er gibt also keine Information über die Einzelzuordnung der  $K_i$  zu den  $H_i$ . Ferner beweist man dann von diesem speziellen Existenzsatz aus leicht die Existenz des Klassenkörpers  $K$  zu einer beliebigen Idealgruppe  $H$  bei beliebigem Grundkörper  $k$ , indem man zum Körper  $k$  der  $n$ -ten Einheitswurzeln über  $k$  übergeht ( $n$  = Exponent von  $H$ ), dort die Idealgruppe  $\bar{H}$  mit Normen in  $H$  betrachtet, ihren Klassenkörper  $\bar{K}$  bildet, und dann durch einen gruppentheoretischen Mechanismus einen bestimmten Teilkörper  $K$  von  $\bar{K}$  herausgreift und als Klassenkörper zu  $H$  nachweist. Dieser zweite Teil des

---

<sup>1)</sup> Siehe hierzu die hektographierten Vorträge von E. Artin über Klassenkörpertheorie (Göttingen 1932) oder die hektographierte Ausarbeitung meiner Vorlesung über Klassenkörpertheorie (Marburg 1932/33). Im übrigen verweise ich für die folgenden Ausführungen generell auf meinen Bericht, insbesondere Teil II.

Existenzbeweises gibt eine explizite Konstruktion. Ich will mich im folgenden daher nur mit dem ersten Teil beschäftigen, und zwar auch nur mit dem Spezialfall einer Idealgruppe  $H$  mit zyklischer Klassengruppe, auf den ja der allgemeine Fall in bekannter Weise einfach zurückführbar ist.

Es sei also  $k$  ein die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthaltender algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, und es sei in  $k$  eine Idealgruppe  $H$  gegeben, vom Index  $n$ , mit zyklischer Klassengruppe, vom Führer  $f$ .

Es handelt sich dann darum, eine Zahl  $\alpha$  in  $k$  explizit zu konstruieren, für die  $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$  der Klassenkörper zu  $H$  ist. Dabei sollen jetzt aber die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie, insbesondere der Existenzsatz, in vollem Umfange als bereits bewiesen vorausgesetzt werden. Die zu gebende Konstruktion wird also nicht gleichzeitig ein Existenzbeweis sein, sondern den Charakter einer nachträglichen Ergänzung zum Existenzbeweis haben.

Die Zahl  $\alpha$  ist durch  $K$  nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr können alle und nur die Zahlen

$$\alpha' = \alpha^n, \quad \text{d. h.} \quad \alpha' = \alpha' \alpha_0^n \text{ mit } \alpha_0 \text{ aus } k,$$

an ihre Stelle treten. Um den Exponenten  $v$  zu normieren, also anders gesagt die  $n$ -Klasse von  $\alpha$  (Klasse in bezug auf die  $n$ -ten Zahlpotenzen aus  $k$ ) eindeutig festzulegen, wähle ich einen festen Isomorphismus  $\chi$  der Klassengruppe nach  $H$  auf die Gruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln, also einen festen erzeugenden Charakter nach  $H$ , und setze fest, daß der  $n$ -te Potenzcharakter

$$(1) \quad \left(\frac{\alpha}{b}\right) = \chi(b)$$

sein soll, im Bereich der zu  $f$  primen Ideale  $b$  aus  $k$ . Dadurch ist die  $n$ -Klasse von  $\alpha$  eindeutig festgelegt.

Ich erinnere nun an die Definition des Normenrestsymbols  $\left(\frac{\beta, \alpha}{p}\right)$  für beliebige  $\beta$  aus  $k$  und beliebige Primstellen  $p$  von  $k$ :

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{p}\right) = \left(\frac{\alpha}{b}\right), \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \beta_0 \equiv \beta \pmod{f_p}, & \beta_0 \equiv 1 \pmod{\frac{f}{f_p}}, \\ \beta_0 = p^b b, & b \text{ prim zu } p. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $f_p$  den Beitrag von  $p$  zu  $f$ , und  $\beta_0$  ist eine Hilfszahl, von deren Wahl innerhalb der in der oberen Zeile angegebenen Bedingungen der Wert des Symbols nicht abhängt. Dieses Symbol ist für jedes feste  $p$  als Funktion von  $\beta$  ein Zahlcharakter vom Führer  $f_p$ .

Formal analog zu dieser Definition definiere ich ein System von Zahlcharakteren  $\chi_p$  der Führer  $f_p$ :

$$\chi_p(\beta) = \chi(b), \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \beta_0 \equiv \beta \pmod{f_p}, & \beta_0 \equiv 1 \pmod{\frac{f}{f_p}}, \\ \beta_0 = p^b b, & b \text{ prim zu } p. \end{cases}$$

Genau wie beim Normenrestsymbol aus den Eigenschaften von  $\left(\frac{\alpha}{b}\right)$ , so beweist man hier aus den Eigenschaften von  $\chi$ , daß diese Definition von der Wahl der Hilfszahl  $\beta_0$  unabhängig ist und wirklich ein System von Zahlcharakteren  $\chi_p$  der Führer  $f_p$  liefert.

Aus der formalen Übereinstimmung der beiden Definitionen ergibt sich: Ist  $K = k\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)$  der zu konstruierende Klassenkörper mit der Normierung (1) für  $\alpha$ , so gilt:

$$(2) \quad \left(\frac{\beta, \alpha}{p}\right) = \chi_p(\beta) \quad \text{für alle } p,$$

im Bereich aller  $\beta$  aus  $k$ .

Zum tieferen Verständnis des folgenden bemerke ich, daß auch umgekehrt durch diese Bedingungen (2) die zu konstruierende  $n$ -Klasse von  $\alpha$ ,

für die also  $K = k\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)$  mit der Normierung (1) ist, eindeutig festgelegt ist. Bezeichnet nämlich für den Augenblick  $\alpha'$  einen Repräsentanten der letzteren  $n$ -Klasse und  $\alpha$  eine (2) genügende Zahl aus  $k$ , so hat man nach dem zuvor Gesagten  $\left(\frac{\beta, \alpha'}{p}\right) = \chi_p(\beta)$ , also  $\left(\frac{\beta, \alpha' \alpha^{-1}}{p}\right) = 1$  für alle  $p$  und  $\beta$ . Daher ist  $\alpha' \alpha^{-1}$  hyperprimär für alle  $p$ , somit jedes  $p$  in  $k\left(\sqrt[n]{\alpha' \alpha^{-1}}\right)$  voll zerlegt, also  $k\left(\sqrt[n]{\alpha' \alpha^{-1}}\right) = k$ ,  $k\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = k\left(\sqrt[n]{\alpha'}\right) = K$ , und  $\left(\frac{\alpha' \alpha^{-1}}{b}\right) = 1$ , d. h.  $\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \left(\frac{\alpha'}{b}\right)$  für alle  $b$ . Diese Feststellung wird aber im folgenden nicht direkt gebraucht.

Für jedes endliche  $p \nmid f$  sei nun  $\eta$  eine Basiszahl für die Gruppe der Primärzahlen in bezug auf die Gruppe der Hyperprimärzahlen<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Diese Faktorgruppe ist bekanntlich zyklisch von der Ordnung  $n$ . Für  $p \nmid n$  ist das klar:  $\eta$  kann als primitive Wurzel mod  $p$  gewählt werden, und  $Np - 1$  ist durch  $n$  teilbar zufolge der Voraussetzung, daß  $k$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält. Für  $p \mid n$  sieht man die Richtigkeit zunächst leicht direkt für Primzahlgrad  $n = p$ ; daraus dann sofort für Primzahlpotenzgrad  $n = p^r$ , weil für eine  $p$ -primäre Basis-

zahl  $\eta$  im Körper  $k\left(\sqrt[p^r]{\eta}\right)$  notwendig  $p$  unzerlegt bleibt (es kommt nur  $k$  als Zerlegungskörper in Frage, weil schon in  $k\left(\sqrt[p]{\eta}\right)$   $p$  unzerlegt bleibt), also  $\eta$  auch  $p^r$ -primär ist; und daraus schließlich ohne weiteres auch für zusammengesetzte  $n$ .

Dann ist auf Grund bekannter Tatsachen über das Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\eta, \alpha}{p}\right) = \left(\frac{\eta}{p}\right)^a,$$

wenn  $a$  die Ordnungszahl von  $\alpha$  in  $p$  ist. Da  $\left(\frac{\eta}{p}\right)$  von der Ordnung  $n$  ist, ist also nach (2)  $a \bmod +n$  durch die Forderung

$$(3) \quad \left(\frac{\eta}{p}\right)^a = \chi_p(\eta)$$

festgelegt. Andere Primideale als die  $p|f$  gehen auf Grund bekannter Tatsachen über den Führer eines Kummerschen Körpers in  $\alpha$  nur zu Exponenten  $a \equiv 0 \bmod +n$  auf. Da die Existenz eines  $\alpha$  mit diesen Eigenschaften auf Grund des Existenzsatzes sichersteht, gibt es also mindestens eine Normierung aller Exponenten  $a \bmod +n$  (natürlich nur endlich viele  $\neq 0$ ), so daß

$$(4) \quad \prod_p p^a = \alpha_0$$

ein Hauptideal<sup>3)</sup>, und dann notwendig

$$(5) \quad \alpha = \alpha_0 \varrho$$

mit einer  $n$ -ten Idealpotenzzahl  $\varrho$  ist. Da die  $n$ -ten Idealpotenzzahlen nur endlich viele  $n$ -Klassen bilden, ist durch (3), (4), (5) die  $n$ -Klasse von  $\alpha$  bereits endlich vieldeutig festgelegt.

Es sei nun weiter  $K^*$  der (verallgemeinerte) Kummersche Körper, der durch Adjunktion der  $n$ -ten Wurzeln aller  $n$ -ten Idealpotenzzahlen aus  $k$  entsteht, und  $H^*$  die zugeordnete Idealgruppe. Die Primideale  $q$  mögen ein volles System von unabhängigen Klassen nach  $H^*$  repräsentieren und prim zu  $n$  und  $f$  gewählt sein. Ferner sei jeweils  $\kappa$  eine Zahl von der Ordnungszahl 1 in  $q$ . Dann ist, da  $\varrho$  wegen  $q \nmid n$  primär für  $q$  ist,

$$\left(\frac{\kappa, \varrho}{q}\right) = \left(\frac{\varrho}{q}\right)^{-1}.$$

Nach (2) und (5) ist ferner

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{p}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha_0}{p}\right) \left(\frac{\beta, \varrho}{p}\right) = \chi_p(\beta).$$

<sup>3)</sup> Die Tatsache, daß für jede Idealgruppe  $H$  der betrachteten Art bei Einführung der zugehörigen Zahlcharaktere  $\chi_p$  und Definition der Exponenten  $a$  gemäß (3) das Potenzprodukt (4) bei geeigneter Normierung der  $a \bmod +n$  ein Hauptideal ist, wird hier aus dem Existenzsatz erschlossen. Könnte man sie direkt aus Umkehrsatz, Artinschem Reziprozitätsgesetz und Normenresttheorie herleiten, so hätte man damit einen explizit konstruierenden Existenzbeweis im Sinne der obigen Ausführungen.

Für  $\beta = \alpha$ ,  $p = q$  ergibt sich also:

$$(6) \quad \left(\frac{\varrho}{q}\right)^{-1} = \chi_q(\alpha) \left(\frac{\alpha, \alpha_q}{q}\right)^{-1} = \chi_q(\alpha) \left(\frac{\alpha_q}{q}\right).$$

Durch diese endlich vielen Kongruenzforderungen (6) für  $\varrho$  wird die  $n$ -Klasse der  $n$ -ten Idealpotenzzahl  $\varrho$  eindeutig festgelegt. Ist nämlich  $\varrho'$  eine weitere, den Forderungen (6) genügende  $n$ -te Idealpotenzzahl, so hat man  $\left(\frac{\varrho' \varrho^{-1}}{q}\right) = 1$  für alle  $q$ , es zerfällt also jedes  $q$  in dem Teilkörper  $k(\sqrt[n]{\varrho' \varrho^{-1}})$  von  $K$  voll, und daher ist nach Wahl der  $q$  dieser Teilkörper mit  $k$  identisch, d. h.  $\varrho' \stackrel{n}{=} \varrho$ .

Zusammengenommen wird also durch (3) bis (6) die  $n$ -Klasse von  $\alpha$  eindeutig so festgelegt, daß  $K = k(\sqrt[n]{\alpha})$  mit der Normierung (1) ist. Zur expliziten Konstruktion von  $K$  hat man also nur den Ansatz (5) mit (irgendwie) gemäß (4) bestimmtem  $\alpha_0$  zu machen, wo die Exponenten  $\alpha \bmod +n$  gemäß (3) bestimmt sind, und dann  $\varrho$  gemäß (6) zu bestimmen.

(Eingegangen am 22. 2. 1933.)

# The representation of integers as sums of pyramidal numbers.

By

R. D. James<sup>1)</sup> in Pasadena (U. S. A.).

E. Maillet in 1895 proved that every integer  $\geq 19272$  could be represented as the sum of at most twelve pyramidal numbers  $(x^3 - x)/6$  ( $x = 1, 2, 3, \dots$ ). In his Chicago dissertation K. C. Yang<sup>2)</sup> showed that every integer is the sum of at most nine pyramidal numbers. In this note we use the method developed by Professor Landau<sup>3)</sup> for cubes to prove that all sufficiently large integers require at most eight pyramidal numbers. The fact that all integers from 1 to 7000 are sums of at most five pyramidal numbers indicates that the result eight is still too large.

We first prove two Lemmas.

Lemma 1. *Let  $p$  be a prime  $\equiv 11 \pmod{12}$  and  $s$  an integer prime to  $p$ . Then there exist solutions  $t$  and  $z$  of the congruences*

- (1)  $3t^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ;
- (2)  $t \equiv 0 \pmod{5}$  when  $s \equiv 1, 2$ , or  $3 \pmod{5}$ ,  
 $t \equiv 1 \pmod{5}$  when  $s \equiv 0$  or  $4 \pmod{5}$ ;
- (3)  $s \equiv \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z \pmod{p^3}$ ,  $\begin{matrix} 0 \leq t < 5p, \\ 5p \leq z < p^3 + 5p. \end{matrix}$

Proof. Since  $\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = -(-1) = +1$  there is an integer  $t_1$  which satisfies (1). Also,  $p$  is prime to 5 and hence by the Chinese remainder theorem there exist integers  $t_2$  and  $t_3$  such that

$$\begin{aligned} t_2 &\equiv t_1 \pmod{p}, & t_2 &\equiv 0 \pmod{5}, & 0 \leq t_2 < 5p, \\ t_3 &\equiv t_1 \pmod{p}, & t_3 &\equiv 1 \pmod{5}, & 0 \leq t_3 < 5p. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> National Research Fellow.

<sup>2)</sup> See also Bulletin Amer. Math. Soc. 34 (1928), page 412.

<sup>3)</sup> E. Landau, *Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waring'sche Problem in der elementaren Zahlentheorie*, Math. Annalen 66 (1909), pp. 102—105. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, § 146.



The congruences (1) and (2) are satisfied if we take  $t = t_2$  when  $s \equiv 1, 2$ , or  $3 \pmod{5}$  and  $t = t_3$  when  $s \equiv 0$  or  $4 \pmod{5}$ . Next, if  $z$  is prime to  $p$ , then  $\frac{z^3 - z}{3} + t^3 z = \frac{z^3 + (3t^3 - 1)z}{3}$  is also prime to  $p$ , since  $3t^3 - 1$  is divisible by  $p$ . Suppose that

$$\frac{z^3 - z}{3} + t^3 z \equiv \frac{u^3 - u}{3} + t^3 u \pmod{p^3}, \quad \begin{matrix} 5p \leq z < p^3 + 5p, & (z, p) = 1, \\ 5p \leq u < p^3 + 5p, & (u, p) = 1. \end{matrix}$$

Then

$$\begin{aligned} z^3 - u^3 + (3t^3 - 1)(z - u) &\equiv 0 \pmod{p^3}, \\ (z - u)(z^2 + zu + u^2 + 3t^3 - 1) &\equiv 0 \pmod{p^3}. \end{aligned}$$

If the second factor is divisible by  $p$  we have

$$\begin{aligned} z^3 + zu + u^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ 4(z^3 + zu + u^2) &\equiv 0 \pmod{p}, \\ (2z + u)^2 &\equiv -3u^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Since  $(u, p) = 1$  there is an integer  $x$  such that  $ux \equiv 1 \pmod{p}$ . Hence  $x^2(2z + u)^2 \equiv -3 \pmod{p}$ , whereas  $p \equiv 3 \pmod{4}$  and  $(-\frac{3}{p}) = (-\frac{1}{p})(\frac{3}{p}) = -1$ . It follows that  $z \equiv u \pmod{p^3}$  and thus  $z - u = mp^3$ . The inequalities

$$5p \leq z < p^3 + 5p, \quad 5p \leq u < p^3 + 5p$$

imply that

$$\begin{aligned} 5p - (p^3 + 5p) &< z - u < p^3 + 5p - 5p, \\ -p^3 &< z - u < p^3 \end{aligned}$$

and hence  $z = u$ . We have thus shown that the  $\varphi(p^3)$  integers

$$(4) \quad \frac{z^3 - z}{3} + t^3 z, \quad 5p \leq z < p^3 + 5p, \quad (z, p) = 1$$

are prime to  $p$  and that no two of them are congruent modulo  $p^3$ . Hence every integer  $s$  which is prime to  $p$  is congruent to one of the integers (4), and therefore the congruence (3) has a solution.

Lemma 2<sup>4</sup>). When  $s$  is sufficiently large there is at least one prime  $p$  which does not divide  $s$  and which satisfies the conditions

$$(5) \quad \left(\frac{6s}{273}\right)^{\frac{1}{3}} < p \leq \left(\frac{6s}{271}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$(6) \quad p^3 > \frac{2}{3}((p^3 + 5p)^3 + [3(5p)^3 - 1](p^3 + 5p)) - \frac{16}{3}p^3, \quad p^3 > 16p^3;$$

$$(7) \quad p \equiv d \pmod{60},$$

where

$$d = 11 \quad \text{when} \quad s \equiv 0, 1, 3, \text{ or } 4 \pmod{5},$$

$$d = 47 \quad \text{when} \quad s \equiv 2 \pmod{5}.$$

<sup>4</sup>) E. Landau, loc. cit.

**Proof.** It is known that the number of primes  $p \equiv d \pmod{60}$ ,  $(d, 60) = 1$  which satisfy the inequality  $x < p \leq x + \varepsilon x$ ,  $\varepsilon > 0$  increases indefinitely with  $x$ . Let  $x = \left(\frac{6s}{273}\right)^{\frac{1}{5}}$ ,  $\varepsilon = \left(\frac{273}{271}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$ . Then if  $s$  is sufficiently large there are at least ten primes which satisfy (5). Since their product is  $> \left(\frac{6s}{273}\right)^{\frac{10}{5}} > s$  for all sufficiently large  $s$ , at least one does not divide  $s$ . Hence if  $s > C_1$  there is at least one prime  $p$  which does not divide  $s$  and which satisfies (5) and (7). Again if  $s > C_2$  all primes which satisfy (5) also satisfy (6). Therefore for all  $s > \text{Max}(C_1, C_2)$  there is at least one prime which satisfies the requirements of the Lemma.

Making use of these Lemmas we can prove the

**Theorem.** *All large numbers are sums of at most eight pyramidal numbers.*

**Proof.** We first determine  $p$  by means of Lemma 2. By Lemma 1 there exist integers  $t$  and  $z$  which satisfy the congruences (1), (2), and (3). We have

$$\begin{aligned} s &\equiv \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z \pmod{p^3}, \\ (8) \quad s &= \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z + p^3 M. \end{aligned}$$

Write

$$(9) \quad M = \frac{268 p^6 - 16}{6} + M_1.$$

From the inequality (5) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{271}{6} p^3 &\leq s < \frac{273}{6} p^3, \\ \frac{271}{6} p^3 - \frac{1}{3}((p^3 + 5p)^3 + [3(5p)^3 - 1](p^3 + 5p)) &< s - \frac{z^3 - z}{3} - t^2 z < \frac{273}{6} p^3, \end{aligned}$$

since  $0 \leq t < 5p$ ,  $5p \leq z < p^3 + 5p$ . Then, using (6), (8), and (9), we have

$$\begin{aligned} \frac{271}{6} p^3 - \frac{1}{2} p^3 - \frac{8}{3} p^3 &< p^3 M < \frac{274}{6} p^3 - \frac{8}{3} p^3, \\ \frac{268 p^6 - 16}{6} &< M < \frac{274 p^6 - 16}{6}, \\ (10) \quad 0 &< M_1 < p^6. \end{aligned}$$

Since  $\frac{z^3 - z}{3} \equiv 0, 0, 2, 3$ , and  $0 \pmod{5}$  for  $z \equiv 0, 1, 2, 3$ , and  $4$ , respectively, the following cases arise from our choice of  $t$  and  $p$  in (2) and (7):

$$(11) \quad s \equiv 1 \text{ or } 3, \quad \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z \equiv 0, 2, \text{ or } 3, \quad p^3 \equiv 1, \quad \frac{268 p^6 - 16}{6} \equiv 2 \pmod{5},$$

$$(12) \quad s \equiv 0 \text{ or } 4, \quad \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z \equiv 0, 1, \text{ or } 4, \quad p^3 \equiv 1, \quad \frac{268 p^6 - 16}{6} \equiv 2 \pmod{5},$$

$$(13) \quad s \equiv 2, \quad \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z \equiv 0, 2, \text{ or } 3, \quad p^3 \equiv 3, \quad \frac{268 p^6 - 16}{6} \equiv 1 \pmod{5}.$$

From equation (8) it is seen that in (11) and (12) we have  $M \equiv 2 \pmod{5}$ , and in (13),  $M \equiv 1 \pmod{5}$ . Thus from (9) it follows in all cases that  $M_1 \not\equiv 0 \pmod{5}$ . Since  $M_1$  is not of the form  $25^k(25n \pm 10)$  there exist integers  $A$ ,  $B$ , and  $C$  such that<sup>5)</sup>

$$(14) \quad M_1 = A^3 + 2B^3 + 5C^3.$$

Combining equations (8), (9), and (14) we obtain

$$\begin{aligned} s &= \frac{z^3 - z}{3} + t^2 z + p^3 M \\ &= \frac{(z+t)^3 - (z+t)}{6} + \frac{(z-t)^3 - (z-t)}{6} + p^3 \left( \frac{268p^3 - 16}{6} + M_1 \right) \\ &= \frac{(z+t)^3 - (z+t)}{6} + \frac{(z-t)^3 - (z-t)}{6} + p^3 \left( \frac{268p^3 - 16}{6} + A^3 + 2B^3 + 5C^3 \right) \\ &= \frac{(z+t)^3 - (z+t)}{6} + \frac{(z-t)^3 - (z-t)}{6} \\ &\quad + \frac{(p^3 + A)^3 - (p^3 + A)}{6} + \frac{(p^3 - A)^3 - (p^3 - A)}{6} \\ &\quad + \frac{(2p^3 + B)^3 - (2p^3 + B)}{6} + \frac{(2p^3 - B)^3 - (2p^3 - B)}{6} \\ &\quad + \frac{(5p^3 + C)^3 - (5p^3 + C)}{6} + \frac{(5p^3 - C)^3 - (5p^3 - C)}{6}. \end{aligned}$$

From (14) and (10) it follows that each of  $|A|$ ,  $|B|$ , and  $|C|$  is less than  $p^3$ . The inequalities  $0 \leq t < 5p$  and  $5p \leq z < p^3 + 5p$  imply that  $z \geq t$ . Hence each of  $z+t$ ,  $z-t$ ,  $p^3+A$ ,  $p^3-A$ ,  $2p^3+B$ ,  $2p^3-B$ ,  $5p^3+C$ ,  $5p^3-C$  is positive or zero and thus all sufficiently large numbers are sums of at most eight pyramidal numbers.

<sup>5)</sup> L. E. Dickson, *Integers Represented by Positive Ternary Quadratic Forms*. Bulletin Amer. Math. Soc. 33 (1927), pp. 63-70, Theorem IX.

## Beitrag zur Metamathematik.

Von

M. Wajsberg in Kowel (Polen).

---

### Einleitung.

Vorliegende Abhandlung ist dem Problem der Ermittlung des *Vollständigkeitsgrades* gewisser mathematisch-logischer Theorien gewidmet, und zwar insbesondere des engeren Funktionenkalküls, des erweiterten Funktionenkalküls sowie des Kalküls der Principia Mathematica (samt *Unendlichkeitsaxiom* und Reduzibilitätsaxiom für alle Typen), in der Darstellung von Herrn K. Gödel<sup>1)</sup>.

Für jede dieser Theorien (und analog für andere) wird in der Folge als „System“ dieser Theorie (z. B. als System des Funktionenkalküls) jede Menge  $M$  von sinnvollen Ausdrücken dieser Theorie bezeichnet werden, die die Axiome der Theorie umfaßt sowie nach den Beweisregeln der Theorie abgeschlossen ist, d. h. alle aus Elementen von  $M$  vermittelt der Beweisregeln dieser Theorie ableitbaren Ausdrücke enthält. Als „Vollständigkeitsgrad“ einer Theorie werden wir dann die Anzahl aller Systeme dieser Theorie bezeichnen.

---

<sup>1)</sup> Als „Theorie“ bezeichnen wir hier einen Inbegriff von Axiomen, Beweisregeln und Vorschriften zur Bildung von „sinnvollen“ Ausdrücken (man nennt das gewöhnlich ein „System“). — Zum Begriff „(kardinaler) Vollständigkeitsgrad“ vgl. A. Taraki, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 37, 2. Heft, § 8. Zu den Begriffen „engerer Funktionenkalkül“ (nachstehend schlechthin als „Funktionenkalkül“ bezeichnet) sowie „erweiterter Funktionenkalkül“ siehe D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (insbesondere Kap. 3 und 4), in der Folge mit H.-A. bezeichnet. — Vorliegende Abhandlung schließt sich im allgemeinen an die Ausdruckweise von H.-A. an. — Die Theorie von K. Gödel findet sich in seiner Abhandlung: *Über unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* 38, 1. Heft.

Nachstehend wird bewiesen, daß der Vollständigkeitsgrad der drei erwähnten Theorien sowie aller derjenigen Theorien; deren Unvollständigkeit von K. Gödel in der angeführten Abhandlung erwiesen wird<sup>1)</sup>, gleich dem Kontinuum ist.

Für die von K. Gödel betrachteten Theorien wird dabei eine Voraussetzung als wahr angenommen, die im wesentlichen der Bedingung gleichkommt, daß die in diesen Theorien beweisbaren Formeln auch inhaltlich wahr sind.

### § 1.

**Definition 1.** Die sinnvollen Ausdrücke des (engeren) Funktionenkalküls<sup>2a)</sup> (ohne bestimmte Funktionszeichen) werden wir als „logische“ Ausdrücke bezeichnen, dabei als „richtige“, falls sie (im Funktionenkalkül) beweisbar sind.

**Definition 2.** Ein logischer Ausdruck  $\mathfrak{A}$  ist „ableitbar“ aus einer Menge  $M$  von logischen Ausdrücken, falls  $\mathfrak{A}$  im Funktionenkalkül beweisbar wird, wenn alle Elemente von  $M$  zu den Axiomen des Funktionenkalküls hinzugenommen werden. — Es wird angenommen, daß jeder richtige logische Ausdruck aus der leeren Menge „ableitbar“ ist.

**Hauptsatz I.** Der Vollständigkeitsgrad des Funktionenkalküls ist gleich dem Kontinuum.

Zum Beweise dieses Satzes wird nachstehend eine unendlich-abzählbare Menge  $\mathfrak{E}$  von logischen Ausdrücken konstruktiv definiert, für die bewiesen wird:

**Satz A.** Kein Element von  $\mathfrak{E}$  ist aus der Gesamtheit aller übrigen Elemente von  $\mathfrak{E}$  ableitbar.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar (vgl. Tarski, a. a. O., S. 39, I., 62), daß für je zwei verschiedene<sup>3)</sup> Untermengen von  $\mathfrak{E}$  die Mengen der aus diesen Untermengen ableitbaren logischen Ausdrücke zwei verschiedene Systeme des Funktionenkalküls darstellen. Hieraus folgt dann aber sofort die Richtigkeit von Hauptsatz I. Denn  $\mathfrak{E}$  enthält  $2^{\aleph_0}$  verschiedene Untermengen und das ist andererseits auch die Anzahl aller Mengen von logischen Ausdrücken.

<sup>1)</sup> Vgl. die zitierte Abhandlung von K. Gödel, insbesondere S. 187, Satz VI.

<sup>2a)</sup> Diese Ausdrücke bauen sich aus Aussagevariablen:  $X, Y, Z, \dots$ , Funktionsvariablen:  $F, G, H, \dots$  (mit beliebig vielen Leerstellen) und Individuenvariablen:  $x, y, z, \iota, u, v, w, \dots$  mittels der Negation, Disjunktion und der Vorsetzung von All- und Seinszeichen ( $x$ ), ( $y$ ),  $\dots$ , ( $\exists x$ ), ( $\exists y$ ),  $\dots$  auf.

<sup>3)</sup> Zwei logische Ausdrücke sehen wir nur dann als verschieden an, wenn sie nicht auseinander durch Variablenumbenennung entstehen.

Wir wollen nun die Menge  $\mathfrak{E}$  beschreiben.

Definition 3. (Rekursives Definitionsschema für

$$\mathfrak{A}^i(x, y) \ (i = 1, 2, \dots):$$

$$a) \ \mathfrak{A}^1(x, y) \sim \mathfrak{A}(x, y),$$

$$b) \ \mathfrak{A}^{i+1}(x, y) \sim (Ez)(\mathfrak{A}^i(x, z) \ \& \ \mathfrak{A}(z, y)).$$

$\mathfrak{A}(x, y)$  bedeutet hier einen beliebigen logischen Ausdruck, in dem die Variablen  $x$  und  $y$  frei vorkommen. Das Zeichen  $\sim$  wird dabei im Sinne der Definitionsgleichheit benutzt.

Definition 4. Es möge mit  $\mathfrak{E}$  der Inbegriff aller Ausdrücke  $\mathfrak{E}_i$  bezeichnet werden, wo  $i$  alle verschiedenen Primzahlen durchläuft.  $\mathfrak{E}_i$  ist für jede natürliche Zahl  $i$  von der Form  $K \ \& \ L \ \& \ M \ \& \ N_i \rightarrow \bar{O}_i$ , deren Bestandteile  $K, L, M, N_i, O_i$  sich folgendermaßen darstellen:

$$K \quad (Ex)(y)\bar{F}(y, x),$$

$$L \quad (x)(Ey)F(x, y),$$

$$M \quad (x)(y)(z)(t)(F(x, y) \ \& \ F(z, y) \ \& \ F(t, x) \rightarrow F(t, z))^{**},$$

$$N_i \quad (x)(y)[(z)\bar{F}(z, x) \rightarrow (G(x, y) \sim F^{i-1}(x, y))],$$

$$O_i \quad (x)(y)(z)(t)[F(x, y) \ \& \ G(x, z) \rightarrow (G(y, t) \sim F^i(z, t))].$$

Der Ausdruck  $\mathfrak{E}_i$  ist offenbar mit der Verneinung von  $K \ \& \ L \ \& \ M \ \& \ N_i \ \& \ O_i$  äquivalent. — Beachtenswert ist dabei, obgleich für das Folgende belanglos, daß  $\mathfrak{E}_i$  in jedem endlichen Individuenbereich allgemeingültig ist, denn die Konjunktion  $K \ \& \ L \ \& \ M$  ist, wie man leicht zeigt, in keinem endlichen Bereiche erfüllbar.

Definition 5. Für jede natürliche Zahl  $i$  soll als  $i$ -Ausdruck jeder Ausdruck bezeichnet werden, der sich aus den zwei Funktionen  $\text{Seq}(x, y)$  und  $\text{Mult}_i(x, y)$  vermittelt der Operationen des Funktionenkalküls aufbaut (d. h. vermittelt Negation, Disjunktion und Quantifikation). — Der Anschaulichkeit halber werden wir im folgenden die Ausdrücke  $\text{Seq}(x, y)$  und  $\text{Mult}_i(x, y)$  durch  $y = x + 1$  bzw.  $y = ix$  ersetzen. (Das Zeichen = gehört nicht zum Funktionenkalkül.)

Definition 6.

a) Ein  $i$ -Ausdruck  $\mathfrak{A}$  ist „richtig“, falls  $\mathfrak{A}$  im Bereiche der natürlichen Zahlen auf Grund der gewöhnlichen Deutung der darin vorkommenden logischen und arithmetischen Zeichen, bei jeder Einsetzung von natürlichen Zahlen für die vorkommenden freien Variablen, inhaltlich richtig ist.

b) Ein  $i$ -Ausdruck ist „falsch“, falls seine Verneinung richtig ist.

Diese Begriffsbildung hat insofern einen elementaren Charakter, als man für jeden vorgelegten  $i$ -Ausdruck durch endlich viele Operationen

\*\*\*)  $\vee$  bindet stärker als  $\&$  und  $\&$  stärker als  $\rightarrow$  und  $\sim$ .

feststellen kann, ob er richtig ist oder nicht. Der Nachweis für diese Tatsache kann aus dem in § 2 bewiesenen Satz 1 ohne Schwierigkeit entnommen werden.

Die Menge der richtigen  $i$ -Ausdrücke werde mit  $M_i$  bezeichnet.

Diese Menge läßt sich auch deduktiv abgrenzen. Ersetzen wir nämlich in den Ausdrücken  $K, L, M, N, O_i$  (Definition 4) die Zeichen  $F$  und  $G$  durch  $\text{Seq}$  bzw.  $\text{Mult}_i$ , so gewinnen wir richtige  $i$ -Ausdrücke, aus denen alle richtigen  $i$ -Ausdrücke beweisbar sind, wenn man neben den üblichen logischen Beweisregeln die Regel der vollständigen Induktion anwendet. — Letztere Regel wäre dann etwa folgendermaßen zu formulieren: Es kann als Ausgangsformel eine jede solche Formel genommen werden, welche aus der Formel

$$(x)((y)\overline{\text{Seq}}(y, x) \rightarrow F(x)) \& (y)(z)(F(y) \& \text{Seq}(y, z) \rightarrow F(z)) \rightarrow (x)F(x)$$

durch Einsetzung eines  $i$ -Ausdrucks für  $F(x)$  entsteht. Ich sehe hier der Kürze halber von einem Beweise dieser Behauptung ab; ohnehin ist die Untersuchung der Eigenschaften der  $i$ -Ausdrücke hier bloß ein zufälliges Mittel zur Begründung von Satz A.

Für unsere Beweisführung legen wir den folgenden Satz über die Menge  $M_i$  aller richtigen  $i$ -Aussagen, und zwar auch ohne die Angabe des Beweises, als genügend einleuchtend zugrunde:

Satz 1.

a) Kein  $i$ -Ausdruck ist zugleich mit seiner Verneinung richtig. ( $M_i$  ist widerspruchsfrei.)

b) Jeder  $i$ -Ausdruck, der aus einem Axiom des Funktionenkalküls (vgl. H.-A., S. 53) durch Einsetzung entsteht, ist richtig.

c)  $M_i$  ist nach den Beweisregeln des Funktionenkalküls abgeschlossen, d. h. es gilt folgendes:

$\alpha$ ) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  richtige  $i$ -Ausdrücke, so ist auch  $\mathfrak{B}$  richtig.

$\beta$ ) Ist  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$  ein richtiger  $i$ -Ausdruck, wobei  $\mathfrak{A}$  die Variable  $x$  nicht enthält, so ist auch  $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)$  richtig; unter derselben Voraussetzung für  $\mathfrak{A}$  ist  $(E x)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$  richtig, sofern  $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$  ein richtiger  $i$ -Ausdruck ist.

Definition 7. Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{S}_i$  für jede natürliche Zahl  $i$ , die Menge aller logischen Ausdrücke, die bei jeder Einsetzung von  $i$ -Ausdrücken für die Funktionsvariablen und die Aussagenvariablen in richtige  $i$ -Ausdrücke übergehen.

Aus Satz 1, b) bis c) folgt nun sofort, daß jeder richtige logische Ausdruck zu jedem  $\mathfrak{S}_i$  gehört; d. h. es gilt zufolge des von uns angenommenen Sinnes der Wendung „System des Funktionenkalküls“ (vgl. Einleitung) der folgende Satz:



Satz 2. Für jede natürliche Zahl  $i$  ist  $\mathfrak{S}_i$  ein System des Funktionenkalküls.

Man beweist ferner mit Leichtigkeit (vgl. Definition 4):

Satz 3. Für kein natürliches  $i$  gehört  $\mathfrak{E}_i$  zu  $\mathfrak{S}_i$ .

Beweis. Setzen wir in die Ausdrücke  $K, L, M, N, O_i$  für  $F(x, y)$  und  $G(x, y)$  die Ausdrücke  $y = x + 1$  bzw.  $y = ix$  ein, so erhalten wir, wie man leicht bestätigt, richtige  $i$ -Ausdrücke. Beachten wir nun, nach einer vorhin gemachten Bemerkung, daß  $\mathfrak{E}_i$  mit der Verneinung von  $K \& L \& M \& N_i \& O_i$  äquivalent ist, so ist damit unser Satz bewiesen.

Auf Grund der letzten zwei Sätze verbleibt uns nun, um den Beweis von Satz A zu vollenden, folgendes zu erweisen:

Satz B. Wenn  $i$  und  $j$  verschiedene Primzahlen sind, so gehört  $\mathfrak{E}_i$  zu  $\mathfrak{S}_j$ .

Zum Beweise dieses Satzes sind ziemlich eingehende Betrachtungen über die  $i$ -Ausdrücke notwendig.

## § 2.

Es soll in der Folge unter  $p$  stets ein und dieselbe natürliche Zahl verstanden werden.

Definition 8. Wir geben hier Definitionsschemata an, die uns, wie man leicht verifiziert, die arithmetischen Ausdrücke  $x = ay + b$  sowie  $x \equiv n$  (mit der Bedeutung:  $x$  ist kongruent mit  $n$  modulo  $m$ ) für folgende speziellen Werte der Parameter  $a, b, m, n$  als  $p$ -Ausdrücke darstellen lassen<sup>4)</sup>:

1.  $a = 0$  und  $b$  ist eine natürliche Zahl; oder  $a = p^i$ , wo  $i$  eine ganze Zahl ist, und  $b$  ist eine ganze Zahl; oder drittens  $a = p^i$ , wo  $i$  eine negative ganze Zahl ist, und  $b = c \cdot p^i$ , wo  $c$  eine ganze Zahl ist<sup>5)</sup>.

2.  $m = p^i$ , wo  $i$  eine natürliche Zahl ist, und  $n = 1, 2, \dots, m$ .

Die erwähnten Schemata stellen sich folgendermaßen dar:

a) Rekursives Schema für „ $x = b$ “ ( $b = 1, 2, \dots$ ).

$$\alpha) \quad x = 1 \sim (y) x + y + 1^6),$$

$$\beta) \quad x = i + 1 \sim (E y) (y = i \& x = y + 1) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

<sup>4)</sup> Das heißt, die bezüglichen  $p$ -Ausdrücke sind mit den entsprechenden arithmetischen Ausdrücken im Bereiche der natürlichen Zahlen äquivalent. Wir gehen bei diesen Definitionen von unseren Grundfunktionen  $\text{Seq}(x, y)$  und  $\text{Mult}_p(x, y)$  aus, die wir der größeren Anschaulichkeit halber durch die mit ihnen bzw. gleichbedeutenden arithmetischen Ausdrücke  $y = x + 1$  sowie  $y = px$  ersetzen.

<sup>5)</sup> Man beweist ohne Schwierigkeit, daß aus einer natürlichen Zahl  $y$  durch Wiederholung der Operationen der Addition von 1 und  $-1$  sowie der Multiplikation durch  $p$  und  $1/p$  nur derartige natürliche Zahlen zu gewinnen sind, die sich durch  $ay + b$  darstellen lassen, wo  $a$  und  $b$  die soeben beschriebenen Werte annehmen.

<sup>6)</sup> Das Zeichen  $\neq$  bedeutet hier wie gewöhnlich die Verneinung der Gleichheit.

b) Rekursives Schema für „ $x = y + b$ “ ( $b = 1, 2, \dots$ ):

$$x = y + (i + 1) \sim (Ez)(z = y + i \ \& \ x = z + 1) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

c)  $x = y - b \sim y = x + b$  ( $b = 1, 2, \dots$ ).

d) Rekursives Schema für „ $x = p^i y$ “ ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\alpha) \ x = y \sim (Ez)(z = x + 1 \ \& \ z = y + 1),$$

$$\beta) \ x = p^{j+1} y \sim (Ez)(z = p^j y \ \& \ x = pz) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

e)  $x = p^{-i} y \sim y = p^i x$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

f)  $x = p^i y + b \sim (Ez)(z = p^i y \ \& \ x = z + b)$   
( $i$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen).

g)  $x = \frac{y+c}{p^i} \sim (Ez)(z = y + c \ \& \ x = p^{-i} z)$   
( $i$  eine natürliche Zahl,  $c$  eine ganze Zahl  $\neq 0$ ).

h)  $x \equiv_m n \sim x = n \vee (Ez)x = mz + n$   
( $m = p^i$ , wo  $i$  eine natürliche Zahl ist;  $n = 1, 2, \dots, m$ ).

Anmerkung. Diese Definition von  $x \equiv_m n$  stimmt nicht mit der üblichen Definition von  $x \equiv n \pmod{m}$  überein.

Wir führen ferner folgende Definitionen ein:

Definition 9. Gleichungen vom Typus „ $x_1 = a x_2 + b$ “, ihre Verneinungen sowie Kongruenzen „ $x_1 \equiv_m n$ “, wo  $x_1$  und  $x_2$  beliebige (auch identische) Individuenvariablen bedeuten und außerdem  $a, b, m, n$  die in Definition 8 angegebenen Werte annehmen, werden wir als „Grundaussdrücke“ ( $p$ -ter Ordnung) bezeichnen.

Beispiele von Grundaussdrücken *dritter* Ordnung:

$$x = 2, \quad x = x, \quad x \neq 3x + 1, \quad x = \frac{y+2}{9}, \quad y \equiv_{27} 7.$$

Definition 10. Wir wollen als „Normalausdruck“ ( $p$ -ter Ordnung) jede Disjunktion von Konjunktionen<sup>7)</sup> bezeichnen, deren Glieder Grundaussdrücke ( $p$ -ter Ordnung) sind.

Beispiele von Normalausdrücken *zweiter* Ordnung:

$$x = 3, \quad (x = 2y - 1 \ \& \ y \equiv_3 1) \vee (x = y \ \& \ z \equiv_4 2 \ \& \ t = z - 9).$$

Satz 1. Es gibt zu jedem  $p$ -Ausdruck  $\mathfrak{A}$  einen mit ihm äquivalenten Normalausdruck  $p$ -ter Ordnung  $\mathfrak{B}$ ; enthält dabei  $\mathfrak{A}$  gewisse freie

<sup>7)</sup> Es werden hier Disjunktionen und Konjunktionen mit beliebig viel Gliedern (auch einem einzigen) zugelassen. In H.-A. werden derartige Disjunktionen und Konjunktionen als Produkte bzw. Summen bezeichnet.

Variable, so kommen in  $\mathfrak{B}$  keine Variable vor, die in  $\mathfrak{A}$  nicht auftreten, oder dort gebunden sind <sup>7a)</sup>).

Obiger Satz ist evident für den Fall, daß  $\mathfrak{A}$  (ohne Abkürzungen) bloß freie Variable enthält, denn es genügt dann offenbar,  $\mathfrak{A}$  in disjunktiver Normalform darzustellen. Wir dürfen daher annehmen, daß in  $\mathfrak{A}$  gewisse Klammerzeichen vorkommen, und wir bringen sie dann alle an den Anfang des Ausdrucks. Eliminiert man dann die Allzeichen, indem man sie in bekannter Weise durch die Negation und das Seinszeichen ausdrückt, und stellt man dann denjenigen Teil des gegebenen Ausdrucks, der darin auf alle Seinszeichen folgt, in disjunktiver Normalform dar, so läßt sich dann der zu beweisende Satz auf die folgenden Hilfssätze zurückführen <sup>8)</sup>:

Hilfssatz 1. Die Verneinung eines Normalausdrucks ist wieder als Normalausdruck darstellbar.

Hilfssatz 2. Ein Ausdruck der Form  $(E x) \mathfrak{A}(x)$ , wo  $\mathfrak{A}(x)$  eine Konjunktion von Grundaussdrücken  $p$ -ter Ordnung ist, deren jede die Variable  $x$  enthält, ist entweder richtig oder falsch (Definition 6b) oder mit einem Normalausdruck  $p$ -ter Ordnung äquivalent, der die Variable  $x$  nicht enthält und in dem nur solche Variablen auftreten, die auch in  $\mathfrak{A}(x)$  (explicite) vorkommen.

Beweis von Hilfssatz 1. Es genügt zu bemerken, daß die Verneinung einer Kongruenz  $x \equiv_m n$  durch die Disjunktion aller Kongruenzen  $x \equiv_m i$  ersetzbar ist, wo  $i = 1, 2, \dots, m$  und  $\neq n$  ist.

Beweis von Hilfssatz 2. Wir dürfen offenbar voraussetzen, daß in  $\mathfrak{A}(x)$  kein Ausdruck zweimal als Glied vorkommt. Ferner nehmen wir an, daß in  $\mathfrak{A}(x)$  keine Glieder vom Typus  $x = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) oder  $x \neq ax + b$  ( $a \neq 0$ ) vorkommen, denn derartige Ausdrücke sind entweder richtig (wie  $x = x$ ) oder falsch (wie  $x = x + 1$  oder  $x = px$ ) oder durch einen Grundaussdruck vom Typus  $x = e$  bzw.  $x \neq e$  ersetzbar (wie  $x = 2x - 1$ ). Enthält ferner  $\mathfrak{A}(x)$  Gleichungen vom Typus  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ), so ersetzen wir sie bzw. durch  $x = \frac{y-b}{a}$ . Enthält nun  $\mathfrak{A}(x)$  ein Glied vom Typus  $x = ay + b$  ( $a = 0$  nicht ausgeschlossen), so ersetzen wir  $(E x) \mathfrak{A}(x)$  durch den arithmetischen Ausdruck  $\mathfrak{A}(ay + b)$ ; ist

<sup>7a)</sup> Gebundene Variable, die in Grundaussdrücken vorkommen, wenn man sie durch ihre Bedeutung aus Definition 8 ersetzt, werden außer Acht gelassen.

<sup>8)</sup> Mit Hilfe insbesondere der richtigen logischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (E x) (F(x) \vee G(x)) &\sim (E x) F(x) \vee (E x) G(x), \\ (E x) (F(x) \& G(y)) &\sim (E x) F(x) \& G(y), \\ X \rightarrow X \vee Y, & \quad X \rightarrow (X \& Y \sim Y), \\ \bar{X} \rightarrow \bar{X} \& \bar{Y}, & \quad \bar{X} \rightarrow (X \vee Y \sim Y). \end{aligned}$$

hierin  $a = 0$ , so ist  $(Ex)\mathfrak{A}(x)$  offenbar entweder richtig oder falsch; im Falle  $a \neq 0$  ist aber der Ausdruck  $\mathfrak{A}(ay + b)$  leicht als Normalausdruck darstellbar, in dem keine neuen Variablen vorkommen sowie die Variable  $x$  nicht auftritt. Gehen wir nun zum Fall über, daß  $\mathfrak{A}(x)$  bloß Kongruenzen und Ungleichungen enthält, so dürfen wir annehmen, daß darin höchstens eine Kongruenz vorkommt. (Ist nämlich in  $\mathfrak{A}(x)$  eine Konjunktion  $x \equiv_m n$  &  $x \equiv_{m'} n'$  enthalten, wo  $m \leq m'$  ist, so ist sie entweder falsch oder mit  $x \equiv_{m'} n'$  äquivalent, weil  $m'$  ein Vielfaches von  $m$  sein muß.) Damit sind wir aber am Schlusse unseres Beweises, denn in diesem Falle ist  $(Ex)\mathfrak{A}(x)$  richtig, wie eine einfache zahlentheoretische Überlegung lehrt. Es besteht folglich Satz 1. — Die von uns benutzte Normalform für  $p$ -Ausdrücke sowie die Methode des Beweises von Satz 1 gehen im wesentlichen auf Th. Skolem und C. H. Langford zurück \*).

Normalausdrücke, die keine anderen Variablen als  $x$  und  $y$  enthalten, werden wir in einer speziellen Form darstellen, die wir in folgender Weise definieren:

Definition 11. Ein Normalausdruck  $\mathfrak{A}$  ist „ausgezeichnet“, falls  $\mathfrak{A}$  den folgenden Bedingungen genügt:

α)  $\mathfrak{A}$  enthält keine anderen Variablen als  $x$  und  $y$ .

β) Kein Disjunktionsglied von  $\mathfrak{A}$  ist falsch.

γ) Es kommen in  $\mathfrak{A}$  keine zwei Kongruenzen mit verschiedenen Moduln vor.

δ) Jedes Disjunktionsglied  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{A}$ , das kein Glied vom Typus  $x = c$  oder  $y = c$  enthält, besitzt eine der folgenden Formen:

$$x \equiv_m n \text{ \& } y = ax + b \ (a \neq 0),$$

eventuell konjunktiv verbunden mit Ungleichungen vom Typus  $x \neq c$ ;

$$x \equiv_m n \text{ \& } x \equiv_{m'} n' \text{ \& } y \equiv_{m''} n'',$$

verbunden eventuell noch mit Konjunktionsgliedern vom Typus  $x \neq c$  oder  $y \neq ax + b$ .

ε) Wenn ein Glied von  $\mathfrak{A}$  von der Form  $x \equiv_m n \text{ \& } y = ax + b \ (a \neq 0)$  ist (eventuell konjunktiv verbunden mit Ungleichungen vom Typus  $x \neq c, y \neq d$ ),

\*) Vgl.: Videnskapselskabet Skifter, I, Math.-nat. Kl. 1919, Nr. 3. Th. Skolem, Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. — *Annals of Mathematics* (2) 28 (1926–27) C. H. Langford, Some Theorems on Deducibility, S. 16; Theorems on Deducibility (Second paper), S. 459. — Siehe auch M. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen usw., C. R. du Congrès des Math. des Pays Slaves, Varsovie 1929.

so ist für jede genügend große, der Kongruenz  $x \equiv n \pmod{m}$  genügende natürliche Zahl  $x$  auch  $ax + b$  eine natürliche Zahl. (Es kann z. B. kein Glied von  $\mathfrak{A}$  die Form  $x \equiv p \pmod{p}$  &  $y = \frac{x}{p^3}$  besitzen.)

Beispiel eines ausgezeichneten Normalausdrucks dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} x &= 1 \vee (x = 2 \& y \neq 3) \\ \vee (x \equiv 2 \pmod{3} \& y \equiv 1 \pmod{3} \& x \neq 2 \& y \neq 1 \& y \neq 9x - 1) \\ \vee (x \equiv 1 \pmod{3} \& y = \frac{x+2}{3}) \vee (x \equiv 3 \pmod{3} \& y = 3x + 1 \& x \neq 2). \end{aligned}$$

Wir beweisen nun

Satz 2. Jeder Normalausdruck  $p$ -ter Ordnung, in dem keine anderen Variablen als  $x$  und  $y$  vorkommen und der weder richtig noch falsch ist, kann durch äquivalente Umformung in einen ausgezeichneten Normalausdruck verwandelt werden.

Beweis. Sei ein Normalausdruck  $p$ -ter Ordnung  $\mathfrak{A}$  vorgelegt, der unserer Voraussetzung genügt. Vor allem dürfen wir natürlich annehmen, daß  $\mathfrak{A}$  keine richtigen und keine falschen Bestandteile enthält, sowie daß darin keine Konjunktionen von zwei oder mehr einander äquivalenten Grundaussdrücken vorkommen (z. B. keine Konjunktion vom Typus  $x = y + 1 \& y = x - 1$ ). Ferner können wir annehmen, daß in  $\mathfrak{A}$  nur Gleichungen (und die ihnen entsprechenden Ungleichungen) der Typen  $x = c$ ,  $y = c$ ,  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) vorkommen. Kommen dann in  $\mathfrak{A}$  zwei Gleichungen  $y = ax + b$ ,  $y = a'x + b'$  ( $a, a' \neq 0$ ) konjunktiv verbunden vor, so ersetzen wir sie durch ihre gemeinsame Lösung vom Typus  $x = c$  &  $y = d$  (eine Lösung, und zwar in natürlichen Zahlen, muß es geben, denn sonst würde  $\mathfrak{A}$  ein falsches Glied besitzen). Dergleichen werden wir Teilkonjunktionen vom Typus

$$y = ax + b \& y \neq a'x + b' \quad (a \neq a' \text{ oder } b \neq b')$$

durch

$$y = ax + b \& x \neq \frac{b' - b}{a - a'} \quad \text{oder} \quad y = ax + b$$

ersetzen, je nachdem  $\frac{b' - b}{a - a'}$  eine natürliche Zahl darstellt, oder nicht (im Falle  $a = a'$  und  $b = b'$  ist die fragliche Konjunktion falsch). Treten ferner in  $\mathfrak{A}$  zwei Kongruenzen mit verschiedenen Moduln auf, so bringen wir alle in  $\mathfrak{A}$  vorkommenden Kongruenzen auf gleichen Modul, indem wir darin jede Kongruenz  $x \equiv n \pmod{m}$ , wo  $m$  vom größten in  $\mathfrak{A}$  vorkommenden Modul  $m'$  verschieden ist, durch die Disjunktion aller Kongruenzen der Form  $x \equiv im + n \pmod{m'}$ , wo  $i = 0, 1, 2, \dots$ , und  $im + n \leq m'$  ist, ersetzen und darauf den gegebenen Ausdruck wieder als Normalausdruck

darstellen (es können dabei wieder falsche Glieder erscheinen, die dann zu streichen sind<sup>10)</sup>). Sei nun  $m$  der einzige Modul, der in  $\mathfrak{A}$  vorkommt, bzw.  $m = p$ , sofern  $\mathfrak{A}$  keine Kongruenz enthält. Ersetzen wir jetzt jedes Disjunktionsglied  $\mathfrak{B}$  von  $\mathfrak{A}$ , das keine Kongruenz  $x \equiv n$  und keine Gleichung vom Typus  $x = c$ ,  $y = c$  als Glied enthält, durch die Disjunktion aller nicht-falschen Ausdrücke  $x \equiv i \& \mathfrak{B}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), so haben wir damit schließlich, wie man leicht bestätigt, den ursprünglich gegebenen Ausdruck in einen mit ihm äquivalenten Normalausdruck umgestaltet, innerhalb dessen jedes Disjunktionsglied  $\mathfrak{B}$  (abgesehen von der Reihenfolge seiner Konjunktionsglieder) zu einem der vier folgenden Typen gehört, wobei  $\mathfrak{B}$  nicht falsch ist und der Modul  $m$  unten überall derselbe ist:

1.  $\mathfrak{B}$  enthält ein Glied vom Typus  $x = c$  oder  $y = c$ ,

2.  $\mathfrak{B}$  ist für gewisse  $n, n'$  von der Form  $x \equiv n$  oder  $x \equiv n \& y \equiv n'$ , wozu noch Konjunktionsglieder vom Typus  $x \neq c$ ,  $y \neq ax + b$  hinzukommen können,

3.  $\mathfrak{B}$  ist vom Typus  $x \equiv n \& y \equiv n' \& y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ), eventuell mit noch Konjunktionsgliedern vom Typus  $x \neq c$ ,

4.  $\mathfrak{B}$  ist vom Typus  $x \equiv n \& y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ), eventuell konjunktiv verbunden mit Ungleichungen vom Typus  $x \neq c$ .

Wir wollen nun zeigen, daß ein  $p$ -Ausdruck vom Typus

$$x \equiv n \& y \equiv n' \& y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

entweder falsch oder für gewisse  $n_1, m_1$  mit einem  $p$ -Ausdruck  $x \equiv n_1$  &  $y = ax + b$  äquivalent sein muß. Danach werden wir annehmen dürfen, daß in  $\mathfrak{A}$  alle Disjunktionsglieder vom oben beschriebenen Typus 3 durch mit ihnen bezüglich äquivalente Glieder vom Typus 4 ersetzt worden sind (wir bringen alle in  $\mathfrak{A}$  vorkommenden Kongruenzen wieder auf gleichen Modul, falls in  $\mathfrak{A}$  nach obigen Ersetzungen verschiedene Moduln erscheinen; man bestätigt leicht, daß durch letztere Operation in  $\mathfrak{A}$  keine Disjunktionsglieder  $\mathfrak{B}$  vom Typus 3 erscheinen können).

Sei nun  $\mathfrak{B}$  ein nicht-falscher  $p$ -Ausdruck von der Form

$$x \equiv n \& y \equiv n' \& y = ax + b \quad (a \neq 0).$$

Es besteht nach Definition 8

$$x \equiv n \sim x = n \vee (Ez) x = mz + n,$$

<sup>10)</sup> Insbesondere sind dann solche Disjunktionsglieder von  $\mathfrak{A}$  falsch, in denen zwei verschiedene Kongruenzen ( $x \equiv n$ ,  $x \equiv n'$ ) vorkommen; wir können folglich annehmen, daß in  $\mathfrak{A}$  keine Konjunktion von zwei oder mehr Kongruenzen für  $x$  auftritt.

und demzufolge, wenn  $a \geq 1$  (d. h.  $a = p^i$ ,  $i \geq 0$ ),

$$x \equiv_m n \ \& \ y = ax + b \rightarrow y \equiv_m n_1,$$

wo  $n_1$  den kleinsten natürlichen Rest von  $an + b$  modulo  $m$  bedeutet. Aus der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{B}$  nicht-falsch ist, folgt nun, daß  $n_1 = n'$  sein muß, und daher ist im Falle  $a \geq 1$   $\mathfrak{B}$  mit  $x \equiv_m n$  &  $y = ax + b$  äquivalent, d. h. unsere Behauptung gilt im Falle  $a \geq 1$ .

Sei nun  $a < 1$  (d. h.  $a = p^i$ ,  $i < 0$ ):

In diesem Falle muß  $\frac{b}{a} = c$  eine ganze Zahl sein, denn sonst würde  $y = ax + b$  und damit auch  $\mathfrak{B}$  falsch sein; demgemäß finden folgende Äquivalenzen statt:

$$\begin{aligned} x \equiv_m n \ \& \ y \equiv_m n' \ \& \ y = ax + b &\sim x \equiv_m n \ \& \ \frac{y}{a} \equiv_{\frac{m}{a}} \frac{n'}{a} \ \& \ \frac{y}{a} = x + c \\ &\sim x \equiv_{\frac{m}{a}} n \ \& \ x + c \equiv_{\frac{m}{a}} \frac{n'}{a} \ \& \ \frac{y}{a} = x + c. \end{aligned}$$

Letztere Konjunktion ist entweder falsch oder äquivalent mit

$$x \equiv_{\frac{m}{a}} n_1 \ \& \ y = ax + b,$$

wo  $n_1$  den kleinsten natürlichen Rest nach dem Modul  $\frac{m}{a}$  von  $\frac{n'}{a} - c$  darstellt; damit ist aber unsere Behauptung für den Fall  $a < 1$  erwiesen. Wir können folglich annehmen, daß  $\mathfrak{A}$  bloß Disjunktionsglieder von den Typen 1, 2 und 4 enthält, wobei kein Glied von  $\mathfrak{A}$  falsch ist und keine zwei verschiedenen Moduln in  $\mathfrak{A}$  auftreten.

Nach Definition 11 bleibt uns nur noch zu zeigen, um unseren Beweis zu vollenden, daß jede nicht falsche Konjunktion  $\mathfrak{B}$  vom Typus  $x \equiv_m n$  &  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ), für die es unendlich viele natürliche  $x$  mit der Eigenschaft gibt, daß  $x \equiv_m n$ , aber  $ax + b$  keine natürliche Zahl ist, in  $\mathfrak{A}$  durch eine Konjunktion von demselben Typus ersetzt werden kann<sup>11)</sup>, für die es höchstens endlich viele natürliche  $x$  mit der bezüglichen Eigenschaft gibt. Wir brauchen überdies dabei nur den Fall zu betrachten, daß in obiger Konjunktion  $a < 1$  ist, denn, wenn  $y = ax + b$  ein Grundausdruck ist, so ist stets zugleich mit  $a$  auch  $b$  eine ganze Zahl, und dann ist  $ax + b$  eine natürliche Zahl für alle natürlichen  $x$ , für welche  $ax + b > 0$ .

<sup>11)</sup> Es kann sich nach dieser Ersetzung wieder die Notwendigkeit herausstellen, die in  $\mathfrak{A}$  enthaltenen Kongruenzen auf gleichen Modul zu bringen, doch erkennt man leicht, daß das an der Sachlage nichts ändert.



Sei nun  $\mathfrak{B}$  eine nicht-falsche Konjunktion von der Form  $x \equiv_m n \& y = ax + b$  ( $a < 1$ ), die in  $\mathfrak{A}$  enthalten ist. Es besteht ersichtlich

$$(1) \quad y = ax + b \rightarrow x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1,$$

wo  $n_1$  den kleinsten natürlichen Rest modulo  $\frac{1}{a}$  von  $-\frac{b}{a}$  bedeutet; mithin gilt

$$(2) \quad \mathfrak{B} \sim x \equiv_m n \& x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1 \& y = ax + b.$$

Die Werte von  $ax + b$  für natürliche Zahlen  $x$ , welche der Bedingung  $x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1$  genügen, unterscheiden sich um ganze Zahlen. Daher ist entweder die Konjunktion

$$x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1 \& y = ax + b$$

falsch, oder für jede natürliche Zahl  $x$ , welche die Bedingung  $x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1$  erfüllt, ist  $ax + b$  eine ganze, und, wenn zugleich  $x$  genügend groß ist, eine natürliche Zahl. Ferner muß nach einer im Beweise von Satz 1 gemachten Bemerkung,  $x \equiv_m n \& x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1$  entweder falsch oder mit einer der Kongruenzen  $x \equiv_m n$ ,  $x \equiv_{\frac{1}{a}} n_1$  äquivalent sein. Damit ist aber zufolge (2), weil  $\mathfrak{B}$  nicht-falsch ist, unsere letzte Behauptung erwiesen und zugleich, wie man leicht erkennt, der Beweis von Satz 2 zu Ende gebracht.

### § 3.

Mit Hilfe der soeben erörterten Normalform wollen wir nun an den Beweis des folgenden Satzes herantreten, von dem am Ende des § 1 die Rede war:

Satz B. Wenn  $i$  und  $j$  verschiedene Primzahlen sind, so gehört  $\mathfrak{E}_i$  zu  $\mathfrak{S}_j$ .

Letzteren Satz werden wir in der folgenden gleichwertigen Form beweisen.

Satz C. Wenn  $i$  und  $j$  verschiedene Primzahlen sind, so gibt es keine  $j$ -Ausdrücke  $F(x, y)$  und  $G(x, y)$ , für die die Konjunktion  $K \& L \& M \& N_i \& O_i$  (d. h.  $\mathfrak{E}_i$ ) richtig wäre.

Zum Beweise nehmen wir an, daß es im Gegenteil derartige zwei verschiedene Primzahlen  $p$  und  $q$  sowie derartige  $p$ -Ausdrücke  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  gibt, so daß die Ausdrücke  $K, L, M, N_q, O_q$  in richtige  $p$ -Ausdrücke übergehen, wenn man darin  $A$  und  $B$  bzw. für  $F$  und  $G$  ein-

setzt. — Diese Bedeutung der Zeichen  $p, q, A, B$  wird im folgenden festgehalten. — Aus letzterer Annahme werden wir einen Widerspruch ableiten, wodurch Satz C und damit zugleich Hauptsatz I bewiesen sein wird.

Wir nehmen ferner an, daß die Ausdrücke  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  keine anderen freien Variablen als  $x$  und  $y$  enthalten — denn andernfalls können wir die Ausdrücke  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  in unseren Überlegungen durch diejenigen Ausdrücke ersetzen, die aus den ersteren durch Einsetzung von 1 für alle von  $x$  und  $y$  verschiedenen Variablen entstehen (wir stellen dann letztere Ausdrücke wiederum als  $p$ -Ausdrücke dar). Stellen wir nun gemäß Satz 1 des vorigen Paragraphen die Ausdrücke  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  als Normalausdrücke dar, so erhalten wir Ausdrücke, die keine anderen Variablen als  $x$  und  $y$  enthalten und die daher auf Grund von Satz 2 desselben Paragraphen als ausgezeichnete Normalausdrücke darstellbar sind. Die betreffenden ausgezeichneten Normalausdrücke werden wir künftig mit  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  bezeichnen<sup>12)</sup>.

Setzen wir nun in die Ausdrücke  $K, L, M, N_q, O_q$  (Definition 4) für  $F$  und  $G$  bezüglich  $A$  und  $B$  ein, so gewinnen wir:

$$K' \quad (Ex)(y) \overline{A}(y, x),$$

$$L' \quad (x)(Ey) A(x, y),$$

$$M' \quad (x)(y)(z)(t) (A(x, y) \& A(z, y) \& A(t, x) \rightarrow A(t, z)),$$

$$N'_q \quad (x)(y) [(z) \overline{A}(z, x) \rightarrow (B(x, y) \sim A^{q-1}(x, y))],$$

$$O'_q \quad (x)(y)(z)(t) [A(x, y) \& B(x, z) \rightarrow (B(y, t) \sim A^q(z, t))].$$

Aus obigen fünf Formeln, als richtigen arithmetischen Sätzen über natürliche Zahlen, wollen wir nun, bei der Annahme, daß  $p$  und  $q$  verschiedene Primzahlen sind, sowie daß  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  ausgezeichnete Normalausdrücke  $p$ -ter Ordnung sind, einen Widerspruch mathematischer Natur ableiten.

Es sei (in Übereinstimmung mit  $K'$ )  $e$  eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft  $(x) \overline{A}(x, e)$ . — Diese Bedeutung von  $e$  soll im folgenden festgehalten werden. — Wir beweisen nun, indem wir Definition 3 auch auf arithmetische Ausdrücke anwenden,

Satz 1.

$$A^i(e, x) \& A^j(e, x) \rightarrow i = j^{13}).$$

<sup>12)</sup> Die Variable  $y$  muß nicht notwendig in einem ausgezeichneten Normalausdruck vorkommen, man kann sie aber dadurch einführen, daß man ein beliebiges Glied  $\mathfrak{A}$  des betreffenden Ausdrucks durch  $(\mathfrak{A} \& x = y) \vee (\mathfrak{A} \& x \neq y)$  ersetzt. Analoge Bemerkungen werde ich im folgenden unterlassen.

<sup>13)</sup> Ich bediene mich hier, wie auch oft im folgenden, einer gemeinverständlichen logisch-mathematischen Symbolik, wobei die Buchstaben  $i, j, k, l, x, y, z, t$  stets als Variable für natürliche Zahlen gebraucht werden.

Beweis. Obige Formel werden wir mit  $\mathfrak{A}_{k,j}$  bezeichnen. Wir führen den Nachweis vermittelst vollständiger Induktion, indem wir zuerst  $\mathfrak{A}_{k,1}$  und  $\mathfrak{A}_{1,j}$  beweisen und darauf zeigen, daß für beliebige  $k, l$  aus  $\mathfrak{A}_{k+1, l+1}$  stets  $\mathfrak{A}_{k,l}$  folgt.

a) Wir beweisen  $\mathfrak{A}_{k,1}$ , d. h.

$$(x) (A^i(e, x) \& A(e, x) \rightarrow i = 1).$$

Es besteht offenbar  $\mathfrak{A}_{1,1}$ . Nehmen wir nun an, daß  $\mathfrak{A}_{k,1}$  für irgendein  $k \neq 1$  falsch ist, so führt das auf einen Widerspruch. Aus letzterer Annahme folgt nämlich sofort, daß es eine natürliche Zahl  $a$  gibt, so daß folgende zwei Formeln bestehen:

$$(1) \quad A^k(e, a),$$

$$(2) \quad A(e, a).$$

Aus (1) folgt nun, weil  $k$  nach Annahme  $\neq 1$  ist, daß für gewisse natürliche Zahlen  $b$  und  $c$  die Formel

$$(3) \quad A(b, a) \& A(c, b)$$

gilt. Aus  $M'$  erhalten wir ferner, indem wir darin (nach Weglassung der Allzeichen)  $b, a, e, c$  bzw. für  $x, y, z, t$  einsetzen:

$$A(b, a) \& A(e, a) \& A(c, b) \rightarrow A(c, e).$$

Aus dieser Formel folgt aber sofort auf Grund von (2) und (3), daß  $A(c, e)$  besteht. Diese Formel ist aber falsch; denn für die Zahl  $e$  besteht ja ex definitione  $(x) \bar{A}(x, e)$ . Damit ist bewiesen, daß  $\mathfrak{A}_{k,1}$  für beliebige  $k$  besteht, woraus sofort das gleiche für  $\mathfrak{A}_{1,i}$  folgt, weil die Formel  $\mathfrak{A}_{i,j}$  in bezug auf  $i$  und  $j$  symmetrisch ist.

Wir wollen nun annehmen, daß für gewisse  $k, l$  die Formel  $\mathfrak{A}_{k+1, l+1}$  falsch ist, d. h. es gelte bei  $k \neq l$  für eine gewisse natürliche Zahl  $a$ :

$$(4) \quad A^{k+1}(e, a) \& A^{l+1}(e, a).$$

Hieraus werden wir die Folgerung ziehen, daß auch  $\mathfrak{A}_{k,l}$  falsch ist. Aus (4) folgt zunächst, daß es gewisse natürliche Zahlen  $b$  und  $c$  gibt, so daß folgende Formeln bestehen:

$$(5) \quad A^k(e, b),$$

$$(6) \quad A(b, a),$$

$$(7) \quad A^l(e, c),$$

$$(8) \quad A(c, a).$$

Mit Hilfe von  $M'$ , (6) und (8) gewinnen wir ferner leicht

$$(t) (A(t, b) \rightarrow A(t, c)),$$

und daraus mittels (5):

$$(9) \quad A^k(e, c).$$

Die Formeln (7) und (9) ergeben in Verbindung mit  $k \neq l$  die Formel  $\mathfrak{A}_{k,l}$ . Damit ist aber unser Satz bewiesen. Ferner beweisen wir

Satz 2. Es gibt eine unendliche Folge  $[f_i]$  ( $i = 1, 2, \dots$ )<sup>14)</sup> mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Glieder dieser Folge sind lauter untereinander verschiedene natürliche Zahlen.

$$b) f_1 = e.$$

$$c) A(f_i, f_j) \sim j = i + 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

d) Es gibt zwei natürliche Zahlen  $i_0$  und  $k$  sowie  $k$  Zahlenpaare  $(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), wo die  $a_i$  ganzzahlige Potenzen von  $p$  und die  $b_i$  ganze Zahlen sind, derart, daß für beliebige natürliche  $j$  sowie für  $i = 1, 2, \dots, k$  folgende Gleichung besteht:

$$f_{i_0 + jk + i} = a_i a_k^j f_{i_0} + a_i (a_k^{j-1} + a_k^{j-2} + \dots + 1) b_k + b_i.$$

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir vorerst einige Vorbereitungen machen.

Lassen wir alle Disjunktionsglieder von  $A(x, y)$  weg, die ein Konjunktionsglied vom Typus  $x = c$  enthalten<sup>15)</sup>, und streichen wir überdies alle in  $A(x, y)$  auftretenden Ungleichungen vom Typus  $x \neq c$ <sup>15)</sup>, so gewinnen wir einen ausgezeichneten Normalausdruck  $A'(x, y)$ , für den folgendes gilt:

Hilfssatz 1. Es gibt eine natürliche Zahl  $r$  von der Eigenschaft: ist  $i$  eine natürliche Zahl  $> r$ , und sind  $c, d$  solche natürliche Zahlen, für welche  $A'(e, c) \& A(c, d)$  besteht, dann

$\alpha)$  besitzt  $A'(x, y)$  ein Disjunktionsglied  $\mathfrak{A}(x, y)$  vom Typus

$$x \equiv_n \mathfrak{n} \& y = ax + b \quad (a \neq 0),$$

für welches  $\mathfrak{A}(c, d)$  besteht; und

$\beta)$  bei jedem Disjunktionsglied von  $A'(x, y)$ , das den Typus

$$x \equiv_{m'} \mathfrak{n}' \& y = a'x + b' \quad (a' \neq 0)$$

hat, und für welches  $c \equiv_{m'} \mathfrak{n}'$  zutrifft, ist  $a'c + b'$  eine natürliche Zahl und es besteht die Konjunktion  $A(c, a'c + b') \& A'(c, a'c + b')$ .

Beweis. Es besteht [vergleiche Fußnote <sup>15)</sup>] die Formel

$$(1) \quad A'(x, y) \sim A(x, y),$$

<sup>14)</sup> Mit  $[f_i]$  bezeichnen wir eine Folge, deren Glieder  $f_1, f_2$  usw. sind; analog ist im folgenden  $[g_i]$  zu deuten.

<sup>15)</sup> Die Ausführung dieser Operation ist damit gleichbedeutend, daß wir  $x = c$  für falsch erklären.

sofern  $x$  keinen solchen Wert  $c$  annimmt, der innerhalb des Ausdrucks  $A(x, y)$  in einem Bestandteil von der Form  $x = c$  oder  $x \neq c$  auftritt. Es gibt aber höchstens endlich viele derartige Werte  $c$ , und für jeden dieser Werte kann es nach Satz 1 höchstens einen Index  $i$  geben, so daß  $A^i(e, c)$  besteht. Hieraus folgt aber kraft (1) sofort die Existenz einer natürlichen Zahl  $s$ , so daß für alle  $x, y, i$  die Formel besteht:

$$(2) \quad i > s \ \& \ A^i(e, x) \rightarrow (A^i(x, y) \sim A(x, y)).$$

$A^i(x, y)$  ist nach Definition ein derartiger ausgezeichneteter Normalausdruck, der keine Bestandteile vom Typus  $x = c$  oder  $x \neq c$  enthält. Betrachten wir nun ein beliebiges Disjunktionsglied  $\mathfrak{A}(x, y)$  (eine der Variablen kann hier fehlen) von  $A^i(x, y)$ , worin keine Gleichung vom Typus  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) als Glied vorkommt. Es gilt offenbar  $\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow A^i(x, y)$ , somit gemäß (2):

$$(3) \quad i > s \ \& \ A^i(e, x) \ \& \ \mathfrak{A}(x, y) \rightarrow A(x, y)$$

und folglich

$$(4) \quad i > s \ \& \ A^i(e, x) \ \& \ \mathfrak{A}(x, y) \rightarrow A^{i+1}(e, y).$$

$\mathfrak{A}(x, y)$  muß (vgl. Definition 11) entweder ein Konjunktionsglied vom Typus  $x = c$  enthalten, oder für gewisse  $n, m, n'$  von einer der Formen  $x \equiv_m n$ ,  $x \equiv_m n$  &  $y \equiv_m n'$  sein (eventuell konjunktiv verbunden mit Ungleichungen vom Typus  $y \neq ax + b$ ). Demzufolge muß die folgende Formel notwendig bestehen:

$$(5) \quad \mathfrak{A}(x, y) \ \& \ \mathfrak{A}(x', y') \rightarrow (Ez) (\mathfrak{A}(x, z) \ \& \ \mathfrak{A}(x', z)).$$

Hieraus schließen wir, daß es *höchstens einen Index*  $i > s$  geben kann, so daß  $(Ex) (Ey) (A^i(e, x) \ \& \ \mathfrak{A}(x, y))$  erfüllt ist; denn sonst würde es zwei verschiedene Zahlen  $k, l$ , beide  $> s$ , sowie gewisse Zahlen  $c, d, c', d'$  geben, so daß die Formel

$$(6) \quad A^k(e, c) \ \& \ \mathfrak{A}(c, d) \ \& \ A^l(e, c') \ \& \ \mathfrak{A}(c', d')$$

erfüllt wäre; aus letzterer Formel können wir aber mit Hilfe von (5), wo man für  $x, y, x', y'$  bzw.  $c, d, c', d'$  einsetze, die folgende Formel ableiten:

$$(7) \quad A^k(e, c) \ \& \ A^l(e, c') \ \& \ (Ez) (\mathfrak{A}(c, z) \ \& \ \mathfrak{A}(c', z))$$

und dann nach (4) die Formel

$$(8) \quad (Ez) (A^{k+1}(e, z) \ \& \ A^{l+1}(e, z)),$$

welche aber, zufolge der Annahme  $k \neq l$ , mit Satz 1 unvereinbar ist.

Bemerken wir nun, daß  $A^i(x, y)$  (als ausgezeichneteter Normalausdruck, in dem keine Bestandteile vom Typus  $x = c$  oder  $x \neq c$  vorkommen) außer Disjunktionsgliedern von den eben für  $\mathfrak{A}(x, y)$  in Betracht gezogenen Typen (in endlicher Anzahl) nur solche vom Typus  $x \equiv_m n$  &  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) enthalten kann, so folgt aus obigem mit Rücksicht auf (2) ohne Schwierigkeit die Richtigkeit der Behauptung ( $\alpha$ ) des zu beweisenden Satzes.

Was die Behauptung ( $\beta$ ) betrifft, so muß erstens  $A'(x, y)$  als ausgezeichnete Normalausdruck die Bedingung  $\varepsilon$  von Definition 11 befriedigen, und ist zweitens  $\mathfrak{A}(x, y)$  ein Disjunktionsglied von  $A'(x, y)$ , das die Form  $x \equiv_m n' \ \& \ y = a'x + b'$  hat, so folgt aus  $c \equiv_m n'$ , sofern  $a'c + b'$  eine natürliche Zahl darstellt, die Richtigkeit von  $\mathfrak{A}(c, a'c + b')$  und damit auch von  $A'(c, a'c + b')$ : aus  $A'(c, c)$  und  $A'(c, a'c + b')$  folgt aber bei  $i > r$  die Richtigkeit von  $A(c, a'c + b')$ , wenn wir  $r > s$  setzen und dann die Formel (2) anwenden.

Sei nun mit  $A_1(x, y)$  ein beliebiger Ausdruck bezeichnet, der sich in der Weise aus Bestandteilen von  $A'(x, y)$  vom Typus  $x \equiv_m n \ \& \ y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) disjunktiv zusammensetzt, daß darin jede Kongruenz  $x \equiv_m n$ , die in einem Bestandteile von  $A'(x, y)$  vom soeben erwähnten Typus auftritt, ein und nur einmal vorkommt. [Solche Bestandteile muß  $A'(x, y)$  nach Hilfssatz 1 enthalten, denn zufolge  $L'$  (d. h.  $(x)(Ey) A(x, y)$ ) gibt es für jedes  $i$  gewisse natürliche Zahlen  $c, d$ , so daß  $A'(e, c) \ \& \ A(c, d)$  gilt.]

Aus Hilfssatz 1 folgt nun mit Leichtigkeit:

Hilfssatz 2. Es gibt eine gewisse natürliche Zahl  $r$ , so daß für beliebige  $x, i$  folgende Formel besteht:

$$i > r \ \& \ A'(e, x) \rightarrow (Ey) (A_1(x, y) \ \& \ A(x, y)).$$

Hieraus schließen wir mühelos mit Hilfe von Satz 1 sowie  $L'$ :

Hilfssatz 3. Es gibt eine unendliche Folge  $\{f_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) und eine natürliche Zahl  $r$  mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Glieder von  $\{f_i\}$  sind untereinander verschiedene natürliche Zahlen.

b)  $f_1 = e$ .

c)  $A(f_i, f_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

d)  $i > r \rightarrow A_1(f_i, f_{i+1})$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Mit  $\{f_i\}$  sowie  $r$  sollen künftig eine feste Folge sowie eine feste natürliche Zahl der soeben beschriebenen Art bezeichnet werden.

Es besteht ferner (für beliebige  $i, j, x$ ):

Hilfssatz 4.  $i > r \rightarrow (A'_1(f_i, x) \sim x = f_{i+j})$ .

Beweis. Gemäß Hilfssatz 3 genügt es, zum Beweise die Formel

$$(x)(y)(z) (A_1(x, y) \ \& \ A_1(x, z) \rightarrow y = z)$$

herzuleiten. Nun ist jedes Glied von  $A_1(x, y)$  vom Typus  $x \equiv_m n \ \& \ y = ax + b$ , und keine Kongruenz kommt in  $A_1(x, y)$  zweimal vor. Bestehen nun für irgendwelche  $x, y, z$  die Formeln  $A_1(x, y)$  und  $A_1(x, z)$ , so muß für

gewisse Zahlen  $a, b$  sowohl  $y$  als  $z$  mit  $ax + b$  gleich sein, d. h. es gilt  $y = z$ , w. z. b. w.

Wir beweisen ferner

Hilfssatz 5. Wenn  $x \equiv n$  eine Kongruenz ist, die in  $A_1(x, y)$  vorkommt, so findet eine und nur eine der folgenden zwei Möglichkeiten statt:

$\alpha$ ) Es gibt für jedes  $i$  zwei ganze Zahlen  $a, b$ , wobei  $a$  eine Potenz von  $p$  ist, derart, daß folgende Formel für alle  $x, y$  besteht:

$$x \equiv n \text{ \& } A_1^i(x, y) \rightarrow y = ax + b.$$

$\beta$ ) Es gibt eine natürliche Zahl  $i$ , eine Zahl  $0 < a < 1$ , sowie eine Zahl  $b$ , so daß folgende Formel gilt:

$$(x)(x \equiv n \text{ \& } A_1^i(x, y) \rightarrow y = ax + b).$$

Beweis. Sei  $x \equiv n$  eine Kongruenz, die in  $A_1(x, y)$  auftritt. Es enthält dann  $A_1(x, y)$  diese Kongruenz nur einmal und zwar in einem Gliede von der Form

$$x \equiv n \text{ \& } y = ax + b, \text{ wo } a \neq 0 \text{ ist.}$$

Ist hierin  $a < 1$ , so besteht offenbar Fall  $\beta$  (für  $i = 1$ ). Ist aber  $a \geq 1$  und bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}_i$  die Aussage: Es gibt zwei ganze Zahlen  $a, b$ , wo  $a$  eine Potenz von  $p$  ist, so daß für beliebige  $x, y$  die Formel

$$(1) \quad x \equiv n \text{ \& } A_1^i(x, y) \rightarrow y = ax + b$$

besteht, so gilt offenbar  $\mathfrak{A}_1$ . Wir haben somit bewiesen, daß entweder  $\mathfrak{A}_1$  oder  $\beta$  besteht. Zum Beweise unseres Hilfssatzes genügt es, nun zu zeigen, daß für jede natürliche Zahl  $k$  entweder aus  $\mathfrak{A}_k$   $\mathfrak{A}_{k+1}$  folgt oder  $\beta$  wahr ist.

Sei  $k$  eine natürliche Zahl und es finde  $\mathfrak{A}_k$  statt, d. h. für gewisse ganze Zahlen  $a, b$ , wo  $a$  eine Potenz von  $p$  ist, bestehe die Formel

$$(2) \quad (x)(y)(x \equiv n \text{ \& } A_1^k(x, y) \rightarrow y = ax + b).$$

Bezeichnen wir dann mit  $n'$  den kleinsten natürlichen Rest modulo  $m$  von  $an + b$ , so folgt aus (2):

$$(3) \quad x \equiv n \text{ \& } y = ax + b \rightarrow y \equiv n'.$$

Ferner gilt (nach Definition 3):

$$A_1^{k+1}(x, y) \rightarrow (Ez)(A_1^k(x, z) \text{ \& } A_1(z, y)),$$

und daher auf Grund von (2) und (3), wo man  $y$  durch  $z$  ersetze:

$$(4) \quad x \equiv n \text{ \& } A_1^{k+1}(x, y) \rightarrow (Ez)(A_1(z, y) \text{ \& } z = ax + b \text{ \& } z \equiv n').$$



Die Konjunktion  $z \equiv n' \& A_1(z, y)$  ist nun entweder falsch und impliziert dann jeden  $p$ -Ausdruck  $\mathfrak{B}(z, y)$ , oder  $A_1(x, y)$  enthält ein Disjunktionsglied  $x \equiv n' \& y = a'x + b$  ( $a' \neq 0$ ), wobei  $a'$  eine Potenz von  $p$  ist, und es besteht dann die Implikation

$$A_1(z, y) \& z = ax + b \rightarrow y = a'ax + a'b + b'.$$

Mit Hilfe von (4) ergibt sich daher jedenfalls:

$$x \equiv_m n \& A_1^{k+1}(x, y) \rightarrow y = a'ax + a'b + b'.$$

Ist hierin  $a'a > 1$ , so besteht ersichtlich  $\mathfrak{U}_{k+1}$ , sonst findet offenbar Fall  $\beta$  (für  $i = k+1$ ) statt. — Aus  $\mathfrak{U}_k$  folgt somit  $\mathfrak{U}_{k+1}$ , oder es besteht  $\beta$ . — Damit haben wir offenbar unseren Beweis vollendet.

Hilfssatz 6. Es kommt in  $A_1(x, y)$  eine Kongruenz  $x \equiv_m n$  vor, für die der Fall  $\alpha$  vom vorigen Hilfssatze besteht, sowie für unendlich viele  $i$   $f_i \equiv_m n$  ist.

Beweis. Aus Hilfssatz 3 ersehen wir, daß alle  $f_i$  untereinander verschiedene natürliche Zahlen sind, sowie daß für jedes  $i > r$  eine Kongruenz  $f_i \equiv_m n$  besteht, derart, daß  $A_1(x, y)$  einen Bestandteil von der Form  $x \equiv_m n$  enthält. Es muß daher mindestens eine natürliche Zahl  $n \leq m$  geben, so daß für unendlich viele verschiedene  $i$   $f_i \equiv_m n$  besteht. Seien  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) alle diese Zahlen  $n$ .

Wir wollen nun zeigen, daß die Annahme, daß für keine der Kongruenzen  $x \equiv_m n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) der Fall  $\alpha$  von Hilfssatz 5 besteht (wenn dort  $n_j$  für  $n$  eingesetzt wird), zu einem Widerspruch führt. — In der Tat, aus letzterer Annahme folgt sofort nach Hilfssatz 5, daß für jede der obigen Kongruenzen der Fall  $\beta$  besteht, wenn dort  $n_j = n$  gesetzt wird; d. h., es gibt dann für jede Zahl  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) eine natürliche Zahl  $k_j$ , eine Zahl  $a_j$ ,  $0 < a_j < 1$ , sowie eine Zahl  $b_j$ , so daß folgende Formel besteht:

$$(1) \quad x \equiv_m n_j \& A_1^{k_j}(x, y) \rightarrow y = a_jx + b_j.$$

Beachten wir nun, daß es eine Zahl  $i_0 > r$  geben muß, derart, daß es für jeden Index  $i \geq i_0$  ein gewisses  $n_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) gibt, so daß  $f_i \equiv_m n_j$ , so folgt aus Hilfssatz 4 im Verein mit (1) die Existenz einer unendlichen Folge  $[g_i]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) mit folgenden Eigenschaften:

$$a) \quad g_1 = f_{i_0}.$$

$$b) \quad \text{Aus } g_i \equiv_m n_j \text{ } (j = 1, 2, \dots, l) \text{ sowie } g_i = f_{i'} \text{ folgt für jedes } i, i':$$

$$g_{i+i'} = f_{i'+k_j} \& g_{i+i'} = a_j g_i + b_j.$$

Aus letzterem folgt nun einerseits (vgl. Hilfssatz 3), daß die  $g_i$  lauter paarweise verschiedene natürliche Zahlen sind, und andererseits (weil die  $a_j$

echte Brüche sind), daß die Folge  $[g_i]$  nach oben begrenzt ist. Beides zugleich ist aber unmöglich und damit ist unser Beweis vollendet.

Nun sind wir schließlich imstande, den Satz 2 zu beweisen:

Sei  $x \equiv_m n$  die Kongruenz, deren Existenz im soeben erwiesenen Hilfssatze festgestellt wird. Nach den beiden letzten Hilfssätzen besteht nun folgendes: für jedes  $i$  gibt es zwei ganze Zahlen  $a_i, b_i$ , wobei  $a_i$  eine Potenz von  $p$  ist, so daß für alle  $x, y$  folgende Formel besteht:

$$x \equiv_m n \text{ \& } A_i^1(x, y) \rightarrow y = a_i x + b_i.$$

Aus letzterer Formel folgt nun sofort mit Rücksicht auf Hilfssatz 4, für alle  $j > r$  sowie alle  $i$ :

$$(1) \quad f_j \equiv_m n \rightarrow f_{j+i} = a_i f_j + b_i.$$

Aus Hilfssatz 6 folgt ferner, daß es unendlich viele  $i > r$  gibt, so daß  $f_i \equiv_m n$ ; seien  $i_0, i_0 + k$  die zwei kleinsten Zahlen  $i$  dieser Art. Nach (1) haben wir dann:

$$(2) \quad f_{i_0} \equiv_m n \text{ \& } f_{i_0+k} \equiv_m n \text{ \& } f_{i_0+k} = a_k f_{i_0} + b_k,$$

woraus folgt, daß  $n$  der kleinste natürliche Rest von  $a_k n + b_k$  modulo  $m$  sein muß und deshalb für alle  $x, y$  folgende Beziehung gilt:

$$(3) \quad x \equiv_m n \text{ \& } y = a_k x + b_k \rightarrow y \equiv_m n.$$

Vermöge (3) und (1) gewinnen wir nun für alle  $j > r$ :

$$(4) \quad f_j \equiv_m n \rightarrow f_{j+k} = a_k f_j + b_k \text{ \& } f_{j+k} \equiv_m n.$$

Aus letzterer Formel im Verein mit  $f_{i_0} \equiv_m n$  (vgl. (2)) gewinnen wir durch leichte Induktion für alle  $j$ :

$$(5) \quad f_{i_0+jk} = a_k^j f_{i_0} + (a_k^{j-1} + a_k^{j-2} + \dots + 1) b_k.$$

Ersetzen wir ferner in (1)  $j$  durch  $i_0 + jk$ , so ergibt sich:

$$(6) \quad f_{i_0+jk+i} = a_i f_{i_0+jk} + b_i \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Beide letzten Formeln ergeben nun zusammen:

$$f_{i_0+jk+i} = a_i a_k^j f_{i_0} + a_i (a_k^{j-1} + a_k^{j-2} + \dots + 1) b_k + b_i,$$

wodurch im Verein mit Hilfssatz 3 der Beweis vollendet ist, daß die Folge  $[f_i]$  die in Satz 2 geforderten Eigenschaften besitzt.

Satz 3. Wenn  $[f_i]$  die im vorigen Satze beschriebene Folge ist, und  $g_i = f_{q^i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), so kann es keine endliche Menge  $M$  von Zahlenpaaren  $(a, b)$  geben, so daß die  $a$  ganzzahlige Potenzen von  $p$  sind, und für jede natürliche Zahl  $i$ , mit Ausnahme höchstens endlich vieler, in  $M$  ein gewisses Paar  $(a, b)$  existiert, so daß  $g_{i+1} = a g_i + b$  ist.

Die  $g_i$  sind lauter untereinander verschiedene natürliche Zahlen, weil dasselbe nach vorigem Satze von den  $f_i$  gilt. Es wird mithin  $g_i$  mit wachsendem  $i$  größer als jede Zahl. Nehmen wir daher die Existenz einer Menge  $M$  mit den in der Behauptung des zu beweisenden Satzes geschilderten Eigenschaften an, so folgt hieraus, daß es zu jeder (beliebig kleinen) positiven Größe  $\varepsilon$  eine Zahl  $s$  gibt, so daß für jeden Index  $i > s$  bei mindestens einem zu  $M$  gehörigen Paar  $(a, b)$  die Ungleichung

$$\left| \frac{g_{i+1}}{g_i} - a \right| < \varepsilon$$

besteht.

Wir wollen nun zeigen, daß der Werteverlauf des Verhältnisses  $\frac{g_{i+1}}{g_i}$  (d. h.  $\frac{f q i}{f q^{i-1}}$ ) mit dem soeben beschriebenen nicht übereinstimmt. Aus dem vorigen Satze folgt nämlich, daß es für die Folge  $[f_i]$  gewisse natürliche Zahlen  $i_0, k$  sowie  $k$  Zahlenpaare  $(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) gibt, derart, daß die  $a_i$  Potenzen von  $p$  sind und daß für alle natürlichen  $j$  sowie für  $i = 1, 2, \dots, k$  folgende Gleichung besteht:

$$(1) \quad f_{i_0+jk+i} = a_i a_k^j f_{i_0} + a_i (a_k^{j-1} + a_k^{j-2} + \dots + 1) b_k + b_i.$$

Sind ferner  $f_{q^l}, f_{q^{l+1}}$  zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge  $[g_i]$ , so gibt es (für genügend große  $l$ ) gewisse natürliche Zahlen  $j, i, j', i'$ , so daß folgende Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad \begin{aligned} q^l &= i_0 + jk + i, \\ q^{l+1} &= i_0 + j'k + i'. \end{aligned}$$

Bildet man aus den linken sowie den rechten Seiten dieser Gleichungen die Quotienten, so ersieht man, daß das Verhältnis  $\frac{j'}{j}$  mit wachsendem  $l$  gegen  $q$  konvergieren muß.

Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden, je nachdem  $a_k = 1$  ist oder nicht.

a) Im Falle  $a_k = 1$  geht (1) über in

$$f_{i_0+jk+i} = a_i f_{i_0} + a_i b_k j + b_i,$$

und ebenso gilt:

$$f_{i_0+j'k+i'} = a_{i'} f_{i_0} + a_{i'} b_k j' + b_{i'}.$$

Für genügend große  $j, j'$  wird sich daher der Quotient  $\frac{f_{i_0+j'k+i'}}{f_{i_0+jk+i}}$  dem absoluten Betrage nach beliebig wenig von  $\frac{a_{i'} j'}{a_i j}$  unterscheiden, somit auch (zufolge (2)) beliebig wenig von  $\frac{a_{i'}}{a_i} q$ . Damit ist aber unsere Behauptung über den Wertverlauf von  $\frac{f_{q^l}}{f_{q^{l-1}}}$  für den Fall  $a_k = 1$  erwiesen, denn  $\frac{a_{i'}}{a_i} q$

ist keine Potenz von  $p$ , weil  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Primzahlen sind und  $\frac{a^{j'}}{a_i}$  eine Potenz von  $p$  ist.

b) Gehen wir nun zum Falle  $a_k \neq 1$  über.

In diesem Falle können wir in (1) die Summe  $a_k^{j-1} + a_k^{j-2} + \dots + 1$  durch  $\frac{a_k^j - 1}{a_k - 1}$  ersetzen, d. h. es gilt:

$$(3) \quad f_{i_0+jk+i} = \frac{a_i((a_k-1)f_{i_0} + b_k)}{a_{k-1}} \cdot a_k^j + c,$$

wo  $c$  von  $j$  unabhängig ist. Es wird sich daher der Quotient  $\frac{f_{i_0+j'k+i'}}{f_{i_0+jk+i}}$  bei unendlich wachsenden  $j, j'$  dem absoluten Betrage nach unendlich wenig von  $\frac{a_i^{j'}}{a_i} \cdot a_k^{j'-j}$  unterscheiden und muß daher unendlich groß werden, wenn das Verhältnis  $\frac{j'}{j}$  mit wachsenden  $j, j'$  gegen  $q$  konvergiert. — Somit ist auch in diesem Falle unsere Behauptung erwiesen und zugleich der Beweis unseres Satzes vollendet.

Wir nähern uns hiermit dem Ende des Beweises von Satz C. Nämlich wir wollen nun auf Grund von Satz 2 sowie  $N'_q$  und  $O'_q$  gerade das Gegenteil des vorstehenden Satzes 3 erweisen, d. h. zeigen, daß es für die Folge  $\{g_i\}$  eine Menge  $M$  mit den im vorigen Satz beschriebenen Eigenschaften doch geben muß.

Schreiben wir die Formeln  $N'_q$  und  $O'_q$  nochmals auf:

$$\begin{aligned} N'_q & (x)(y) [(z) \bar{A}(z, x) \rightarrow (B(x, y) \sim A^{q-1}(x, y))] \\ O'_q & (x)(y)(z)(t) [A(x, y) \& B(x, z) \rightarrow (B(y, t) \sim A^q(z, t))]. \end{aligned}$$

Aus diesen zwei Formeln gewinnen wir

$$(H_i) \quad B^i(e, x) \sim A^{q^i-1}(e, x) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Der bezügliche Beweis verläuft folgendermaßen:

Zunächst erweisen wir, daß für jedes natürliche  $i$  die Formel

$$(B_i) \quad A^{i-1}(e, y) \rightarrow (B(y, t) \sim A^{tq-1}(e, t))$$

besteht, wobei wir unter  $A^0(e, y)$  die Gleichung  $e = y$  verstehen. Den Beweis führen wir vermittelst Induktion nach  $i$ . Die Richtigkeit von  $B_1$ , d. h. von

$$(1) \quad B(e, t) \sim A^{q-1}(e, t),$$

folgt aus  $N'_q$ , wo wir  $x, y$  bzw. durch  $e, t$  ersetzen.

Nehmen wir nun für irgendeine natürliche Zahl  $k$  die Formel

$$(B_k) \quad A^{k-1}(e, y) \rightarrow (B(y, t) \sim A^{kq-1}(e, t))$$

an, dann läßt sich die Formel

$$(\mathfrak{B}_{k+1}) \quad A^k(e, y) \rightarrow (B(y, t) \sim A^{(k+1)q-1}(e, t))$$

in folgender Weise ableiten:

Setzen wir in  $\mathfrak{B}_k$  für  $y, t$  bzw.  $x, z$  ein, so erhalten wir

$$(2) \quad A^{k-1}(e, x) \rightarrow (B(x, z) \sim A^{kq-1}(e, z)).$$

Letztere Formel ergibt im Verein mit  $O'_q$

$$(3) \quad A^{k-1}(e, x) \& A(x, y) \& A^{kq-1}(e, z) \rightarrow (B(y, t) \sim A^q(z, t)).$$

Hieraus gewinnen wir, indem wir die Konjunktion  $A^{k-1}(e, x) \& A(x, y)$  durch  $A^k(e, y)$  ersetzen:

$$(4) \quad A^k(e, y) \& A^{kq-1}(e, z) \rightarrow (B(y, t) \sim A^q(z, t)).$$

Aus (4) folgern wir leicht folgende zwei Formeln:

$$(5) \quad A^k(e, y) \& A^{kq-1}(e, z) \& A^q(z, t) \rightarrow B(y, t),$$

$$(6) \quad A^k(e, y) \& A^{kq-1}(e, z) \& B(y, t) \rightarrow A^q(z, t).$$

Bemerken wir nun, daß die Formel

$$(7) \quad A^{(k+1)q-1}(e, t) \sim (Ez)(A^{kq-1}(e, z) \& A^q(z, t))$$

gilt, so folgt aus (5)

$$(8) \quad A^k(e, y) \& A^{(k+1)q-1}(e, t) \rightarrow B(y, t).$$

Aus (6) schließen wir nach dem Aussagenkalkül

$$(9) \quad A^k(e, y) \& A^{kq-1}(e, z) \& B(y, t) \rightarrow (A^{kq-1}(e, z) \& A^q(z, t))$$

und somit nach (7)

$$(10) \quad A^k(e, y) \& A^{kq-1}(e, z) \& B(y, t) \rightarrow A^{(k+1)q-1}(e, t).$$

Ferner besteht auf Grund von  $L'$ , d. h.  $(x)(Ey)A(x, y)$ , die Formel

$$(11) \quad (Ez)A^{kq-1}(e, z),$$

und daher können wir aus (10) die Formel

$$(12) \quad A^k(e, y) \& B(y, t) \rightarrow A^{(k+1)q-1}(e, t)$$

ableiten, die dann im Verein mit (8) die Formel  $\mathfrak{B}_{k+1}$  ergibt. Damit ist  $\mathfrak{B}_i$  als allgemein gültig erwiesen.

Wir sind nun imstande, die Formel  $\mathfrak{A}_i$  zu beweisen. Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $i$ .

Zunächst folgt  $\mathfrak{A}_1$  unmittelbar aus (1), worin man  $t$  durch  $x$  ersetze. Nehmen wir nun für irgendein natürliches  $k$  die Gültigkeit von

$$(\mathfrak{A}_k) \quad B^k(e, x) \sim A^{k-1}(e, x)$$

an; wir wollen daraus die Formel

$$(\mathfrak{A}_{k+1}) \quad B^{k+1}(e, x) \sim A^{k+1-1}(e, x)$$

ableiten. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Formel

$$(13) \quad B^{k+1}(e, x) \sim (Ey)(B^k(e, y) \& B(y, x))$$

besteht; hierin können wir  $B^k(e, y)$  gemäß  $\mathfrak{A}_k$  durch  $A^{q^k-1}(e, y)$  ersetzen, wodurch wir gewinnen

$$(14) \quad B^{k+1}(e, x) \sim (E y) (A^{q^k-1}(e, y) \& B(y, x)).$$

Setzen wir ferner in  $\mathfrak{B}_i$  für  $i, t$  bzw.  $q^k, x$  ein, so erhalten wir

$$(15) \quad A^{q^k-1}(e, y) \rightarrow (B(y, x) \sim A^{q^{k+1}-1}(e, x))$$

und hieraus

$$(16) \quad A^{q^k-1}(e, y) \& B(y, x) \sim A^{q^k-1}(e, y) \& A^{q^{k+1}-1}(e, x).$$

Die Formeln (14) und (16) ergeben:

$$(17) \quad B^{k+1}(e, x) \sim (E y) (A^{q^k-1}(e, y) \& A^{q^{k+1}-1}(e, x)).$$

Aus letzterer Formel folgt sogleich die Formel

$$(18) \quad B^{k+1}(e, x) \sim (E y) A^{q^k-1}(e, y) \& A^{q^{k+1}-1}(e, x),$$

welche mit Rücksicht auf (11) schließlich die gesuchte Formel  $\mathfrak{A}_{k+1}$  ergibt. Damit ist aber  $\mathfrak{A}_i$  für jedes natürliche  $i$  bewiesen.

Aus  $\mathfrak{A}_i$  folgt gemäß Satz 1 für alle  $x, y, i$

$$B^i(e, x) \& B^j(e, x) \rightarrow i = j,$$

d. h. der Satz, der aus Satz 1 hervorgeht, wenn man darin  $A$  durch  $B$  ersetzt.

Vergegenwärtigen wir uns nun, daß zum Beweise von Hilfssatz 1 bloß Satz 1 benutzt wurde, und bezeichnen wir mit  $B'(x, y)$  denjenigen Ausdruck, der aus  $B(x, y)$  in derselben Weise wie  $A'(x, y)$  aus  $A(x, y)$  entsteht, so folgt hieraus, daß Hilfssatz 1 seine Richtigkeit behält, wenn man darin überall „ $A$ “ durch „ $B$ “ ersetzt; demzufolge gilt:

(19) Es gibt eine natürliche Zahl  $r$ , so daß, wenn für eine natürliche Zahl  $i > r$  sowie gewisse natürliche Zahlen  $c, d$  die Formel  $B^i(e, c) \& B(c, d)$  besteht, dann  $B(x, y)$  eine Gleichung  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) enthält, so daß  $d = ac + b$  ist.

Aus Satz 2, c (d. h. aus der Gültigkeit von  $A(f_i, f_{i+1})$  für alle  $i$ ) schließen wir ferner

$$(20) \quad A^{q^i-1}(f_i, f_{q^i}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

und hieraus im Verein mit  $\mathfrak{B}_i$ , worin wir  $i, y, t$  bzw. durch  $q^{i-1}, f_{q^{i-1}}, f_{q^i}$  ersetzen, sowie mit Rücksicht auf  $e = f_1$  (Satz 2, b):

$$(21) \quad B(f_{q^{i-1}}, f_{q^i}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

d. h. nach der Bedeutung von  $g_i$ :

$$(22) \quad B(g_i, g_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

sowie, da  $e = f_1 = g_1$ :

$$(23) \quad B^i(e, g_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Vermöge letzterer beiden Formeln gewinnen wir nun aus (19) (wo man  $c, d$  bzw. durch  $g_{i+1}, g_{i+2}$  ersetze):

Satz 4. Es gibt eine natürliche Zahl  $r$  derart, daß für jedes  $i > r$  in  $B(x, y)$  eine Gleichung  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) vorkommt, so daß  $g_{i+1} = ag_i + b$ .

Beachten wir nun, daß  $B(x, y)$  höchstens endlich viele Gleichungen vom Typus  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) enthalten kann, sowie daß hierin die  $a$  ganzzahlige Potenzen von  $p$  sein müssen, so haben wir damit das Gegenteil von Satz 3 erwiesen.

Damit ist aber der Beweis von Hauptsatz I vollendet.

#### § 4.

Wir gehen nun vom engeren Funktionenkalkül zum erweiterten Funktionenkalkül<sup>16)</sup> (mit dem Axiom der Reduzierbarkeit) über. Wir werden zeigen, daß der Vollständigkeitsgrad dieser Theorie ebenfalls gleich dem Kontinuum ist, indem wir — analog wie zum Beweis von Hauptsatz I, aber viel leichter — die Existenz einer Menge  $\mathfrak{M}$  aufweisen werden, derart, daß kein Element von  $\mathfrak{M}$  aus der Gesamtheit der übrigen Elemente von  $\mathfrak{M}$  (vermittelt der Axiome und Beweisregeln des fraglichen Kalküls) ableitbar ist. — Es lohnt sich dabei zu bemerken, daß man für  $\mathfrak{M}$  die Menge  $\mathfrak{E}$  (Definition 4) nehmen kann, sofern der Gebrauch des Axioms der Reduzierbarkeit ausgeschlossen wird; der Beweis dafür verläuft ganz analog wie der Beweis von Satz A (§ 1).

Wir definieren  $\mathfrak{M}$  in folgender Weise: Bezeichnen wir mit  $Id(x, y)$  den Ausdruck  $(F)(F(x) \rightarrow F(y))$  sowie mit  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) die Disjunktion aus allen verschiedenen Ausdrücken  $Id(x_i, x_j)$ , wo  $i$  und  $j$  die Reihe  $1, 2, \dots, k$  durchlaufen und  $i < j$  ist, so sei  $\mathfrak{M}_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) der Ausdruck

$(x_1)(x_2) \dots (x_k) [V(x_1, x_2, \dots, x_k) \vee (E y) (\bar{I}d(x_1, y) \& \bar{I}d(x_2, y) \& \dots \& \bar{I}d(x_k, y))]$ .  
(Für jedes  $k = 2, 3, \dots$  bedeutet  $\mathfrak{M}_k$ , daß die Anzahl der Elemente des Individuenbereiches nicht genau gleich  $k$  ist).

Sind nun  $k, l$  zwei verschiedene natürliche Zahlen  $> 1$ , so stellt  $\mathfrak{M}_k$  offensichtlich einen wahren Ausdruck dar, falls die Anzahl der Elemente des Individuenbereiches gleich  $l$  angenommen wird;  $\mathfrak{M}_l$  ist dann aber falsch, woraus mit Leichtigkeit folgt, daß  $\mathfrak{M}_k$  aus der Gesamtheit aller übrigen Elemente von  $\mathfrak{M}$  nicht ableitbar ist — wenn man die leicht zu erweisende Tatsache berücksichtigt, daß aus Ausdrücken des betrachteten Kalküls, die in einem gegebenen endlichen Individuenbereiche allgemein-

<sup>16)</sup> Vgl. H.-A. Kap. 4. Dieser Kalkül ist im wesentlichen mit der Logik der Principia Mathematica, unter Ausschaltung des Unendlichkeitsaxioms identisch, wobei dem „axiom of reducibility“ das „Axiom der Reduzierbarkeit“ entspricht.



gültig sind, nur wiederum in demselben Bereiche allgemeingültige Ausdrücke ableitbar sind.

Damit haben wir bewiesen, daß der Vollständigkeitsgrad des erweiterten Funktionenkalküls gleich dem Kontinuum ist. —

Wir gehen nun zur Theorie von K. Gödel über, welche im folgenden mit  $P$  bezeichnet werde.  $P$  ist im wesentlichen mit der Theorie identisch, die man erhält, wenn man die Axiome der Arithmetik von Peano mit der Logik der Principia Mathematica überbaut; oder auch mit der Theorie, die man aus dem erweiterten Funktionenkalkül gewinnt, wenn man darin den Gebrauch von Funktionszeichen mit mehr als einer Leerstelle untersagt und dann für alle  $n = 1, 2, \dots$  die folgenden Ausdrücke als neue Axiome hinzunimmt:

1.  $(EF_1)(x)(F_n(x) \sim F_1(x)),$
2.  $(F_{n-1})(F_n(F_{n-1}) \sim G_n(F_{n-1})) \rightarrow (F_{n+1}(F_n) \rightarrow F_{n+1}(G_n)),$
3.  $\overline{Id}(f(x), 0),$
4.  $Id(f(x), f(y)) \rightarrow Id(x, y),$
5.  $[F(0) \& (x) \{F(x) \rightarrow F(f(x))\}] \rightarrow F(y).$

$F_0$  ist oben eine Individuenvariable;  $Id(x, y)$  vertritt den Ausdruck  $(F)(F(x) \rightarrow F(y))$ ; 0 ist ein bestimmtes (konstantes) Individuenzeichen, sowie  $f(x)$  eine bestimmte Gegenstandsfunktion (d. h. eine Funktion, deren Argumente und Werte Individuen sind und die man überall für eine freie Individuenvariable einsetzen darf).

Wir wollen die sinnvollen Ausdrücke von  $P$  als *Formeln* bezeichnen, sowie die Menge aller (in  $P$ ) beweisbaren Formeln mit  $Q$ . —  $Q$  ist (nach der Definition von Herrn Gödel) die kleinste Formelmenge, die die Axiome von  $P$  enthält sowie nach dem Schlußschema abgeschlossen ist, d. h. zu je zwei Elementen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ <sup>17)</sup> auch  $\mathfrak{B}$  als Element enthält. — Ferner sei für jede Formelmenge  $M$  sowie für jede Formel  $\mathfrak{A}$  durch  $Fl(M)$  bzw.  $Fl(\mathfrak{A})$  — analog wie bei Gödel — die kleinste Menge bezeichnet, die  $Q$  und  $M$  bzw.  $Q$  und  $\mathfrak{A}$  umfaßt und nach dem Schlußschema abgeschlossen ist.

Bezeichnen wir endlich als *Satzformeln* alle Formeln ohne freie Variable, so gilt

<sup>17)</sup> Herr Gödel benutzt das Folgezeichen  $\supset$ , wir werden aber der Bequemlichkeit halber im folgenden annehmen, daß die logischen Verknüpfungen von  $P$  mit denjenigen von H.-A. übereinstimmen;  $Q$  enthält dann alle Formeln, die aus richtigen Ausdrücken des Aussagenkalküls von H.-A. durch Einsetzung von Formeln für die Variablen hervorgehen. — Die Einsetzungsregel wird dadurch überflüssig, daß Gödel alle möglichen Einsetzungen bereits in den Axiomen selbst vornimmt.

Satz 1<sup>18)</sup>. Für jede Satzformel  $\mathfrak{A}$  besteht  $Fl(\mathfrak{A})$  aus allen denjenigen Formeln  $\mathfrak{B}$ , für die es in  $Q$  eine Formel  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  gibt.

Beweis vermittelt der Bemerkung, daß in  $Q$  für beliebige drei Formeln  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  die Formeln  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$ , sowie  $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow [(\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})]$  enthalten sind (vgl. Fußnote 17)).

Ferner besteht

Satz 2. Für jede nicht-leere Menge von Satzformeln  $M$  besteht  $Fl(M)$  aus allen denjenigen Formeln  $\mathfrak{B}$ , für die es in  $Q$  eine Formel  $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \dots \& \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{B}$  gibt, so daß die Formeln  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  zu  $M$  gehören. Beweis vermittelt des vorigen Satzes sowie der Bemerkung, daß, wenn eine Formel  $\mathfrak{B}$  zu  $Fl(M)$  gehört, dann eine endliche nicht-leere Untermenge  $N$  von  $M$  existiert, (die man durch die Konjunktion aller ihrer Elemente ersetzen kann), derart, daß  $\mathfrak{B}$  zu  $Fl(N)$  gehört.

Wir nennen eine Formelmenge  $M$  „widerspruchsfrei“ (im Gegenfall „widerspruchsvoll“), falls  $Fl(M)$  nicht mit der Menge aller Formeln identisch ist.

Aus dem soeben erwiesenen Satze ergibt sich mit Leichtigkeit:

Satz 3. Wenn eine Menge  $M$  von Satzformeln widerspruchsfrei ist, so enthält  $M$  keine solchen Formeln  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ , für welche  $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \dots \& \mathfrak{A}_n$  zu  $Q$  gehört.

Wir wollen nun beweisen:

Satz 4. Sei  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_{i+1}, \dots$  eine Folge von Satzformeln, von der kein Glied zu  $Q$  gehört, während aber alle Formeln  $\mathfrak{A}_{i+1} \rightarrow \mathfrak{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) in  $Q$  enthalten sind; bezeichnen wir dann mit  $\mathfrak{B}_i$  das  $i$ -te Glied dieser Folge sowie mit  $M_i$  die Gesamtheit aller Glieder dieser Folge mit Ausnahme von  $\mathfrak{B}_i$ , so gehört  $\mathfrak{B}_i$  nicht zu  $Fl(M_i)$ .

Beweis: Auf Grund von Satz 2 können wir die zu erweisende Behauptung durch die folgende ersetzen:

Die Formel

$$(\alpha) \quad \mathfrak{B}_1 \& \dots \& \mathfrak{B}_{i-1} \& \mathfrak{B}_{i+1} \& \dots \& \mathfrak{B}_{i+k} \rightarrow \mathfrak{B}_i$$

gehört für keine  $i, k$  zu  $Q$ <sup>19)</sup>.

Letztere Formel ersetzen wir (nach dem Aussagenkalkül) durch

$$(\beta) \quad \mathfrak{B}_1 \& \dots \& \mathfrak{B}_{i-1} \& \mathfrak{B}_{i+1} \& \dots \& \mathfrak{B}_{i+k} \rightarrow \mathfrak{B}_1 \& \dots \& \mathfrak{B}_i.$$

<sup>18)</sup> Vgl. zu diesem sowie zu dem nächsten Satze: J. Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration S. 61—62, Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 1930.

<sup>19)</sup> Für  $i = 1$  ersetze man im folgenden die Konjunktion  $\mathfrak{B}_1 \& \dots \& \mathfrak{B}_{i-1}$  durch  $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_1$ .

Es ist nun leicht zu zeigen, daß zu  $Q$  für beliebige  $j, l$  die Formel

$$(1) \quad \mathcal{A}_{j+l} \rightarrow \mathcal{A}_j$$

gehört; denn es gehört nach Voraussetzung jede Formel vom Typus  $\mathcal{A}_{j+1} \rightarrow \mathcal{A}_j$  zu  $Q$ . Somit gehört zu  $Q$  für jedes  $j$

$$(2) \quad \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{B}_1 \& \dots \mathcal{B}_j$$

sowie (nach dem Aussagenkalkül)

$$(3) \quad \mathcal{B}_1 \& \dots \mathcal{B}_j \rightarrow \mathcal{A}_j.$$

Setzen wir in (2)  $j = i - 1$  sowie in (3)  $j = i$ , so erkennt man: wenn  $(\beta)$  zu  $Q$  gehört, so gilt dasselbe für

$$(\gamma) \quad \mathcal{A}_{i-1} \& \mathcal{B}_{i+1} \& \dots \mathcal{B}_{i+k} \rightarrow \mathcal{A}_i.$$

Zufolge (1) muß ferner für jedes  $j$  die Formel

$$(\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i+j}) \rightarrow (\mathcal{A}_{i+j-1} \rightarrow \mathcal{A}_{i+j}),$$

d. h. die Formel

$$(\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i+j}) \rightarrow \mathcal{B}_{i+j}$$

zu  $Q$  gehören.

Setzen wir hierin  $j = 1, 2, \dots, k$ , so ist ersichtlich, daß, wenn  $\gamma$  zu  $Q$  gehört, auch die folgende Formel

$$(\delta) \quad \mathcal{A}_{i-1} \& (\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i+1}) \& \dots (\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_{i+k}) \rightarrow \mathcal{A}_i$$

zu  $Q$  gehört.

Nun ist aber  $(\delta)$  nach dem Aussagenkalkül mit der Formel  $\mathcal{A}_{i-1} \rightarrow \mathcal{A}_i$  äquivalent, die nach Voraussetzung nicht zu  $Q$  gehört; somit gehört  $(\delta)$  nicht zu  $Q$ , und daher gehört auch  $(\gamma)$  sowie auch  $(\beta)$  nicht zu  $Q$ . Damit ist aber unsere Behauptung erwiesen. Wir werden nun — unter einer gewissen ziemlich plausiblen Voraussetzung — die Existenz einer Folge von Satzformeln  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$  aufweisen, die der Voraussetzung des soeben erwiesenen Satzes genügt; aus der Behauptung dieses Satzes folgt aber, nach einer geläufigen Überlegung:

**Hauptsatz II.** Der Vollständigkeitsgrad von  $P$  ist gleich dem Kontinuum.

Herr Gödel zeigt in seiner in der Fußnote <sup>1)</sup> zitierten Abhandlung, daß die gewöhnlichen metamathematischen Begriffe (wie „Formel“, „Satzformel“, „widerspruchsfreie Menge“) sich in der Sprache seiner Theorie ausdrücken lassen. Insbesondere läßt sich eine Satzformel aufschreiben, die den folgenden Satz ausdrückt:

„ $Q$  ist widerspruchsfrei“.

Desgleichen läßt sich für jede endliche Menge  $M$  von explizit vorgelegten Formeln eine Satzformel bilden mit der Bedeutung:

„ $Fl(M)$  ist widerspruchsfrei“.

Demzufolge gibt es eine unendliche Folge  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$  von Satzformeln, so daß

1.  $\mathfrak{A}_1$  besagt, daß  $Q$  widerspruchsfrei ist,
2.  $\mathfrak{A}_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) besagt, daß  $Fl(\mathfrak{A}_i)$  widerspruchsfrei ist.

Sei nun  $Q_1 = Q$  sowie  $Q_{i+1} = Fl(\mathfrak{A}_i)$ ; es besagt dann für jedes  $i$  die Formel  $\mathfrak{A}_i$ , daß  $Q_i$  widerspruchsfrei ist.

Als unmittelbare Folgerung aus einem Ergebnisse von Gödel (l. c. S. 196, Satz XI) gilt dann für jedes  $i$ :

Satz 5. Wenn  $Q_i$  widerspruchsfrei ist, so gehört  $\mathfrak{A}_i$  nicht zu  $Q_i$ .

Wir wollen nun ohne Beweis annehmen:

Satz 6.  $Q_i$  ist widerspruchsfrei ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Letzterer Satz ist dem folgenden äquivalent:

Satz 6'.  $Q_i$  (d. h.  $Q$ ) ist widerspruchsfrei, und für jedes  $i$  gilt: wenn  $Q_i$  widerspruchsfrei (d. h.  $\mathfrak{A}_i$  inhaltlich richtig) ist, so gehört  $\mathfrak{A}_i$  nicht zu  $Q$ .

Beweis von Satz 6' aus Satz 6: Sind alle  $Q_i$  widerspruchsfrei, so auch  $Q_1$ ;  $\mathfrak{A}_1$  kann nicht zu  $Q$  gehören, denn sonst wäre (nach Satz 3)  $Fl(\mathfrak{A}_1)$ , d. h.  $Q_{1+1}$  widerspruchsvoll.

Beweis von Satz 6 aus Satz 6': Satz 6 gilt für  $i = 1$ ; nehmen wir nun für irgendein  $k$  an, daß Satz 6 für  $i = k$  gilt, d. h.  $Q_k$  widerspruchsfrei ist, so gehört nach Satz 6'  $\mathfrak{A}_k$  nicht zu  $Q$ , daher ist (zufolge von Satz 1)  $Fl(\mathfrak{A}_k)$ , d. h.  $Q_{k+1}$  widerspruchsfrei und es gilt demnach Satz 6 für  $i = k + 1$ ; damit ist aber ersichtlich Satz 6 erwiesen. Aus den Sätzen 5 und 6 folgt nun sofort für alle  $i$ :

- (1)  $\mathfrak{A}_i$  gehört nicht zu  $Q_i$ ,

sowie, als Spezialfall hiervon:

- (2)  $\mathfrak{A}_1$  gehört nicht zu  $Q$ .

Aus (1), worin man  $i$  durch  $i + 1$  ersetze, und Satz 1 schließen wir mit Rücksicht auf  $Q_{i+1} = Fl(\mathfrak{A}_i)$ :

- (3)  $\mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_{i+1}$  gehört nicht zu  $Q$ .

Man beweist ferner (auf Grund der Kenntnis von  $P$ ):

- (4)  $\mathfrak{A}_{i+1} \rightarrow \mathfrak{A}_i$  gehört zu  $Q$ .

(In der Tat,  $\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1$  muß zu  $Q$  gehören, denn  $\mathfrak{A}_1$  behauptet die Widerspruchsfreiheit von  $Q$ ,  $\mathfrak{A}_2$  aber die Widerspruchsfreiheit der Menge  $Fl(\mathfrak{A}_1)$ , die  $Q$  umfaßt; nehmen wir nun für irgendein  $k$  an, daß  $\mathfrak{A}_{k+1} \rightarrow \mathfrak{A}_k$  zu  $Q$  gehört, so ist  $Fl(\mathfrak{A}_k)$  in  $Fl(\mathfrak{A}_{k+1})$  enthalten und daher muß (zufolge der Bedeutung von  $\mathfrak{A}_{k+1}$ ,  $\mathfrak{A}_{k+2}$ )  $\mathfrak{A}_{k+2} \rightarrow \mathfrak{A}_{k+1}$  zu  $P$  gehören; somit gilt (4) für alle  $i$ , w. z. b. w.).

Beachten wir nun, daß (2) bis (4) zusammen die Voraussetzung von Satz 4 ergeben, so ist damit, nach dem vorhin Bemerkten, der Hauptsatz II erwiesen.

Anmerkung 1. In Übereinstimmung mit dem oben erwähnten Satz XI der zitierten Abhandlung von Gödel darf man in diesem Paragraphen die Theorie  $P$  durch eine beliebige Theorie ersetzen, die aus  $P$  durch Beifügung (zu den Axiomen) einer „rekursiven widerspruchsfreien Klasse von Formeln“ (vgl. zitierte Abhandlung von Gödel. S. 179) entsteht. — Insbesondere fällt unter diese Bezeichnung jede widerspruchsfreie endliche Menge von effektiv vorgelegten Formeln. — Gilt dann Satz 6, so ist der Vollständigkeitsgrad dieser Theorie gleich dem Kontinuum. Natürlich kann an Stelle von  $P$  auch jede Theorie betrachtet werden, die diejenigen Eigenschaften von  $P$  besitzt, die wir zum Beweise von Hauptsatz II verwendet haben; insbesondere gilt das für die Zermelo-Fraenkelsche, von J. v. Neumann weiter ausgebildete Mengenlehre<sup>20)</sup>.

Anmerkung 2. Zum Beweise von Hauptsatz II würde es genügen, die Existenz einer unendlichen Folge von Satzformeln  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots$  aufzuweisen, für welche sowohl  $\mathfrak{C}_1$  als auch alle Formeln vom Typus  $\mathfrak{C}_1 \& \mathfrak{C}_2 \& \dots \mathfrak{C}_{i-1} \rightarrow \mathfrak{C}_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) nicht zu  $Q$  gehören. In der Tat, bezeichnen wir dann für jedes  $i$  mit  $\mathfrak{A}_i$  die Formel  $\mathfrak{C}_1 \& \mathfrak{C}_2 \& \dots \mathfrak{C}_i$ , so überzeugt man sich leicht, daß die Voraussetzung von Satz 4 befriedigt wird.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank Herrn Prof. Paul Bernays auszudrücken, der diese Arbeit freundlichst durchgesehen hat und dessen wertvolle Bemerkungen mich zur Verbesserung mancher Stellen veranlaßt haben.

<sup>20)</sup> Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp., Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschr. 27 (1928); Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929).

# Über das Verhalten der Abschnitte von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis.

Von

S. Lubelski in Warschau.

J. Wolff<sup>1)</sup> hat den merkwürdigen Satz gefunden:

Sind  $f_n(x)$  die Abschnitte einer Potenzreihe  $\sum_0^\infty a_n x^n$  mit dem Konvergenzradius 1 ( $f_n(x) = \sum_0^n a_n x^n$ ), und sind  $b_n$  die Koeffizienten einer Potenzreihe  $\sum_{n=0}^\infty b_n x^n$ , deren Konvergenzradius  $\geq 1$  ist, so liegen in jedem Kreise um  $x = 1$  Wurzeln unendlich vieler Gleichungen  $f_n(x) = b_n$ .

Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren Ergebnis, das einen tieferen Einblick in das Verhalten der Abschnitte auf dem Konvergenzkreis vermittelt. Wir werden nämlich den folgenden Satz zeigen:

Sei  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1, deren Abschnitte mit  $s_n(z)$  bezeichnet werden sollen; sei ferner  $\varphi_n(z)$  eine Folge von Funktionen, die in einer Umgebung eines Punktes  $P$  des Einheitskreises holomorph sind und der Ungleichung

$$(1) \quad \limsup \sqrt[n]{\max |\varphi_n(z)|} \leq 1$$

genügen, und von denen außerdem keine Teilfolge die Funktion  $f(z)$  in einem Teilgebiete des Einheitskreises zur Grenze hat.

Ist dann eine Teilfolge von Abschnitten  $s_{n_k}(z)$  so beschaffen, daß die Funktionen  $s_{n_k}(z) - \varphi_{n_k}(z)$  in einer Umgebung des Punktes  $P$  eine gleichmäßig beschränkte Anzahl von Nullstellen haben, dann ist

$$\limsup \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < 1.$$

<sup>1)</sup> J. Wolff, Sur une généralisation d'un théorème de R. Jentzsch. C. R. 184 (1927), S. 795—798.

Beweis. Da die Zahl der Nullpunkte von  $s_{n_k}(z) - \varphi_{n_k}(z)$  gleichmäßig beschränkt ist, so existiert eine Zahl  $g$  derart, daß von einem  $n_k$  ab die Funktionen der Folge  $s_{n_k}(z) - \varphi_{n_k}(z)$  in einem Kreise  $K$  um  $P$  analytisch sind und höchstens  $g$  Nullpunkte haben. Wir konstruieren jetzt  $2g + 2$  konzentrische, in  $K$  gelegene Kreise

$$K_1, K_2, K_3, \dots, K_{2g+2}.$$

Wir haben also  $2g + 1$  Kreisringe

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_{2g+1}$$

um  $P$ . Die Folge  $s_{n_k}(z) - \varphi_{n_k}(z)$  zerfällt dadurch in höchstens  $2g + 1$  Unterfolgen

$$s_{n_{k_v}}(z) - \varphi_{n_{k_v}}(z) \quad (v = 1, 2, \dots, 2g + 1),$$

so daß jede Funktion einer Unterfolge in einem gewissen für diese charakteristischen Ring  $R_v$  keine Nullpunkte hat. In dem abgeschlossenen Ringe  $R_v$  sind also die Funktionen der Folge

$$(2) \quad \sqrt[n_{k_v}]{s_{n_{k_v}}(z) - \varphi_{n_{k_v}}(z)}$$

analytisch, und wenn der Ring mit einem Querschnitt versehen wird, sind sie auch eindeutig. Dabei ist für die Wurzel eine beliebige Determination zu wählen. Demnach bilden die Funktionen (2) in einem gewissen Kreise um  $P$ , wo  $\varphi_n(z)$  analytisch und eindeutig sind, eine gleichmäßig beschränkte Folge. Denn sind  $r$  und  $R$  zwei beliebige Zahlen, für welche  $r < 1 < R$ , und ist

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| < M,$$

wo  $M$  eine konstante Zahl ist, so ist

$$|a_t| \leq \frac{M}{r^t} \quad (t = 1, 2, \dots)$$

und

$$(3) \quad |s_{n_{k_v}}(z)| < M \left( 1 + \frac{R}{r} + \dots + \left( \frac{R}{r} \right)^{n_{k_v}} \right) < \frac{MR}{R-r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n_{k_v}}.$$

Gemäß Voraussetzung (1) des Satzes können wir annehmen, daß von einem  $n_{k_v}$  ab in einer Umgebung des Punktes  $P$  desgleichen auch

$$|\varphi_{n_{k_v}}(z)| < \frac{MR}{R-r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n_{k_v}}$$

ist, und somit ist in dieser Umgebung

$$(3') \quad |s_{n_{k_v}}(z) - \varphi_{n_{k_v}}(z)| < \frac{2MR}{R-r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n_{k_v}}.$$



Nehmen wir an, daß  $\limsup \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1$ , so existiert eine Unterfolge  $\sqrt[n_{k_v}]{|a_{n_{k_v}}|}$ , für welche  $\lim \sqrt[k_v]{|a_{n_{k_v}}|} = 1$  ist. Nun existiert eine Unterfolge

$$(4) \quad s_{n_{k_v}}(z) - \varphi_{n_{k_v}}(z) = s_N(z) - \varphi_N(z),$$

wo  $N$  eine gewisse Folge natürlicher Zahlen durchläuft, mit der Eigenschaft, daß für jedes zum (ähnlich wie vorher gebildeten) Ring  $R_v$  gehörige  $z$  die Relation

$$(5) \quad \lim \sqrt[N]{s_N(z) - \varphi_N(z)} = c$$

besteht, wo  $c$  eine gewisse konstante Zahl mit  $|c| = 1$  ist. Denn der Relation (3') gemäß ist die Folge (2) in einer Umgebung des Punktes  $P$  normal, also existiert eine Unterfolge, z. B. die  $N$ -ten Wurzeln von (4), welche in jedem abgeschlossenen Untergebiete des Ringes  $R_v$  gleichmäßig konvergiert. Für die Funktion  $\psi(z)$ , wo

$$\psi(z) = \lim \sqrt[N]{s_N(z) - \varphi_N(z)},$$

ist identisch  $|\psi(z)| \equiv 1$ . Dies ergibt sich folgendermaßen: für jedes  $z$  ist entweder

$$\limsup \sqrt[N]{|s_N(z) - \varphi_N(z)|} \leq \limsup \sqrt[N]{|s_N(z)|}$$

oder

$$\limsup \sqrt[N]{|s_N(z) - \varphi_N(z)|} \leq \limsup \sqrt[N]{|\varphi_N(z)|},$$

und wir haben in allen Punkten des Ringes  $R_v$ , welche zu einem abgeschlossenen Untergebiet des Einheitskreises gehören, gemäß der Relation (3), in der hier  $R < r$  zu setzen ist,

$$\limsup \sqrt[N]{|s_N(z) - \varphi_N(z)|} \leq 1.$$

Ist  $|\psi(z)| \neq 1$ , so kann höchstens auf einer nirgends dichten Menge  $|\psi(z)| = 1$  sein, mithin ist in einem Teilgebiete, welches zum Einheitskreise gehört:

$$\lim (s_N(z) - \varphi_N(z)) = 0; \quad \lim \varphi_N(z) = f(z),$$

was der Annahme widerspricht. Die Funktion  $\psi(z)$  ist also in einem Teilgebiete des Ringes  $R_v$  und demnach auch, dem Vitalischen Satze gemäß, in diesem ganzen Ringe konstant, wobei identisch  $|\psi(z)| \equiv 1$  ist.

Wir schneiden jetzt den Kreis  $K_{v+1}$  mit einem zum Einheitskreise konzentrischen Kreis  $K'$ , dessen Radius kleiner als 1 ist, dabei soll das Maß der Summe der Gebiete von  $K_{v+1}$  und  $K'$  größer als  $\pi$  sein. Selbst-

verständlich ist dies möglich. Der Rand des Summengebietes ist eine abgeschlossene Kurve  $\Gamma$  („Summe“ zweier Kreisbogen). Nun sind die Abschnitte  $s_N(z)$  auf dem Teil  $\Gamma_1$  der Kurve  $\Gamma$ , welcher innerhalb des Einheitskreises liegt, gleichmäßig beschränkt. Es gibt also eine konstante Zahl  $A$ , so daß  $|s_N(z)| < A$  auf  $\Gamma_1$ . Wir definieren jetzt eine Zahl  $J_{N_t}$  mittelst der Relation

$$J_{N_t} = \text{Max} (2A, 2 \text{Max}_{\text{im Ringe } R_v} |s_{N_t}(z)|).$$

Da entweder

$$\limsup_{\text{im Ringe } R_v} \sqrt[N_t]{\text{Max} |s_{N_t}(z)|} \leq \limsup \sqrt[N_t]{|s_{N_t}(z_{N_t}) - \varphi_{N_t}(z_{N_t})|}$$

oder

$$\limsup_{\text{im Ringe } R_v} \sqrt[N_t]{\text{Max} |s_{N_t}(z)|} \leq \limsup \sqrt[N_t]{|\varphi_{N_t}(z_{N_t})|},$$

wo

$$\text{Max}_{\text{im Ringe } R_v} |s_{N_t}(z)| = |s_{N_t}(z_{N_t})|,$$

und da die Folge (5) gleichmäßig gegen eine konstante Zahl konvergiert, so ergibt sich zusammenfassend

$$\limsup \sqrt[N_t]{J_{N_t}} \leq 1.$$

Wir bilden jetzt die Tschebyscheffschen Polynome  $T_n(z)$  der Kurve  $\Gamma^2$ . Auf der Kurve  $\Gamma$  ist also

$$|a_{N_t}| \text{Max} |T_{N_t}(z)| \leq |a_{N_t}| \text{Max} \left| \frac{s_{N_t}(z)}{a_{N_t}} \right| \leq J_{N_t}.$$

Hieraus folgt

$$\limsup \sqrt[N_t]{|a_{N_t}|} \leq \limsup \frac{\sqrt[N_t]{J_{N_t}}}{\sqrt[N_t]{\text{Max} |T_{N_t}(z)|}} \leq \frac{1}{\liminf \sqrt[N_t]{\text{Max} |T_{N_t}(z)|}}.$$

Einem Faberschen Satze gemäß <sup>2)</sup> ist

$$\liminf \sqrt[n]{\text{Max} |T_n(z)|} \geq \varrho,$$

wo  $\varrho$  der äußere Radius der konformen und schlichten Abbildung ist, d. h. der Radius des Kreises, den man erhält, wenn man das Äußere einer abgeschlossenen Kurve auf das Äußere eines Kreises konform und

<sup>2)</sup> G. Faber, Potentialtheorie und konforme Abbildung. Sitzungsber. d. Math.-phys. Kl. d. Bayr. Akad. (1920), S. 49–64, bes. § 3.

schlicht abbildet (die Vergrößerung im unendlich fernen Punkt sei hierbei gleich 1). Es ergibt sich also

$$\limsup_{N_t} \sqrt[N_t]{|a_{N_t}|} \leq \frac{1}{\varrho}.$$

Aus einem Bieberbach-Faberschen Satze<sup>3)</sup>, welcher lautet

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \leq r_a,$$

wo  $\omega$  der Flächeninhalt von  $\Gamma$  und  $r_a = \varrho$  der äußere Radius ist, folgt

$$\varrho > 1.$$

Wir haben also einen Widerspruch mit der Voraussetzung  $\lim_{N_t} \sqrt[N_t]{|a_{N_t}|} = 1$  erhalten. Unser Satz ist damit bewiesen.

Der eingangs zitierte Satz von Wolff folgt aus dem unserigen, wenn die  $\varphi_n(z)$  Konstante  $b_n$  ( $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1$ ) sind und *sämtliche* Abschnitte von  $f(z)$  behandelt werden. Aber unser Satz besagt auch in diesem Falle wesentlich mehr, als Wolff gefunden hatte, denn er behauptet die Existenz einer unbeschränkten Anzahl von Nullstellen der Gleichungen

$$s_n(b) = b_n.$$

<sup>3)</sup> L. Bieberbach, Berl. Ber. 1916, S. 946, und Faber, a. a. O., § 3; auch Pólya-Szegő, Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 2, IV. Abschn., Aufg. 126, S. 22 und 195.

## Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. I\*).

Von

Georg Aumann in München.

1. Einleitung. Erzeugt man ausgehend von einem Paar positiver Zahlen durch Bildung des arithmetischen und des harmonischen Mittels ein neues solches Zahlenpaar, macht dann mit diesem Zahlenpaar wieder dasselbe, usw., so konvergiert die auf diese Weise entstehende Zahlenpaarfolge gegen einen einzigen Grenzwert, das geometrische Mittel der ursprünglichen Zahlen. Diese Tatsache wurde bereits von Heron zur Berechnung von Quadratwurzeln verwendet<sup>1)</sup>. Entsprechend lassen sich allgemein zwei Mittel von je zwei Argumenten ( $n$  Mittel von je  $n$  Argumenten) „mischen“; wenn der betreffende Algorithmus konvergiert, dann liefert er ein neues Mittel von zwei (bzw. von  $n$ ) Argumenten. Hierüber gibt es zahlreiche Untersuchungen. Dagegen ist mir in der Literatur noch nichts begegnet, wo die Aufgabe behandelt wäre, aus einem vorgegebenen Mittel von  $n$  Argumenten etwa ein Mittel von  $n + 1$  Argumenten durch einen ähnlichen Algorithmus zu erzeugen. In der vorliegenden Arbeit wird ein solcher Algorithmus besprochen; ich werde ihn die *Erhöhung eines Mittels* nennen. Er besteht kurz in folgendem: Vorgegeben sei ein Mittel  $M$  von  $n$  symmetrischen Argumenten und ein System von  $n + 1$  Zahlen; man leitet hieraus ein neues System von  $n + 1$  Zahlen ab, indem man von je  $n$  der gegebenen Zahlen vermöge  $M$  den Mittelwert bildet. Mit den so erhaltenen  $n + 1$  Zahlen verfährt man nun wieder genau so wie eben, usw. Unter geeigneten Voraussetzungen über  $M$  ist dieser Algorithmus konvergent und bestimmt einen Grenzwert  $M'$ , der eine Funktion der ursprünglich gegebenen  $n + 1$  Zahlen ist und den ich das *Obermittel* von  $M$  nenne. Man wird vernünftigerweise

\*) Habilitationsschrift, Technische Hochschule, München 1933.

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Z. Chajoth, Heronische Näherungsbrüche, Jahresber. d. D. M. V. 42 (1932), S. 130.

von dieser Erhöhung verlangen müssen, daß sie etwa bei der Anwendung auf das arithmetische Mittel  $A_n$  von  $n$  Argumenten als zugehöriges Obermittel das arithmetische Mittel  $A_{n+1}$  von  $n+1$  Argumenten liefert. Dies ist tatsächlich der Fall, und zwar gilt das Analoge auch für das geometrische, das harmonische Mittel von mehreren Argumenten und für manches andere bekannte.

Die Verwendung des Begriffs des Obermittels scheint mir für den Aufbau von Mittelwerten viel sachgemäßer und einfacher als die bisher verfolgte Methode, bei der ein durchwegs umfangreiches System von funktionalen Beziehungen postuliert wird<sup>3)</sup>. Um z. B. das System der arithmetischen Mittel  $A_3, A_4, A_5, \dots$  eindeutig zu charakterisieren, genügt es,  $A_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  zu setzen und zu verlangen, daß  $A_{n+1}$  das Obermittel von  $A_n$  ist ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

In 2. wird auseinandergesetzt, was im folgenden als „Mittel“ zu gelten hat, in 3. die Abbildung von Mitteln besprochen, die zum Begriff des Bildmittels führt, in 4. und 5. wird der Erhöhungsalgorithmus beschrieben, seine Konvergenz nachgewiesen und gezeigt, daß er ein „Mittel“ liefert mit einem Argument mehr, das Obermittel; dieses ist mit dem ursprünglichen Mittel durch eine Funktionalgleichung gekoppelt, welche für das Obermittel charakteristisch ist, d. h. es eindeutig bestimmt (Satz 1 in 6.). 7. bringt die Durchführung des Erhöhungsalgorithmus für zwei einfache Beispiele, insbesondere für das arithmetische Mittel. In 8. beweise ich, daß die Prozesse Erhöhung und Abbildung vertauschbar sind, d. h. daß das Obermittel des Bildmittels identisch ist mit dem Bildmittel des Obermittels (Sätze 2 und 2a). 9. bespricht den Aufbau von Mittelwerten. In 10. und 11. beschäftige ich mich mit Ungleichungen zwischen Mittelwerten; ich beweise, daß ein im Vergleich zu einem anderen Mittel größeres Mittel<sup>3)</sup> auch ein größeres Obermittel hat (Sätze 3, 4, 3a, 4a). Als Anwendung von Satz 4 folgt z. B. die Ungleichung

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

wobei nicht alle  $x$ , einander gleich sind (aber alle positiv), ohne jede Rechnung durch direkte Induktion von  $n-1$  auf  $n$ ; wir fügen damit zu

<sup>3)</sup> E. V. Huntington. Sets of independent postulates for the arithmetic mean, ..., Trans. of the Amer. Math. Soc. 29 (1927), S. 1.

<sup>3)</sup> Z. B. ist für positive Zahlen  $x_1 \neq x_2$  das arithmetische Mittel  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  größer als das geometrische  $\sqrt{x_1 x_2}$ .

den bekannten Beweisen für diese Ungleichung einen neuartigen hinzu<sup>4)</sup>. Unter Zugrundelegung einer naheliegenden Verallgemeinerung der Jensenschen Definition einer *konvexen Funktion*<sup>5)</sup> können die letztgenannten Sätze anders formuliert werden; dabei ergibt sich eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von Jensen (Satz 5 in 11.). In 12. komme ich kurz auf eine Klassifikation der Mittelwerte mehrerer Argumente zu sprechen. Ich zeige an einfachen Beispielen, daß es Mittel von mehr als zwei Argumenten gibt, die *primitiv* sind, d. h. die nicht das Obermittel eines Mittels von weniger Argumenten sind.

2. Definition. Die reelle Funktion  $M(x_1, \dots, x_n)$  von  $n$  ( $n \geq 2$ ) reellen Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  heiße im Bereich

$$(2, 1) \quad a \leq x_v \leq b \quad (v = 1, \dots, n)$$

ein *Mittel* von  $x_1, \dots, x_n$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I)  $M(x_1, \dots, x_n)$  ist *eindeutig*, in allen Argumenten *stetig* und *symmetrisch*.

(II) Es gibt eine positive Zahl  $\varrho$  derart, daß für  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

$$x_n - M(x_1, \dots, x_n) \geq \varrho(x_n - x_1),$$

$$M(x_1, \dots, x_n) - x_1 \geq \varrho(x_n - x_1).$$

(III) Für  $x, \leq x'_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ) ist

$$M(x_1, \dots, x_n) \leq M(x'_1, \dots, x'_n).$$

Folgerungen. Wegen der Symmetrie kann man statt (II) auch schreiben, wobei die Argumente  $(x_1, \dots, x_n)$  bei *max*, *min*,  $M$  weggelassen sind:

$$\max - M \geq \varrho(\max - \min),$$

$$M - \min \geq \varrho(\max - \min).$$

Hieraus folgt für den Fall, daß nicht alle  $x$ , einander gleich sind, die typische Mittelwerteigenschaft:

$$(2, 2) \quad \min(x_1, \dots, x_n) < M(x_1, \dots, x_n) < \max(x_1, \dots, x_n),$$

und für den Fall, daß alle  $x$ , einander gleich:

$$(2, 3) \quad M(x, \dots, x) = x.$$

<sup>4)</sup> Solche Beweise stehen u. a. bei: Cauchy, *Analyse algébrique*, Note II. J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta math. 30 (1906), S. 175. G. H. Hardy, *Prolegomena to a Chapter on Inequalities*, Journ. of Lond. Math. Soc. 4 (1929), S. 61. Der Cauchysche Beweis ist auch bei Chajoth (l. c.) wiedergegeben; er besteht aus zwei Induktionen: 1. Induktion von  $n = 2^m$  auf  $n' = 2^{m+1}$ ; 2. Rückinduktion von  $n$  auf  $n-1$ .

<sup>5)</sup> Siehe Jensen, l. c.

Weiter gilt:

$$(2, 4) \quad \begin{cases} \text{Wenn } |x_v - x| < \varepsilon \quad (v = 1, \dots, n), \\ \text{dann } |M(x_1, \dots, x_n) - x| < \varepsilon. \end{cases}$$

In der Tat: wenn alle  $x_v$  einander gleich sind, dann ist wegen (2, 3) die Behauptung trivial. Sind aber nicht alle  $x_v$  einander gleich, dann ist nach (2, 2):

$$M(x_1, \dots, x_n) < \max(x_1, \dots, x_n) < x + \varepsilon,$$

$$M(x_1, \dots, x_n) > \min(x_1, \dots, x_n) > x - \varepsilon;$$

beide Ungleichungen zusammen machen die Behauptung von (2, 4) aus. Aus (II) folgt  $\varrho \leq \frac{1}{2}$ . Ist  $\varrho = \frac{1}{2}$ , dann ist  $M(x_1, \dots, x_n)$  von der Form  $M^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(\max(x_1, \dots, x_n) + \min(x_1, \dots, x_n))$ .

3. Reguläre Abbildung eines Mittels. Definition. Die eindeutige Abbildung  $\xi = \varphi(x)$  des Intervalls  $a \leq x \leq b$  auf das Intervall  $\varphi(a) = \alpha \leq \xi \leq \beta = \varphi(b)$  heiße *regulär*, wenn es eine positive Zahl  $\sigma$  gibt, derart, daß für  $a \leq x' < x'' \leq b$  stets

$$\frac{1}{\sigma} \geq \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} \geq \sigma.$$

Jede reguläre Abbildung ist eineindeutig und umkehrbar stetig; auch die Umkehrungsabbildung ist regulär, und zwar mit derselben Zahl  $\sigma$ . Ebenso ist die Zusammensetzung von zwei regulären Abbildungen wieder regulär. Sei nun  $\xi = \varphi(x)$  eine reguläre Abbildung des Intervalls  $a \leq x \leq b$  auf das Intervall  $\alpha \leq \xi \leq \beta$ , und  $x = f(\xi)$  die Umkehrfunktion. Ist dann  $M(x_1, \dots, x_n)$  ein Mittel im Bereich (2, 1), dann nenne ich die Funktion

$$(3, 1) \quad M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi(M(f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)))$$

das durch die Abbildung  $\xi = \varphi(x)$  aus  $M(x_1, \dots, x_n)$  erzeugte Mittel, kurz das *Bildmittel*  $M_\varphi$  von  $M$ . Es ist leicht zu zeigen, daß im Bereich

$$\alpha \leq \xi_v \leq \beta \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

$M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  die Eigenschaften (I), (II), (III) erfüllt. Was (I) und (III) anlangt, so ist das Behauptete augenscheinlich. Bezüglich (II) ist zu bemerken:

Wegen  $M_\varphi(\xi, \dots, \xi) = \xi$  ist (II) offenbar für den Fall erfüllt, daß alle  $\xi_v$  einander gleich sind. Im anderen Falle sei  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$  und  $\xi_1 < \xi_n$  und  $f(\xi_v) = x_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ). Dann ist

$$\begin{aligned} & \xi_n - M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \frac{\varphi(x_n) - \varphi(M(x_1, \dots, x_n))}{x_n - M(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{x_n - M(x_1, \dots, x_n)}{x_n - x_1} \cdot \frac{f(\xi_n) - f(\xi_1)}{\xi_n - \xi_1} (\xi_n - \xi_1) \\ &\geq \sigma \cdot \varrho \cdot \sigma (\xi_n - \xi_1) = \varrho' (\xi_n - \xi_1), \end{aligned}$$



wobei

$$\varrho' = \sigma^2 \varrho > 0.$$

Genau so zeigt man unter der obigen Voraussetzung

$$M_{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) - \xi_1 \geq \varrho'(\xi_n - \xi_1).$$

Daher erfüllt  $M_{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  die Eigenschaft (II) mit der Zahl  $\varrho'$ . Zum Beispiel lassen sich aus dem arithmetischen Mittel

$$(3, 2) \quad A_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

viele bekannte Mittel, wie das harmonische, das geometrische, das quadratische  $\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$  usw., in geeigneten Intervallen durch reguläre Abbildung gewinnen.

4. Erhöhung eines Mittels. Wir behandeln hier einen iterativen Algorithmus, mit welchem aus einem Mittel von  $n$  Argumenten ein Mittel von  $n+1$  Argumenten erzeugt werden kann. Sei  $M(x_1, \dots, x_n)$  ein Mittel im Bereich  $(2, 1)$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  seien  $n+1$  Zahlen mit

$$(4, 1) \quad a \leq y_{\mu} \leq b \quad (\mu = 1, 2, \dots, n+1).$$

Schreibt man diese Zahlen  $y_{\mu}$  der Größe nach an, so erhält man:

$$(4, 2) \quad y_{0,1} \leq y_{0,2} \leq \dots \leq y_{0,n+1}.$$

Nun bilde ich in folgender Weise  $n+1$  neue Zahlen:

$$y_{1,1} = M(y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n}),$$

$$y_{1,n+2-\mu} = M(y_{0,1}, \dots, y_{0,\mu-1}, y_{0,\mu+1}, \dots, y_{0,n+1}) \quad (\mu = 2, 3, \dots, n),$$

$$y_{1,n+1} = M(y_{0,2}, y_{0,3}, \dots, y_{0,n+1}).$$

Wegen (4, 2) und der Eigenschaft (III) von  $M$  ist wiederum:

$$y_{1,1} \leq y_{1,2} \leq \dots \leq y_{1,n+1}.$$

Dieses Verfahren setzt man fort:

$$(4, 3) \quad \begin{cases} y_{\lambda+1,1} = M(y_{\lambda,1}, y_{\lambda,2}, \dots, y_{\lambda,n}), \\ y_{\lambda+1,n+2-\mu} = M(y_{\lambda,1}, \dots, y_{\lambda,\mu-1}, y_{\lambda,\mu+1}, \dots, y_{\lambda,n+1}), \\ y_{\lambda+1,n+1} = M(y_{\lambda,2}, y_{\lambda,3}, \dots, y_{\lambda,n+1}), \end{cases} \quad (\mu = 2, 3, \dots, n),$$

wobei  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ , und für jedes  $\lambda$  gilt:

$$(4, 4) \quad a < y_{\lambda,1} \leq y_{\lambda,2} \leq \dots \leq y_{\lambda,n+1} < b.$$

Ich werde nun zeigen, daß

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda,\mu}$$

existiert und von  $\mu$  unabhängig ist. Würde man übrigens den durch (4, 3) beschriebenen Algorithmus durchführen, ohne die Ordnung (4, 2) vorher hergestellt zu haben, indem man aus den  $n+1$  Zahlen  $y_\mu$  jeweilig für  $n$  von ihnen vermöge der Funktion  $M$  das Mittel bildet, so ergäben sich nach dem  $\lambda$ -ten Schritt, abgesehen von der Reihenfolge, ebenfalls die Zahlen  $y_{\lambda, \mu}$ . Die Ordnung, wie sie durch (4, 2) und (4, 3) eingehalten wird, ist daher unwesentlich; für das Nachfolgende ist sie aber bequem.

Für den Fall, daß alle  $y_\mu$  einander gleich sind, ist die obige Behauptung evident; denn dann sind wegen (2, 3) alle  $y_{\lambda, \mu}$  einander gleich ( $\mu = 1, \dots, n+1$ ;  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ ). Im anderen Falle ist  $y_{0,1} < y_{0,n+1}$ . Nach (4, 3), (4, 4), (2, 2) ist

$$y_{\lambda+1,1} = M(y_{\lambda,1}, y_{\lambda,2}, \dots, y_{\lambda,n}) \geq y_{\lambda,1};$$

entsprechend folgt

$$y_{\lambda+1,n+1} \leq y_{\lambda,n+1}.$$

Man hat also

$$(4, 5) \quad y_{0,1} \leq y_{1,1} \leq y_{2,1} \leq \dots \leq y_{\lambda,n+1} \leq y_{\lambda+1,n+1} \leq y_{0,n+1}.$$

Weiter ist nach (II)

$$y_{\lambda+1,1} - y_{\lambda,1} = M(y_{\lambda,1}, \dots, y_{\lambda,n}) - y_{\lambda,1} \geq \varrho(y_{\lambda,n} - y_{\lambda,1}),$$

$$y_{\lambda,n+1} - y_{\lambda+1,n+1} = y_{\lambda,n+1} - M(y_{\lambda,2}, \dots, y_{\lambda,n+1}) \geq \varrho(y_{\lambda,n+1} - y_{\lambda,2}).$$

Durch Addition dieser Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} (1-\varrho)(y_{\lambda,n+1} - y_{\lambda,1}) &\geq \varrho(y_{\lambda,n} - y_{\lambda,2}) + (y_{\lambda+1,n+1} - y_{\lambda+1,1}) \\ &\geq y_{\lambda+1,n+1} - y_{\lambda+1,1}. \end{aligned}$$

Wegen  $0 < 1-\varrho < 1$  folgt hieraus

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (y_{\lambda,n+1} - y_{\lambda,1}) = 0,$$

was mit (4, 5) zusammen die Behauptung ergibt. Wir können daher setzen

$$(4, 6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda, \mu} = M'(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

5. Nun zeigen wir, daß die durch (4, 6) erklärte Funktion  $M'(y_1, \dots, y_{n+1})$  die (I), (II), (III) entsprechenden Eigenschaften (I)<sub>1</sub>, (II)<sub>1</sub>, (III)<sub>1</sub> für  $n+1$  Argumente besitzt, also in unserer Sprache im Bereich (4, 1) ein Mittel von  $n+1$  Argumenten darstellt.

Die Eindeutigkeit von  $M'$  ist nach dem Vorausgehenden klar. Ebenso die Symmetrie; denn sind  $z_1, \dots, z_{n+1}$  die Zahlen  $y_1, \dots, y_{n+1}$  nur in anderer Reihenfolge, so gilt gemäß (4, 2) doch wieder

$$z_{0,\mu} = y_{0,\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n+1).$$

Wir kommen zum Nachweis der Stetigkeit von  $M'$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen der in 4. bewiesenen Konvergenz von (4, 6) gibt es einen Index  $l$  derart, daß

$$(5, 1) \quad |y_{l,\mu} - M'(y_1, \dots, y_{n+1})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\mu = 1, \dots, n+1);$$

dabei ist

$$y_{l,\mu} = F_\mu(y_{0,1}, \dots, y_{0,n+1})$$

und  $F_\mu$  eine Funktion, welche aus der Funktion  $M$  durch  $l$ -malige Ineinanderschachtelung hervorgeht, wegen (I) also eine stetige Funktion ist. Führt man nun für andere Zahlen  $z_1, \dots, z_{n+1}$  denselben Algorithmus durch wie für  $y_1, \dots, y_{n+1}$  in 4., so erhält man gewisse Zahlen  $z_{l,\mu}$ , insbesondere

$$z_{l,\mu} = F_\mu(z_{0,1}, \dots, z_{0,n+1}),$$

mit denselben Funktionen  $F_\mu$  wie oben.

Wegen der Stetigkeit der Funktionen  $F_\mu$  kann man ein  $\delta > 0$  angeben, so daß für jedes System  $z_1, \dots, z_{n+1}$ , welches den Ungleichungen

$$(5, 2) \quad |z_\mu - y_\mu| < \delta \quad (\mu = 1, \dots, n+1)$$

genügt<sup>a)</sup>, gilt:

$$|F_\mu(z_{0,1}, \dots, z_{0,n+1}) - F_\mu(y_{0,1}, \dots, y_{0,n+1})| < \frac{\varepsilon}{2},$$

oder

$$(5, 3) \quad |z_{l,\mu} - y_{l,\mu}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\mu = 1, \dots, n+1).$$

Aus (5, 1), (5, 3) folgt

$$|z_{l,\mu} - M'(y_1, \dots, y_{n+1})| < \varepsilon,$$

hieraus mit (2, 4) und (4, 3) ( $z$  statt  $y$ ,  $l$  statt  $\lambda$ ):

$$|z_{l+1,\mu} - M'(y_1, \dots, y_{n+1})| < \varepsilon,$$

und durch Wiederholung dieses Schlusses allgemein

$$|z_{\lambda,\mu} - M'(y_1, \dots, y_{n+1})| < \varepsilon \quad \left( \begin{matrix} \mu = 1, \dots, n+1, \\ \lambda = l, l+1, l+2, \dots \end{matrix} \right).$$

Wegen  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} z_{\lambda,\mu} = M'(z_1, \dots, z_{n+1})$  folgt dann aus der letzten Ungleichung

$$|M'(z_1, \dots, z_{n+1}) - M'(y_1, \dots, y_{n+1})| \leq \varepsilon;$$

dies gilt, sobald (5, 2) besteht. Damit ist die Stetigkeit von  $M'$  und daher auch das Bestehen der Eigenschaft (I)<sub>1</sub> nachgewiesen. Ehe wir den Nachweis von (II)<sub>1</sub> erbringen, wollen wir uns vom Bestehen der Eigen-

<sup>a)</sup> Dann besteht auch:  $|z_{0,\mu} - y_{0,\mu}| < \delta \quad (\mu = 1, \dots, n+1).$

schaft (III)<sub>1</sub> überzeugen. Sei  $y_\mu \leq y'_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n+1$ ). Dann gilt offenbar gemäß der Ordnung durch (4, 2)

$$y_{0,\mu} \leq y'_{0,\mu}.$$

Nach (4, 3) und (III) ist dann

$$y_{1,\mu} \leq y'_{1,\mu},$$

allgemein durch Wiederholung dieser Schlußweise

$$y_{\lambda,\mu} \leq y'_{\lambda,\mu} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

und schließlich in der Grenze

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) \leq M'(y'_1, \dots, y'_{n+1});$$

also gilt (III)<sub>1</sub>. Nun kommen wir zur Eigenschaft (II)<sub>1</sub>. Sei

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+1},$$

also

$$y_{0,\mu} = y_\mu \quad (\mu = 1, \dots, n+1).$$

Dann setze ich

$$z_1 = y_1, z_2 = z_3 = \dots = z_{n+1} = y_{n+1},$$

und es ist

$$z_{0,\mu} = z_\mu, y_{0,\mu} \leq z_{0,\mu} \quad (\mu = 1, \dots, n+1).$$

Wegen des bereits nachgewiesenen Bestehens von (III)<sub>1</sub> ist daher

$$y_{n+1} - M'(y_1, \dots, y_{n+1}) \geq z_{n+1} - M'(z_1, \dots, z_{n+1}) \geq z_{n+1} - z_{2,n+1},$$

wegen (4, 5), (4, 6) ist nämlich

$$z_{2,n+1} \geq M'(z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Nun ist

$$z_{1,1} = z_{1,2} = \dots = z_{1,n} = M(y_1, y_{n+1}, \dots, y_{n+1}) = u, z_{1,n+1} = z_{n+1},$$

$$z_{2,1} = u, z_{2,2} = z_{2,3} = \dots = z_{2,n+1} = M(u, \dots, u, z_{n+1}).$$

Anwendung von (II) ergibt sodann

$$z_{n+1} - z_{2,n+1} \geq \varrho(z_{n+1} - u) = \varrho(y_{n+1} - u),$$

$$y_{n+1} - u \geq \varrho(y_{n+1} - y_1).$$

Aus den letzten drei Ungleichungen zusammen folgt

$$y_{n+1} - M'(y_1, \dots, y_{n+1}) \geq \varrho^2(y_{n+1} - y_1);$$

ganz entsprechend beweist man die Ungleichung

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) - y_1 \geq \varrho^2(y_{n+1} - y_1).$$

Damit ist die Existenz einer in (II)<sub>1</sub> geforderten positiven Zahl (wir bezeichnen eine solche mit  $\varrho_1$ ) nachgewiesen: wir brauchen nur  $\varrho_1 = \varrho^2$  zu setzen.

6. Das aus  $M(x_1, \dots, x_n)$  abgeleitete Mittel  $M'(y_1, \dots, y_{n+1})$  nenne ich das *Obermittel des Mittels*  $M$ ; den durch (4, 3) beschriebenen iterativen Algorithmus die *Erhöhung des Mittels*  $M$ . Benutzen wir die Bezeichnungen von 4., so sehen wir unmittelbar, daß die Beziehungen gelten:

$$(6, 1) \quad M'(y_1, \dots, y_{n+1}) = M'(y_{\lambda, 1}, \dots, y_{\lambda, n+1}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Diese stellen offenbar Funktionalgleichungen zwischen dem Mittel  $M$  und seinem Obermittel  $M'$  dar; für  $\lambda = 1$  erhält man mit Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse die folgende *Funktionalgleichung*:

$$(6, 2) \quad \begin{aligned} & M'(y_1, \dots, y_{n+1}) \\ &= M'(M(y_1, \dots, y_{n+1}), M(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}), \dots, M(y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

aus der auch die Gleichungen (6, 1) wieder abgeleitet werden können. Die Funktionalgleichung (6, 2) ist typisch für den Erhöhungsalgorithmus. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, bei gegebenem Mittel  $M(x_1, \dots, x_n)$  ein Mittel  $M'(y_1, \dots, y_{n+1})$  zu bestimmen, welches der Funktionalgleichung (6, 2) genügt, so wird man zwangsläufig auf den Erhöhungsalgorithmus geführt, der dann auch, wie wir gesehen haben, die gesuchte Funktion wirklich liefert. Damit haben wir den

Satz 1. *Es gibt genau eine Lösung der Funktionalgleichung (6, 2) bei gegebenem Mittel  $M(x_1, \dots, x_n)$ , die im Bereich (4, 1) ein Mittel darstellt. Diese Lösung, das Obermittel  $M'(y_1, \dots, y_{n+1})$  von  $M$ , wird durch den Erhöhungsalgorithmus geliefert.*

7. Sehen wir uns die Erhöhung des arithmetischen Mittels an. Sei  $A_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  und  $y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n+1}$  gegeben. Mit einer, wegen der bestehenden Symmetrie erlaubten, von 4. abweichenden Bezeichnungsweise setzen wir

$$y_{\lambda+1, \mu} = A_n(y_{\lambda, 1}, \dots, y_{\lambda, \mu-1}, y_{\lambda, \mu+1}, \dots, y_{\lambda, n+1})$$

oder mit der Bezeichnung  $s_\lambda = y_{\lambda, 1} + y_{\lambda, 2} + \dots + y_{\lambda, n+1}$

$$y_{\lambda+1, \mu} = \frac{1}{n}(s_\lambda - y_{\lambda, \mu}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Hieraus folgt sofort  $s_{\lambda+1} = s_\lambda$ , also

$$s_\lambda = s_0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Weil wir aber bereits wissen, daß die  $y_{\lambda, \mu}$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  einen gemeinsamen Grenzwert haben, ist dann  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda, \mu} = \frac{s_0}{n+1}$ . Eine einfache Rechnung liefert übrigens

$$y_{\lambda, \mu} = \frac{s_0}{n+1} \left( 1 - \left( \frac{-1}{n} \right)^\lambda \right) + \left( \frac{-1}{n} \right)^\lambda y_{0, \mu}.$$

woraus ebenfalls der gesuchte Grenzwert bestimmt werden kann. Es ist

$$[A_n]'(y_{0,1}, \dots, y_{0,n+1}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda,n} = \frac{a_0}{n+1} = A_{n+1}(y_{0,1}, \dots, y_{0,n+1}).$$

Wir haben das Ergebnis, daß das Obermittel des arithmetischen Mittels von  $n$  Argumenten das arithmetische Mittel von  $n+1$  Argumenten ist.

Noch für ein anderes Beispiel möchte ich die Erhöhung durchführen; einmal, weil ich davon später Gebrauch zu machen habe, das andere Mal wegen des Unterschieds in der Methode: Eben hatten wir bei der Bestimmung des Obermittels den Erhöhungsalgorithmus wirklich Schritt für Schritt durchgeführt und dann den Grenzwert bestimmt; jetzt wollen wir uns auf die Funktionalgleichung (6, 2) stützen.

Sei  $M(x_1, x_2)$  ein Mittel von zwei Argumenten im Bereich aller reellen Zahlen; für  $x_1 \leq x_2$  habe es den Wert

$$(7, 1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

wobei die Konstanten  $a_1, a_2$  positiv sind und

$$(7, 2) \quad a_1 + a_2 = 1$$

ist. Auf Grund der Symmetrieeigenschaft ist damit die Funktion  $M(x_1, x_2)$  eindeutig erklärt<sup>6a)</sup>. Es ist sehr leicht, für  $M(x_1, x_2)$  die Eigenschaften (I), (II), (III) nachzuprüfen. Um nun das Obermittel  $M'(y_1, y_2, y_3)$  von  $M(x_1, x_2)$  zu bestimmen, genügt es, den Wert von  $M'(y_1, y_2, y_3)$  für den Bereich  $y_1 \leq y_2 \leq y_3$  zu ermitteln, da ja  $M'$  nach 5. symmetrisch ist. Für diesen Bereich-machen wir den Ansatz

$$(7, 3) \quad M'(y_1, y_2, y_3) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3,$$

wobei wegen (II)<sub>1</sub>, (III)<sub>1</sub> die Konstanten  $b_1, b_2, b_3$  nicht negativ sind, und

$$(7, 4) \quad b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

ist. Damit gehen wir in die Funktionalgleichung (6, 2) ein; lassen sich dabei die  $b_\mu$  so bestimmen, daß diese Gleichung in den  $y_1, y_2, y_3$  identisch erfüllt ist, dann haben wir in (7, 3) wegen der in Satz 1 ausgesprochenen Eindeutigkeit das gesuchte Obermittel gefunden. Nach (7, 3), (6, 2), (7, 1) erhalten wir

$$\begin{aligned} & b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ & \equiv b_1(a_1 y_1 + a_2 y_2) + b_2(a_1 y_1 + a_2 y_3) + b_3(a_1 y_2 + a_2 y_3). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$(7, 5) \quad \begin{cases} b_1 = (b_1 + b_2) a_1, \\ b_2 = b_1 a_2 + b_3 a_1, \\ b_3 = (b_2 + b_3) a_2. \end{cases}$$

<sup>6a)</sup> Man kann schreiben:  $M(x_1, x_2) = a_1 \cdot \min(x_1, x_2) + a_2 \cdot \max(x_1, x_2)$ , wodurch die Symmetrie augenscheinlich wird.

Da die Gleichungen (7, 5) wegen (7, 2) nicht voneinander unabhängig sind, können wir die Bedingung (7, 4) auch erfüllen. Unter Benützung von (7, 2) findet man für die Auflösung der Gleichungen (7, 4), (7, 5):

$$b_1 = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}, \quad b_3 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}.$$

Für den Bereich  $y_1 \leq y_2 \leq y_3$  hat also das gesuchte Obermittel den Wert

$$(7, 6) \quad \frac{a_1^2 y_1 + a_1 a_2 y_2 + a_2^2 y_3}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}.$$

8. Wie sich die Erhöhung bei anderen bekannten Mitteln, die durch eine reguläre Abbildung  $\varphi$  aus dem arithmetischen Mittel hervorgehen, ausnimmt, darüber gibt hinreichenden Aufschluß

**Satz 2.** *Erhöhung und reguläre Abbildung sind vertauschbar.*

**Beweis.** Ist  $\xi = \varphi(x)$  eine reguläre Abbildung, so lautet mit den Bezeichnungen von 3. und 4. der zu beweisende Satz:

$$[M_\varphi]' = [M']_\varphi.$$

Ist nun  $x = f(\xi)$  die Umkehrungsabbildung, so ist

$$A = [M']_\varphi(\eta_{0,1}, \dots, \eta_{0,n+1}) = \varphi(M'(f(\eta_{0,1}), \dots, f(\eta_{0,n+1}))).$$

Setzt man

$$(8, 1) \quad f(\eta_{0,\mu}) = y_{0,\mu},$$

so folgt wegen der Stetigkeit von  $\varphi(x)$

$$(8, 2) \quad A = \varphi(M'(y_{0,1}, \dots, y_{0,n+1})) = \varphi(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda,\mu}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(y_{\lambda,\mu}),$$

worin die  $y_{\lambda,\mu}$  durch

$$(8, 3) \quad y_{\lambda+1,\mu} = M(y_{\lambda,1}, \dots, y_{\lambda,\mu-1}, y_{\lambda,\mu+1}, \dots, y_{\lambda,n+1})$$

rekursorisch definiert sind. Andererseits ist

$$(8, 4) \quad B = [M_\varphi]'(\eta_{0,1}, \dots, \eta_{0,n+1}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta_{\lambda,\mu},$$

wobei die  $\eta_{\lambda,\mu}$  durch

$$(8, 5) \quad \eta_{\lambda+1,\mu} = M_\varphi(\eta_{\lambda,1}, \dots, \eta_{\lambda,\mu-1}, \eta_{\lambda,\mu+1}, \dots, \eta_{\lambda,n+1})$$

bestimmt sind. Nun behaupte ich, daß

$$(8, 6) \quad \eta_{\lambda,\mu} = \varphi(y_{\lambda,\mu}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots)$$

gilt. In der Tat, für  $\lambda = 0$  ist die Behauptung mit (8, 1) identisch. Angenommen, für  $\lambda = l$  ( $l \geq 0$ ) sei (8, 6) schon bewiesen. Dann folgt aus (8, 5) für  $\lambda = l$

$$\eta_{l+1,\mu} = M_\varphi(\eta_{l,1}, \dots) = \varphi(M(f(\eta_{l,1}), \dots)) = \varphi(M(y_{l,1}, \dots)),$$



nach (8, 3) also mit  $\lambda = l$  die Gleichung

$$\eta_{i+1, \mu} = \varphi(y_{i+1, \mu}),$$

womit (8, 6) durch Induktion allgemein bewiesen ist. Aus (8, 4), (8, 6), (8, 2) ergibt sich dann die Behauptung  $B = A$  von Satz 2.

Schreibt man für das Obermittel  $[M']'$  des Obermittels  $M'$  von  $M$  kurz  $M''$ , und nennt dann  $M''$  das *zweite Obermittel* von  $M$ , allgemein  $M^{(k)}$  das *k-te Obermittel* von  $M$ , welches durch die Rekursion  $M^{(k)} = [M^{(k-1)}]'$  definiert ist, so folgt durch wiederholte Anwendung von Satz 2

Satz 2a. Das *k-te Obermittel des Bildmittels ist identisch mit dem Bildmittel des k-ten Obermittels*:  $[M_\varphi]^{(k)} = [M^{(k)}]_\varphi$ .

9. Um das System der arithmetischen Mittel  $A_2, A_3, A_4, \dots$  (siehe 7.) vollständig zu charakterisieren, genügt es nach den Ausführungen von 7. die Forderungen zu stellen:

A.  $A_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;

B.  $A_{k+1}$  ist das Obermittel von  $A_k$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ).

Dabei kann man das Obermittel als die gemäß Satz 1 wohlbestimmte Lösung der Funktionalgleichung (6, 2) definieren. In eine einfachere Gestalt läßt sich der Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente wohl nicht bringen; jedenfalls ist das durch den Begriff des Obermittels sich ergebende Aufbauprinzip viel sachgemäßer und einheitlicher als die bisher in Anwendung gekommene Aufbaumethode, bei der ein durchwegs umfangreiches System von funktionalen Beziehungen benutzt wird und die deshalb auf das arithmetische Mittel und einige seiner Bildmittel beschränkt ist<sup>3)</sup>. Dagegen ist durch unsere Methode das System der Mittel

$$M^{(0)}, M', M'', M^{(3)}, \dots \quad (M^{(0)} = M)$$

in dem Augenblick eindeutig festgelegt, wo das Grundmittel  $M$  die in 2. geforderten drei Eigenschaften besitzt; und es ist gewiß keine übertriebene Beschränkung, wenn man von einem Mittel  $M$  die Eigenschaften (I), (II) (III) voraussetzt.

10. Wir beschäftigen uns nun mit Ungleichungen zwischen Mittelwerten. Zur schärferen Unterscheidung nennen wir ein Mittel  $M(x_1, \dots, x_n)$  *streng monoton*, wenn es die folgende [die Eigenschaft (III) nach sich ziehende] Eigenschaft erfüllt:

(III)\*: Für  $x, \leq x'$  ( $v = 1, \dots, n$ ), wobei nicht alle  $x$ , einander gleich sind, gilt

$$M(x_1, \dots, x_n) < M(x'_1, \dots, x'_n).$$

Z. B. ist das arithmetische Mittel  $A_n$  streng monoton. Man sieht leicht ein, daß die strenge Monotonie bei einer regulären Abbildung erhalten bleibt; bei der Erhöhung eines Mittels ist dies nicht immer der Fall<sup>6b)</sup>.

Nun gelten die Sätze:

Satz 3. Seien  $M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N(x_1, \dots, x_n)$  zwei Mittel im selben Bereich und sei dort stets

$$M(x_1, \dots, x_n) \leq N(x_1, \dots, x_n).$$

Dann gilt im entsprechenden Bereich für die Obermittel stets

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) \leq N'(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Satz 4. Seien  $M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N(x_1, \dots, x_n)$  zwei Mittel im selben Bereich und sei dort immer, sofern nicht alle  $x$ , einander gleich sind,

$$M(x_1, \dots, x_n) < N(x_1, \dots, x_n).$$

Ist außerdem eines der Obermittel  $M'(y_1, \dots, y_{n+1})$ ,  $N'(y_1, \dots, y_{n+1})$  streng monoton, dann gilt auch im entsprechenden Bereich die Ungleichung

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) < N'(y_1, \dots, y_{n+1}),$$

sofern nicht alle  $y_\mu$  einander gleich sind.

Beweis von Satz 3. Sei  $y_1, \dots, y_{n+1}$  ein System im entsprechenden Bereich der Obermittel. Auf Grund der Voraussetzung gilt dann

$$y_{1,\mu}(M) \leq y_{1,\mu}(N) \quad (\mu = 1, \dots, n+1),$$

wobei die Anhängsel  $(M)$  bzw.  $(N)$  angeben, daß an den Zahlen  $y_\mu$  mittels der Mittelfunktionen  $M$  bzw.  $N$  der erste Schritt des in 4. beschriebenen Algorithmus auszuführen ist. Aus der letzten Ungleichung folgt weiter, indem man die Voraussetzung des Satzes 3 und die Eigenschaft (III) benutzt,

$$y_{2,\mu}(M) \leq y_{2,\mu}(N),$$

schließlich allgemein

$$y_{\lambda,\mu}(M) \leq y_{\lambda,\mu}(N),$$

woraus für  $\lambda \rightarrow \infty$  durch Grenzübergang die Behauptung von Satz 3 hervorgeht.

Beweis von Satz 4. Sei  $y_1, \dots, y_{n+1}$  ein System von nicht lauter gleichen Zahlen im entsprechenden Bereich für die Obermittel. Wiederum ist

$$u_\mu = y_{1,\mu}(M) \leq y_{1,\mu}(N) = v_\mu,$$

<sup>6b)</sup> Ja man kann sogar ein Mittel  $M(x_1, x_2)$  angeben, welches die viel stärkere Eigenschaft hat, daß für  $\varepsilon > 0$  stets  $M(x_1, x_2 + \varepsilon) > M(x_1, x_2) + \tau \varepsilon$  gilt mit positivem, von  $x_1, x_2$  und  $\varepsilon$  unabhängigen  $\tau$ , und dessen Obermittel trotzdem nicht streng monoton ist.

wobei aber auf Grund der jetzigen Voraussetzung wenigstens für ein  $\mu$  das Kleinerzeichen steht. Wenn daher etwa  $N'$  streng monoton ist, so gilt:

$$N'(u_1, \dots, u_{n+1}) < N'(v_1, \dots, v_{n+1}).$$

Nach Satz 3 ist

$$M'(u_1, \dots, u_{n+1}) \leq N'(u_1, \dots, u_{n+1});$$

außerdem ist offenbar

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) = M'(u_1, \dots, u_{n+1})$$

und

$$N'(v_1, \dots, v_{n+1}) = N'(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Aus den letzten vier Gleichungen folgt dann

$$M'(y_1, \dots, y_{n+1}) < N'(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Entsprechend kann man den Beweis führen, wenn  $M'$  streng monoton ist. Die beiden letzten Sätze sind durch vollständige Induktion sofort auf höhere Obermittel übertragbar.

**Satz 3a.** Sind  $M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N(x_1, \dots, x_n)$  zwei Mittel im selben Bereich und ist dort stets  $M(x_1, \dots, x_n) \leq N(x_1, \dots, x_n)$ , dann ist für  $k = 1, 2, 3, \dots$  für die Obermittel im entsprechenden Bereich

$$M^{(k)}(y_1, \dots, y_{n+k}) \leq N^{(k)}(y_1, \dots, y_{n+k}).$$

**Satz 4a.** Sind  $M(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N(x_1, \dots, x_n)$  zwei Mittel im selben Bereich und ist, sofern nicht alle  $x$ , einander gleich sind,

$$M(x_1, \dots, x_n) < N(x_1, \dots, x_n);$$

sind außerdem alle Obermittel von  $M$  (oder von  $N$ ) streng monoton, dann gilt für  $k = 1, 2, 3, \dots$  im entsprechenden Bereich der Obermittel die Ungleichung

$$M^{(k)}(y_1, \dots, y_{n+k}) < N^{(k)}(y_1, \dots, y_{n+k}),$$

wenn nicht alle  $y_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n+k$ ) einander gleich sind.

**Anwendung.** Bekanntlich ist für zwei verschiedene positive Zahlen

$x_1, x_2$

$$(10, 1) \quad \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Da alle Obermittel des arithmetischen Mittels streng monoton sind und das  $(n-2)$ -te Obermittel des geometrischen Mittels  $\sqrt[n]{x_1 x_2}$  die Form  $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$  hat<sup>7)</sup>, so folgt aus (10, 1) und Satz 4a unmittelbar

$$(10, 2) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

<sup>7)</sup> Dies folgt aus Satz 2a und daraus, daß durch  $x = e^{\frac{1}{n}}$  das arithmetische Mittel  $\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2)$  übergeht in das geometrische  $\sqrt[n]{x_1 x_2}$ .

Damit fügen wir zu den vielen Beweisen der seit Cauchy so berühmten Ungleichung (10, 2) einen neuen auf ganz anderen Betrachtungen gegründeten Beweis hinzu (vgl. 1.).

11. Jensen<sup>4)</sup> hat erkannt, daß hinter der Ungleichung (10, 2) ein ganz allgemeines Prinzip steckt, welches sich auf den Begriff der konvexen Funktion stützt. Wir wollen diesen Begriff hier in folgender Weise verallgemeinern. Sei  $M(x_1, \dots, x_n)$  ein Mittel für  $a \leq x_v \leq b$ ,  $N(\xi_1, \dots, \xi_n)$  eines für  $\alpha \leq \xi_v \leq \beta$  ( $v = 1, \dots, n$ ). Die Funktion  $\xi = \varphi(x)$  sei im Intervall  $a < x < b$  eindeutig definiert, und nehme dort nur Werte an, die im Intervall  $\alpha \leq \xi \leq \beta$  liegen. Ich nenne die Funktion  $\varphi(x)$  im Intervall  $a < x < b$  bezüglich  $\{M; N\}$  konvex, wenn für  $a < x_v < b$  ( $v = 1, \dots, n$ ) stets

$$(11, 1) \quad \varphi(M(x_1, \dots, x_n)) \leq N(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))^a).$$

Nun gilt

Satz 5. Ist die Funktion  $\varphi(x)$  im Intervall  $a < x < b$  bezüglich  $\{M; N\}$  konvex, dann ist sie es auch bezüglich  $\{M^{(k)}; N^{(k)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Bemerkung. Für den Spezialfall, daß die Funktion  $\varphi(x)$  zugleich eine reguläre Abbildungsfunktion ist, folgt durch Anwendung der Sätze 3a und 2a aus (11, 1) unmittelbar die Behauptung; in der Tat, ist  $x = f(\xi)$  die Umkehrung von  $\xi = \varphi(x)$ , so ergibt sich aus (11, 1)

$$(11, 2) \quad M(x_1, \dots, x_n) \leq f(N(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))) = N_f(x_1, \dots, x_n),$$

und hieraus mit den Sätzen 3a und 2a

$$\begin{aligned} M^{(k)}(x_1, \dots, x_{n+k}) &\leq [N_f]^{(k)}(x_1, \dots, x_{n+k}), \\ &= [N^{(k)}]_f(x_1, \dots, x_{n+k}) \end{aligned}$$

oder, indem man beiderseits den  $\varphi$ -Wert bildet,

$$\varphi(M^{(k)}(x_1, \dots, x_{n+k})) \leq N^{(k)}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n+k})),$$

die Behauptung.

<sup>4)</sup> Bei Jensen ist  $n = 2$  und  $M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $N = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$ . Jede in einem offenen Intervall nach oben beschränkte, im Jensenschen Sinne konvexe Funktion ist dort stetig (Jensen, l. c., S. 189). — Unter besonderer Ausnutzung der Eigenschaft (II) ist es nicht schwer zu beweisen, daß eine in unserem Sinne konvexe Funktion in ihrem Definitionsintervall stetig ist; ausführlicheres hierüber in meiner in den S.-B. Bayer. Akad. d. Wissensch. demnächst erscheinenden Note über konvexe Funktionen.

Nun komme ich zum Beweis im allgemeinen Fall. Es genügt, den Satz für die ersten Obermittel zu beweisen. Sei  $y_1, \dots, y_{n+1}$  vorgegeben. Ich setze  $\eta_\mu = \psi(y_\mu)$  ( $\mu = 1, \dots, n+1$ ), und führe für die  $y_\mu$  vermöge  $M$  und für die  $\eta_\mu$  mittels  $N$  den Erhöhungsalgorithmus durch; dabei ergeben sich die Zahlen  $y_{\lambda, \mu}$  und  $\eta_{\lambda, \mu}$ . Wegen der vorausgesetzten Konvexität ist:

$$\begin{aligned}\psi(y_{1, \mu}) &= \psi(M(\dots, y_{\mu-1}, y_{\mu+1}, \dots)) \leq N(\dots, \psi(y_{\mu-1}), \psi(y_{\mu+1}), \dots) \\ &= N(\dots, \eta_{\mu-1}, \eta_{\mu+1}, \dots) = \eta_{1, \mu}.\end{aligned}$$

Angenommen, es sei bereits bewiesen, daß für  $\lambda = 1, \dots, l$  die Ungleichungen

$$(11, 3) \quad \psi(y_{\lambda, \mu}) \leq \eta_{\lambda, \mu}$$

gelten. Dann ist auf Grund der Konvexität und der Eigenschaft (III):

$$\begin{aligned}\psi(y_{l+1, \mu}) &= \psi(M(\dots, y_{l, \mu-1}, y_{l, \mu+1}, \dots)) \\ &\leq N(\dots, \psi(y_{l, \mu-1}), \psi(y_{l, \mu+1}), \dots) \\ &\leq N(\dots, \eta_{l, \mu-1}, \eta_{l, \mu+1}, \dots) = \eta_{l+1, \mu}.\end{aligned}$$

Diese Induktion zeigt, daß die Ungleichung (11, 3) für alle  $\lambda > 0$  gilt; aus (11, 3) folgt durch Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  wegen der Stetigkeit von  $\psi(x)^8$ :

$$\begin{aligned}\psi(M'(y_1, \dots, y_{n+1})) &= \psi(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_{\lambda, \mu}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi(y_{\lambda, \mu}), \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta_{\lambda, \mu} = N'(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \\ &= N'(\psi(y_1), \dots, \psi(y_{n+1})).\end{aligned}$$

Damit ist Satz 5 bewiesen. Er ist eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von Jensen<sup>9</sup>).

12. Wir haben hier nur ganz wenige Fragen behandelt, die sich bei der Einführung des Erhöhungsalgorithmus aufdrängen. Auf die umfangreiche Frage: „Welche funktionalen Eigenschaften übertragen sich vom Mittel auf das Obermittel?“ will ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Dagegen möchte ich noch auf ein anderes Problem hinweisen, das sich auf die Klassifikation der höheren Mittelwerte bezieht.

Ich nenne ein Mittel von mehr als zwei Argumenten *primitiv*, wenn es nicht das Obermittel eines Mittels von weniger Argumenten ist. Es gibt für jede Argumentenanzahl ( $\geq 3$ ) primitive Mittel. Für den Fall

<sup>9</sup>) I. e.; Jensen beweist den Satz 5 für den Spezialfall, daß  $M$  und  $N$  die arithmetischen Mittel von zwei Argumenten sind.

von drei Argumenten gebe ich im folgenden ein Beispiel eines primitiven Mittels. Der Beweis dafür, daß das Mittel

$$(12, 1) \quad M(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6} \quad (x_1 \leq x_2 \leq x_3)^{10})$$

primitiv ist, dürfte nicht ganz uninteressant sein.

Aus (12, 1) folgt für  $x_1 = x_2 \leq x_3$

$$(12, 2) \quad M(x_1, x_1, x_3) = \frac{x_1 + x_3}{2}.$$

Ich nehme nun an, es gäbe ein Mittel  $N(x_1, x_3)$ , dessen Obermittel das Mittel (12, 1) ist. Betrachten wir den Erhöhungsalgorithmus für den Fall  $y_{0,1} = y_1 = y_2 < y_3 = y_{0,3}$ . Man hat die folgenden Zahlen zu bilden:

$$y_{1,1} = N(y_{0,1}, y_{0,3}) = y_{0,1}.$$

$$y_{1,2} = y_{1,3} = N(y_{0,1}, y_{0,3}).$$

Wegen (II) ist

$$y_{1,1} < y_{1,2} = y_{1,3}.$$

Weiter ist

$$y_{2,1} = y_{2,2} = N(y_{1,1}, y_{1,3}), \quad y_{2,3} = y_{1,3},$$

oder

$$y_{2,1} = N(y_{0,1}, N(y_{0,1}, y_{0,3})), \quad y_{2,3} = N(y_{0,1}, y_{0,3}),$$

und wieder wegen (II)  $y_{2,1} < y_{2,3}$ . Nach der in 4. bewiesenen Konvergenz der  $y_{i,\mu}$  genügt es, die Näherungssysteme mit geradem vorderen Index zu untersuchen. Dafür hat man die Rekursionsformeln

$$y_{2(v+1),1} = N(y_{2v,1}, N(y_{2v,1}, y_{2v,3})), \quad y_{2(v+1),3} = N(y_{2v,1}, y_{2v,3});$$

dabei ist stets

$$y_{2v,1} = y_{2v,3} < y_{2v,3}.$$

Nach (12, 2) streben die  $y_{2v,\mu}$  dem gemeinsamen Grenzwert  $\frac{1}{2}(y_{0,1} + y_{0,3})$  zu; dieser Grenzwert muß aber auch gleich  $\frac{1}{2}(y_{2v,1} + y_{2v,3})$  sein ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ); das folgt aus den Gleichungen (6, 1). Daher gilt:

$$y_{2v,1} + y_{2v,3} = y_{0,1} + y_{0,3} \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

Für  $v = 1$  folgt hieraus, indem man  $y_{0,1}, y_{0,3}$  durch  $x, y$  ersetzt:

$$(12, 3) \quad N(x, N(x, y)) + N(x, y) = x + y$$

für  $x < y$ . Außerdem gilt mit derselben Bezeichnung

$$y_{1,1} < \frac{y_{0,1} + y_{0,3}}{2} < y_{1,3},$$

<sup>10)</sup> Für die übrigen Systeme  $(x_1, x_2, x_3)$  ist  $M(x_1, x_2, x_3)$  durch die Symmetrieforderung bestimmt.

also insbesondere

$$(12, 4) \quad x + y < 2N(x, y)$$

für  $x < y$ .

Ich zeige, es gibt genau ein Mittel  $N(x, y)$ , welches der Funktionalgleichung (12, 3) und der Ungleichung (12, 4) genügt. Ich setze

$$y = z_0, \quad N(x, y) = z = z_1, \quad N(x, z) = z_2,$$

und weiter allgemein

$$(12, 5) \quad N(x, z_r) = z_{r+1}$$

für  $r = 0, 1, 2, \dots$ . Aus (12, 3) folgt dann

$$(12, 6) \quad z_{r+1} = x + z_{r-1} - z_r,$$

und aus (12, 4)

$$(12, 7) \quad x + z_r < 2z_{r+1}.$$

Nach (12, 5) ist  $x < z_{r+1} < z_r$ ; daher streben die  $z_r$  einem Grenzwert zu, der wegen (12, 6) gleich  $x$  ist. Aus (12, 7) erhält man durch Umformung

$$(12, 8) \quad \nu < \frac{z_r - z_{r+1}}{z_{r+1} - x} = t_r < 1.$$

Nach (12, 6) ist

$$t_r = \frac{z_r - (x + z_{r-1} - z_r)}{z_{r-1} - z_r} = \frac{z_r - x}{z_{r-1} - z_r} - 1,$$

also

$$(12, 9) \quad t_r = \frac{1}{t_{r-1}} - 1 \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

wobei

$$(12, 10) \quad 0 < t_0 = \frac{y - x}{z - x} = \frac{y - N(x, y)}{N(x, y) - x} < 1.$$

Nun ist die Ableitung der Funktion  $\frac{1}{t} - 1$  im Intervall  $(0, 1)$  kleiner als  $-1$ ; daher ist der einzige Anfangswert  $t_0$  im Intervall  $(0, 1)$ , für welchen gemäß der Rekursionsformel (12, 9) die  $t_r$  alle positiv und kleiner als 1 bleiben, der Wert  $t_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , welcher der Gleichung  $t_0 = \frac{1}{t_0} - 1$  genügt. Dann sind alle  $t_r = t_0$ . Aus (12, 10) folgt dann durch Auflösung nach  $N(x, y)$

$$(12, 11) \quad N(x, y) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}y \quad (x < y).$$

Wenn es also überhaupt ein  $N(x, y)$  gibt, welches (12, 3) und (12, 4) befriedigt, so kann es nur die Funktion (12, 11) sein. Man verifiziert leicht, daß (12, 11) tatsächlich die Gleichungen (12, 3) und (12, 4) erfüllt. Nun



ist noch zu untersuchen, ob das Obermittel dieser Funktion  $N(x, y)^{11)}$  gerade das Mittel (12, 1) ist. Das Obermittel von (12, 11) hat nach den Ergebnissen von 7. die Form (7, 6) mit  $a_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ,  $a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Wir brauchen es gar nicht auszurechnen; denn wegen  $\sqrt{1 \cdot 3} \neq 2$  ist es bestimmt nicht mit (12, 1) identisch. Es gibt also kein Mittel, dessen Obermittel das Mittel (12, 1) wäre, d. h. (12, 1) ist ein primitives Mittel.

Mit Bezugnahme auf die Funktionalgleichung (6, 2) kann man übrigens sehr rasch nachweisen, daß das in 2. erwähnte Mittel  $M^*$ , welches zwar einen reichlich ausgearteten Typus vorstellt, für  $n \geq 3$  primitiv ist.

<sup>11)</sup> Für  $y \leq x$  setzt man  $N(x, y) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} y + \frac{\sqrt{5}-1}{2} x$ .

München, den 18. Februar 1933.

(Eingegangen am 20. 2. 1933.)

# Die Grenzreziproke positiv definiter unendlicher Matrizen.

Neuer Beweis des Satzes von Toeplitz.

Von

Kurt Friedrichs in Braunschweig.

Es sei  $a_{ik}$  eine unendliche Hermitesche Matrix

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots,$$

deren Abschnittsformen eine gemeinsame positive untere Schranke  $M > 0$  besitzen:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \bar{x}_i x_k \geq M \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad \text{für jedes } n.$$

Es seien  $A_{ki}^n$  die Reziproken der Abschnittsmatrizen  $a_{ik}$ :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ki}^n = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

Dann konvergieren die  $A_{ki}^n$  mit wachsendem  $n$  gegen Grenzwerte:

$$(1) \quad A_{ki}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_{ki}.$$

Mehr noch: Ist  $y_1, y_2, \dots$  ein unendliches Wertsystem, so nimmt

$\sum_{k,l=1}^n A_{ki}^n \bar{y}_k y_l$  nicht ab:

$$(2) \quad \sum_{k,l=1}^n A_{ki}^n \bar{y}_k y_l \uparrow \Re(y).$$

Für den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert  $\Re(y)$  gilt:

$$(3) \quad \Re(y) \leq \frac{1}{M} \sum_1^\infty |y_k|^2;$$

bei beschränktem  $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$  ist demnach  $\mathfrak{A}(y)$  die beschränkte Form

$$\mathfrak{A}(y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{kl} \bar{y}_k y_l$$

und also ist  $A_{kl}$  eine beschränkte Matrix.

Toeplitz<sup>1)</sup> hat diesen Satz zurückgeführt auf eine eigenartige Parameterdarstellung aller positiv definiten Matrizen mit Hilfe der „Jacobi'schen Transformation“. Doch ist es möglich, diesen Satz unmittelbar zu gewinnen auf Grund folgender Überlegung.

Es sei die Aufgabe  $\mathfrak{A}_n$  gestellt, durch Wahl von  $x_1, \dots, x_n$

$$F^n(x) = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \bar{x}_i x_k$$

zum Maximum zu machen bei festen  $y$ .

Das Maximum  $F_{\max}^n$  ist endlich und hat gerade den Wert

$$F_{\max}^n = \sum_{k,l=1}^n A_{kl}^n \bar{y}_k y_l.$$

Denn zunächst ist  $F(x)$  nach oben beschränkt, da bei wachsenden  $|x_i|$  die quadratische Summe überwiegt. Für das Wertsystem  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ , bei dem das Maximum angenommen wird, gilt

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \bar{x}_k \quad \text{und} \quad \bar{x}_k = \sum_{i=1}^n A_{ki}^n y_i,$$

woraus zuerst folgt

$$F^n(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i,$$

und sodann

$$F^n(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n A_{ki}^n \bar{y}_k y_i.$$

Wird nun bei diesem Maximumproblem  $\mathfrak{A}_n$  die Zusatzbedingung  $x_n = 0$  gestellt, so entsteht das Problem  $\mathfrak{A}_{n-1}$  mit dem Maximum  $F_{\max}^{n-1}$ .

Eine Zusatzbedingung kann aber das Maximum nicht vergrößern:

$$F_{\max}^{n-1} \leq F_{\max}^n,$$

und das ist der wesentliche Teil (2) der Behauptung.

<sup>1)</sup> O. Toeplitz, Die Jacobische Transformation ..., Gött. Nachr. (1907), S. 101–109. Vgl. auch A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen § 23, § 111, wo auf den Satz von Toeplitz die Spektraltheorie halbbeschränkter Matrizen gegründet wird.

Ferner hat die Ungleichung

$$F^n(x) \leq \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i y_i + x_i \bar{y}_i) - M \sum_i |x_i|^2$$

die entsprechende Ungleichung

$$\sum_{k,i=1}^n A_{ki}^n y_k y_i \leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n |y_k|^2$$

für die Maxima beider Seiten zur Folge und damit (3).

Seien schließlich in (2) alle  $y_k = 0$  gesetzt mit Ausnahme von  $y_i = 1$ , so folgt  $A_{ii}^n \uparrow A_{ii}$ ; werden sodann alle  $y_k = 0$  gesetzt mit Ausnahme von  $y_i = 1$ ,  $y_m = 1$  und  $y_i = 1$ ,  $y_m = i$ , so folgt

$$A_{im}^n \rightarrow A_{im},$$

d. h. (1).

Damit ist der Satz von Toeplitz bewiesen.

(Eingegangen am 1. 7. 1933.)

# Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und eine damit zusammenhängende Differentialdifferenzgleichung.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

## 1. Einleitung.

Die Grundlage für die Statistik seltener Ereignisse bildet die Poissonsche Formel

$$\psi_0(x, a) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

( $a = \text{Erwartungswert}$ ,  $x$  ganzzahlig  $\geq 0$ ). Schließt sich ein gegebenes statistisches Material, d. h. eine arithmetische Verteilung  $v(x)$ , dieser Funktion nicht an, so kann man nach einer Idee von Charlier (1905) versuchen,  $v(x)$  durch eine Reihe der Form

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x, a)$$

darzustellen, wobei die  $\psi_n$  für  $n \geq 1$  so definiert sind:

$$(1) \quad \psi_n(x, a) = \psi_{n-1}(x-1, a) - \psi_{n-1}(x, a) \quad \text{für } x \geq 1,$$

$$(2) \quad \psi_n(0, a) = (-1)^n e^{-a}.$$

Sie haben die Gestalt

$$\psi_n(x, a) = p_n(x, a) \psi_0(x, a),$$

wo die  $p_n$  Polynome  $n$ -ten Grades in  $x$  darstellen, die wir *Charliersche Polynome* nennen wollen:

$$(3) \quad p_n(x, a) = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v! a^{-v} \binom{x}{v}.$$

Da bei ganzzahligem  $x$  diese Summe bis zu  $v = \text{Min}(n, x)$  läuft, so ist

$$p_n(x, a) = (-1)^{n-x} p_x(n, a).$$

Vermittels der Orthogonaleigenschaft

$$(4) \quad \sum_{x=0}^{\infty} p_m(x, a) p_n(x, a) \psi_0(x, a) = \sum_{x=0}^{\infty} \psi_m(x, a) \psi_n(x, a) \frac{1}{\psi_0(x, a)} \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{n!}{a^n} & \text{für } m = n \end{cases}$$

ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen die Koeffizienten  $c_n$  der Charlierschen Entwicklung folgendermaßen:

$$(5) \quad c_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} v(x) p_n(x, a).$$

In der gegenwärtigen Arbeit sollen nun die Charlierschen Polynome auf Grund einer Differentialdifferenzgleichung, der sie genügen, näher studiert werden, und zwar wird zunächst für sie eine Summenrelation aufgestellt, die die Orthogonaleigenschaft als Spezialfall enthält und z. B. für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens nutzbar gemacht werden kann. Ich bediene mich dabei einer Fortbildung der Methode, vermittels deren ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> Integralrelationen für die *Hermiteischen Polynome* abgeleitet habe<sup>2)</sup> und deren Verallgemeinerungsfähigkeit bereits damals auseinandergesetzt wurde (a. a. O., S. 588). Die benutzte Differentialdifferenzgleichung werden wir dann allgemein lösen, worauf die Charlierschen Funktionen sich als die einfachsten innerhalb einer umfassenderen Schar mit ganz analogen Eigenschaften erweisen werden.

## 2. Summenrelation für die Charlierschen Polynome.

Wir gebrauchen im folgenden die Bezeichnungsweise:

$$\Delta F(x) = F(x - h) - F(x),$$

$$\Delta^n F(x) = \Delta(\Delta^{n-1} F(x)) \text{ für } n > 1, \Delta^1 F(x) = \Delta F(x), \Delta^0 F(x) = F(x),$$

<sup>1)</sup> G. Doetsch, Integraleigenschaften der Hermiteischen Polynome. Math. Zeitschr. 82 (1930), S. 587–599.

<sup>2)</sup> Den Ausgangspunkt bildete damals eine partielle Differentialgleichung. — Übrigens hängen die damaligen und die gegenwärtigen Erörterungen vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung eng zusammen, denn eine Reihe nach Hermiteischen Funktionen tritt bei der Entwicklung einer *geometrischen* Verteilung in die *Brunssche* Reihe auf, die von der Laplaceschen Formel (an Stelle der Poissonschen) ausgeht.

und setzen, falls  $F$  noch von weiteren Variablen abhängig, an  $\Delta$  den Index  $x$ . Unser Ausgangspunkt ist die folgende *Differentialdifferenzengleichung* für eine Funktion  $\Phi(x, t)$ :

$$(6) \quad \frac{\Delta_x \Phi}{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Ihr genügt die Reihe

$$(7) \quad \Phi(x, t) = \Phi_0(x) + \frac{t-t_0}{1!} \frac{\Delta \Phi_0(x)}{h} + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \frac{\Delta^2 \Phi_0(x)}{h^2} + \dots,$$

wo  $\Phi_0(x) = \Phi(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(x, t)$  irgendeine gegebene Funktion ist, für alle  $t$  im Innern ihres Konvergenzkreises (der natürlich von  $\Phi_0(x)$  abhängt und auf  $t_0$  zusammenschrumpfen kann), da sie als Potenzreihe gliedweise differenziert werden darf. In der Poissonschen Funktion

$$\psi_0(x, t) = \frac{t^x}{x!} e^{-t}$$

haben wir, wenn  $h = 1$  ist und  $x$  die ganzzahligen Werte durchläuft, eine Lösung der Gleichung (6), denn

$$\begin{aligned} \Delta_x \psi_0(x, t) &= \frac{t^{x-1}}{(x-1)!} e^{-t} - \frac{t^x}{x!} e^{-t} = \frac{t^x}{x!} e^{-t} \left( \frac{x}{t} - 1 \right), \\ \frac{\partial \psi_0(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{x!} (x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t}) = \frac{t^x}{x!} e^{-t} \left( \frac{x}{t} - 1 \right). \end{aligned}$$

Folglich ist auch

$$(8) \quad \psi_r(x, t) = \Delta_x^r \psi_0(x, t) = \frac{\partial^r \psi_0(x, t)}{\partial t^r}$$

eine Lösung, und für diese lautet die Entwicklung (7):

$$(9) \quad \psi_r(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m}{m!} \Delta_x^m \psi_r(x, t_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m}{m!} \psi_{r+m}(x, t_0).$$

Das ist aber nichts anderes als eine Charliersche Reihe mit dem Parameterwert  $a = t_0$ . Um ihre Konvergenz und die Darstellbarkeit ihrer Koeffizienten nach Formel (5) beurteilen zu können, stützen wir uns auf ein Ergebnis von G. Szegő<sup>3)</sup>, das besagt: Eine Folge  $v(x)$  ist durch eine konvergente Charliersche Reihe mit den durch (5) gegebenen Koeffizienten

<sup>3)</sup> Publiziert bei H. Pollaczek-Geiringer, Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 8 (1928), S. 292–309 (S. 306, Fußnote).



darstellbar, wenn  $\sum_{x=0}^{\infty} v^x(x) \frac{1}{\psi_0(x, a)}$  konvergiert. In unserem Fall ist dieser Ausdruck gleich

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\psi_v^x(x, t)}{\psi_0(x, t_0)} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\psi_v^x(x, t)}{\psi_0(x, t)} \frac{\psi_0(x, t)}{\psi_0(x, t_0)} = e^{-(t-t_0)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\psi_v^x(x, t)}{\psi_0(x, t)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^x.$$

Die Reihe  $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\psi_v^x(x, t)}{\psi_0(x, t)}$  konvergiert bei festem  $t$ , sie ist nämlich gerade die in der Orthogonalitätsrelation (4) vorkommende Summe. Unser Ausdruck, der eine Potenzreihe in  $\frac{t}{t_0}$  ist, konvergiert also erst recht, sobald  $t_0 > 0$  und  $0 < t \leq t_0$  ist. — Die Charliersche Reihe für  $\psi_v(x, t)$  und damit wegen der Eindeutigkeit<sup>4)</sup> der Entwicklung die Reihe (9) konvergiert also gewiß für  $0 < t \leq t_0$  (folglich als Potenzreihe sogar für  $0 < t < 2t_0$ ), unabhängig von  $x$ , und ihre Koeffizienten lassen sich nach Formel (5) ausdrücken. Das ergibt:

$$\frac{t_0^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} \psi_v(x, t) p_n(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, 1, \dots, v-1 \\ \frac{(t-t_0)^{n-v}}{(n-v)!} & \text{für } n = v, v+1, \dots \end{cases}$$

Der erste Teil dieser Formel ist mit dem ersten Teil der Orthogonalrelation (4) äquivalent. Der zweite Teil läßt sich so schreiben:

$$(C) \quad \sum_{x=0}^{\infty} p_n(x, t) p_n(x, t_0) \psi_0(x, t) = \frac{n!}{(n-v)!} \frac{(t-t_0)^{n-v}}{t_0^n} \quad (n \geq v, 0 < t < 2t_0).$$

Das ist die *Summenrelation*, die wir ableiten wollten. Die Orthogonalitätsbeziehung ist in ihr für  $t = t_0$  enthalten.

Schon der Spezialfall  $v = 0$  liefert ein bemerkenswertes Resultat:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_n(x, t_0) \psi_0(x, t) = \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n \quad (n \geq 0, 0 < t < 2t_0)$$

oder

$$(C_0) \quad \sum_{x=0}^{\infty} p_n(x, t_0) \frac{t^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^{n-x} p_n(n, t_0) \frac{t^x}{x!} = e^t \left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n.$$

Man kann diese Beziehung als eine „*erzeugende Gleichung*“ für die  $p_n(x, t_0)$  oder  $p_n(n, t_0)$  auffassen: Sie treten auf als Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer sehr einfachen Funktion. Hieraus folgt z. B. sofort die explizite Darstellung (3) der  $p_n(x, t_0)$ . Weiterhin aber eröffnet (C<sub>0</sub>) die Möglichkeit, die  $p_n(x, t_0)$  auch für nichtganze (positive und negative)  $n$

<sup>4)</sup> Ob diese irgendwo explizit bewiesen ist, entzieht sich meiner Kenntnis.

zu definieren und ihr asymptotisches Verhalten für große  $x$  nach der bekannten Darboux'schen Methode zu untersuchen, worauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

### 3. Das Randwertproblem der Differentialdifferenzgleichung.

Die Gleichung (6), in der wir uns  $h$  positiv denken wollen, wird durch die Reihe (7) offenbar nicht allgemein gelöst. Letztere entspricht dem, was man in der Theorie der Differentialgleichungen eine analytische Lösung nennt. Um  $\Phi(x, t)$  nach (7) an einer Stelle  $x$  zu bekommen, muß wegen des Auftretens von  $\Delta \Phi_0, \Delta^2 \Phi_0, \dots$  die Funktion  $\Phi_0(x)$  in allen Punkten  $x, x-h, x-2h, \dots$  gegeben sein, und zwar — damit überhaupt ein Konvergenzgebiet existiert — so, daß  $\limsup \left| \frac{\Delta^n \Phi_0}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}$  endlich ist.

Wir wollen dagegen jetzt allgemeiner für die Gleichung (6) ein *Randwertproblem* stellen, das so formuliert ist:

Wir suchen diejenige Funktion  $\Phi(x, t)$ , die

(I) für  $x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  und  $t > 0$  der Gleichung

$$\frac{\Phi(x-h, t) - \Phi(x, t)}{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

genügt,

(II) für  $x = x_0$  und  $t > 0$  mit einer gegebenen Funktion  $\Psi(t)$  übereinstimmt, die in jedem endlichen Intervall  $0 < t \leq t_0$  als stetig und bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrierbar vorausgesetzt wird<sup>5)</sup>,

(III) an den Stellen  $x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  für  $t \rightarrow +0$  den Werten  $\Phi_0(x)$  zustrebt, die völlig beliebig vorgegeben werden können.

Lösung: Schreibt man die Funktionalgleichung in der Form

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{h} \Phi(x, t) = \frac{1}{h} \Phi(x-h, t),$$

so sieht man, daß ihre wiederholte Anwendung die Funktion  $\Phi(x, t)$  sofort links von  $x_0$  zu definieren gestattet, und zwar, sobald  $\Phi(x_0, t)$  als  $p$ -mal differenzierbare Funktion im Intervall  $t_1 < t < t_2$  gegeben ist, für  $x = x_0 - h, x_0 - 2h, \dots, x_0 - ph$  und  $t_1 < t < t_2$ . Das Problem, die Funktion nach rechts fortzusetzen, kann man auffassen als die Aufgabe, die gewöhnliche Differentialgleichung (10) unter der Anfangsbedingung (III) zu integrieren, wobei  $x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  fest und  $\Phi(x-h, t)$  eine gegebene Funktion ist. Die Integration ergibt:

$$(a) \quad \Phi(x, t) = \frac{1}{h} e^{-\frac{t}{h}} \int_0^t \Phi(x-h, \tau) e^{\frac{\tau}{h}} d\tau + \Phi_0(x) e^{-\frac{t}{h}}$$

$$(x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots).$$

<sup>5)</sup> Wollte man die Funktion  $\Phi(x, t)$  für alle  $x > x_0$  betrachten, so müßte man ihren Wert nicht nur für  $x_0$ , sondern in dem Streifen  $x_0 \leq x < x_0 + h$  vorgeben.

Setzt man  $\Phi(x_0, t) = \Psi(t)$ , so kann man nach dieser Formel  $\Phi(x, t)$  sukzessive für  $x = x_0 + h$ ,  $x_0 + 2h$ , ... ausrechnen.

Wir wollen die Lösung noch explizit angeben, was sehr erleichtert wird, wenn man für die Integralbindung  $\int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau$  (Faltungsintegral) die symbolische Schreibweise  $F_1 * F_2$  einführt. Dieses symbolische Produkt ist kommutativ und assoziativ; für eine iterierte Faltung mit  $n$  gleichen Faktoren schreiben wir  $F^{*n}$ . In dieser Symbolik ist

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{h} \Phi(x - h, t) * e^{-\frac{t}{h}} + \Phi_0(x) e^{-\frac{t}{h}} \quad (x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots),$$

also

$$\Phi(x_0 + h, t) = \frac{1}{h} \Psi(t) * e^{-\frac{t}{h}} + \Phi_0(x_0 + h) e^{-\frac{t}{h}},$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_0 + 2h, t) &= \frac{1}{h^2} \Psi(t) * \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*2} + \frac{1}{h} \Phi_0(x_0 + h) \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*2} \\ &\quad + \Phi_0(x_0 + 2h) e^{-\frac{t}{h}}, \end{aligned}$$

usw., schließlich allgemein:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0 + mh, t) &= \frac{1}{h^m} \Psi(t) * \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*m} \\ &\quad + \frac{1}{h^{m-1}} \Phi_0(x_0 + h) \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*m} + \dots + \frac{1}{h} \Phi_0(x_0 + (m-1)h) \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*2} \\ &\quad + \Phi_0(x_0 + mh) e^{-\frac{t}{h}}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$(11) \quad \left(e^{-\frac{t}{h}}\right)^{*v} = \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} e^{-\frac{t}{h}}.$$

Daher kann man die allgemeine Lösung auch in der Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} (b) \quad \Phi(x_0 + mh, t) &= \Psi(t) * \frac{t^{m-1} e^{-\frac{t}{h}}}{(m-1)! h^m} \\ &\quad + e^{-\frac{t}{h}} \left\{ \Phi_0(x_0 + h) \frac{t^{m-1}}{(m-1)! h^{m-1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \Phi_0(x_0 + (m-1)h) \frac{t}{1! h} + \Phi_0(x_0 + mh) \right\}. \end{aligned}$$

#### 4. Die Charlierschen Funktionen als spezielle Fälle der allgemeinen Lösung.

Die Charlierschen Funktionen  $\psi_n(x, t)$  genügen der Funktionalgleichung (6), müssen also in der Lösung (b) enthalten sein. Bei ihnen ist  $h = 1$  zu setzen, und wir wollen  $x_0 = 0$  nehmen. Die Randbedingungen, denen sie entsprechen, sind die folgenden: Gemäß (2) ist

$$\Psi(t) = (-1)^n e^{-t}.$$

Um  $\Phi_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \psi_n(x, t)$  für  $x = 1, 2, \dots$  festzustellen, gehen wir von der expliziten Darstellung (3) aus:

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &= \frac{t^x}{x!} e^{-t} \sum_{v=0}^{\text{Min}(n, x)} (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v! t^{-v} \binom{x}{v} \\ &= e^{-t} \sum_{v=0}^{\text{Min}(n, x)} (-1)^{n-v} \binom{n}{v} \frac{t^{x-v}}{(x-v)!}. \end{aligned}$$

Aus dieser ersieht man, daß

$$(12) \quad \Phi_0(x) = \begin{cases} (-1)^{n-x} \binom{n}{x} & \text{für } 1 \leq x \leq n, \\ 0 & \text{für } x > n \end{cases}$$

ist. Wir können durchweg  $\Phi_0(x) = (-1)^{n-x} \binom{n}{x}$  setzen, da dieser Ausdruck für  $x > n$  automatisch verschwindet.

Mit diesen Funktionen  $\Psi(t)$  und  $\Phi_0(x)$  ergibt die Formel (b):

$$\begin{aligned} \Phi(m, t) &= (-1)^n e^{-t} \cdot \frac{t^{m-1} e^{-t}}{(m-1)!} + e^{-t} \left\{ (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-m+1} \binom{n}{m-1} \frac{t}{1!} + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \right\} \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung von (11):

$$\Phi(m, t) = e^{-t} \sum_{v=0}^m (-1)^{n-v} \binom{n}{v} \frac{t^{m-v}}{(m-v)!},$$

was in der Tat mit  $\psi_n(m, t)$  übereinstimmt.

Setzt man die Funktionen  $\psi_n(x, t)$  mittels der Funktionalgleichung (10) nach links, d. h. für  $x = -1, -2, \dots$  fort, so verschwinden sie dort identisch. Denn (10) ergibt:

$$\psi_n(-1, t) = \psi_n(0, t) + \frac{\partial \psi_n(0, t)}{\partial t} = (-1)^n e^{-t} + (-1)^{n+1} e^{-t} = 0;$$

dann ist natürlich erst recht  $\psi_n(-2, t)$ ,  $\psi_n(-3, t)$  usw. gleich 0.

### 5. Eine allgemeinere Klasse von Polynomen.

Diese Betrachtungen legen es nahe, die Charlierschen Funktionen  $\varphi_n(x, t)$  in eine allgemeinere Klasse einzuordnen, die sich sehr einfach und naturgemäß als eine besonders ausgezeichnete Lösungsschar der Funktionalgleichung (10) definieren läßt.

Damit eine Lösung der Gleichung

$$(13) \quad \Phi(x-1, t) = \Phi(x, t) + \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}$$

( $x$  ganzzahlig) für  $x = -1$  verschwindet, muß

$$\Phi(0, t) + \frac{d\Phi(0, t)}{dt} = 0,$$

also  $\Phi(0, t) = c e^{-t}$  sein. Übrigens ist  $c = \Phi(0, 0) = \Phi_0(0)$ . Ist  $\Phi(-1, t) = 0$ , so ist auch  $\Phi(-2, t) = \Phi(-3, t) = \dots = 0$ ; folglich:

Die einzigen Lösungen von (13), die für  $x = -1, -2, \dots$  und  $t > 0$  verschwinden, sind diejenigen mit der Randfunktion

$$\Psi(t) = \Phi(0, t) = \Phi_0(0) e^{-t}.$$

Ihre Gesamtheit wird nach (b) für  $x = 1, 2, \dots, m, \dots$  und  $t > 0$  gegeben durch \*)

$$\bar{\Phi}(m, t) = e^{-t} \sum_{v=0}^m \Phi_0(v) \frac{t^{m-v}}{(m-v)!} = \frac{t^m}{m!} e^{-t} \sum_{v=0}^m \Phi_0(v) v! \binom{m}{v} t^{-v},$$

wo die  $\Phi_0(v)$  beliebig vorgegebene Werte sind.

Die Charlierschen Funktionen, die ja die Eigenschaft des Verschwindens für  $x = -1, -2, \dots$  haben, sind unter den  $\bar{\Phi}$  enthalten: Setzt man im Einklang mit (12) speziell  $\Phi_0(v) = (-1)^{n-v} \binom{n}{v}$ , so geht  $\bar{\Phi}(m, t)$  in  $\varphi_n(m, t)$ , bzw. das für ganzzahlige  $x$  definierte Polynom

$$P(x, t) = \sum_{v=0}^x \Phi_0(v) v! \binom{x}{v} t^{-v}$$

in das  $n$ -te Charliersche Polynom  $p_n(x, t)$  über.

Die Funktionen  $\bar{\Phi}(m, t)$  haben noch eine weitere Eigenschaft, die sie in unmittelbare Nähe der Funktionen  $\varphi_n(m, t)$  rückt und die zugleich erkennen läßt, daß die  $\varphi_n(m, t)$  die einfachste Schar innerhalb der  $\bar{\Phi}(m, t)$  darstellen. Eine Funktion  $\bar{\Phi}$  hängt einzig und allein von den vorgegebenen Werten  $\Phi_0(v) = \bar{\Phi}(v, 0)$ ,  $v = 0, 1, \dots$ , die ihre „Anfangswerte“ heißen mögen, ab. (Für negative  $v$  ist  $\bar{\Phi}(v, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \bar{\Phi}(v, t) = 0$  zu setzen.)

\*) Wir bezeichnen diese Funktionen mit  $\bar{\Phi}$ , um daran zu erinnern, daß es sich bei ihnen um eine spezielle Klasse von Lösungen handelt.

Wir wollen nun einmal von einer ganz bestimmten Funktion  $\bar{\Phi}(m, t)$  ausgehen und auf sie den Prozeß  $\Delta_m$  anwenden, durch den man nach (1) alle Funktionen  $\psi_n(m, t)$  aus einer speziellen, nämlich  $\psi_0(m, t)$ , gewinnen konnte. (Nach (13) ist dieser Prozeß  $\Delta_m$  gleichbedeutend mit dem Prozeß  $\partial/\partial t$ ). Es ergibt sich (wenn man beachtet, daß  $\Phi_0(-1) = 0$  ist):

$$\begin{aligned}\Delta_m \bar{\Phi}(m, t) &= e^{-t} \sum_{v=0}^{m-1} \Phi_0(v) \frac{t^{m-v-1}}{(m-v-1)!} - e^{-t} \sum_{v=0}^m \Phi_0(v) \frac{t^{m-v}}{(m-v)!} \\ &= e^{-t} \sum_{v=0}^m [\Phi_0(v-1) - \Phi_0(v)] \frac{t^{m-v}}{(m-v)!} \\ &= e^{-t} \sum_{v=0}^m \Delta \Phi_0(v) \frac{t^{m-v}}{(m-v)!}.\end{aligned}$$

Der Prozeß  $\Delta_m$  macht also aus der Funktion  $\bar{\Phi}(m, t)$  eine Funktion derselben Klasse, die sich aus den ersten Differenzen der früheren Anfangswerte aufbaut. Durch Iterierung dieses Prozesses sieht man: *Von jeder Funktion  $\bar{\Phi}$  strahlt eine Folge von ebensolchen Funktionen aus, die sukzessive durch den Prozeß  $\Delta_m$  oder  $\partial/\partial t$  auseinander entstehen und die ihre Anfangswerte den Zeilen des vollständigen Differenzenschemas der Werte  $\Phi_0(v)$  entnehmen:*

	...	-2	-1	0	1	2	...	v	...
$\Delta^0$	...	0	0	$\Phi_0(0)$	$\Phi_0(1)$	$\Phi_0(2)$	...	$\Phi_0(v)$	...
$\Delta^1$	...	0	0	$\Delta \Phi_0(0)$	$\Delta \Phi_0(1)$	$\Delta \Phi_0(2)$	...	$\Delta \Phi_0(v)$	...
$\Delta^2$	...	0	0	$\Delta^2 \Phi_0(0)$	$\Delta^2 \Phi_0(1)$	$\Delta^2 \Phi_0(2)$	...	$\Delta^2 \Phi_0(v)$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Nun hat schon Charlier ganz allgemein den Gedanken ausgesprochen, statistische Verteilungen in Reihen zu entwickeln, die nach den Differenzen einer Funktion fortschreiten, wovon die oben behandelte  $\psi_n$ -Reihe nur ein Spezialfall war. Die zu einer festen  $\bar{\Phi}$ -Funktion gehörige Differenzenfolge dürfte hierzu besonders geeignet sein, da sie einerseits der in vielen Problemen bewährten  $\psi_n$ -Folge so nahe steht, andererseits aber wegen der Freiheit, die in der Wahl der Anfangswerte  $\Phi_0(v)$  liegt, befähigt ist, sich auch komplizierteren Verteilungen, die sich der  $\psi_n$ -Entwicklung nur schlecht fügen wollen, anzuschmiegen<sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Auch in der Differenzenrechnung können die Funktionen  $\bar{\Phi}(m, t)$  vielleicht eine Rolle spielen, da sich der  $\Delta$ -Prozeß an den unendlich vielen Werten  $\Phi_0(v)$  umsetzt in den  $\Delta_m$ -Prozeß an der einen, mit ihnen assoziierten Funktion  $\bar{\Phi}$ .

Man sieht nun, daß von diesem Standpunkt aus die Funktionen  $\psi_n$  in der Tat die einfachsten sind, auf die man verfallen konnte. Sie strahlen von der Funktion  $\psi_0$  aus, und für diese lauten die Anfangswerte einfach:

$$\Phi_0(0) = 1, \quad \Phi_0(1) = 0, \quad \Phi_0(2) = 0, \quad \dots$$

Das Differenzenschema sieht hier so aus:

	...	-2	-1	0	1	2	3	...	$\nu$	...
$\Delta^0$	...	0	0	1	0	0	0	...	0	...
$\Delta^1$	...	0	0	-1	1	0	0	...	0	...
$\Delta^2$	...	0	0	1	-2	1	0	...	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\Delta^n$	...	0	0	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1} \binom{n}{1}$	$(-1)^{n-2} \binom{n}{2}$	$(-1)^{n-3} \binom{n}{3}$	...	$(-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Nach  $n$ -maliger Differenzenbildung ergeben sich die Anfangswerte  $(-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}$ , denn für  $n = 0$  stimmt dieser Wert, und für die höheren  $n$  erweist er sich durch vollständige Induktion als richtig:

$$\begin{aligned}
 \Delta \{ \Delta^n \Phi_0(\nu) \} &= (-1)^{n-(\nu-1)} \binom{n}{\nu-1} - (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \\
 &= (-1)^{n-\nu+1} \left[ \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} \right] \\
 &= (-1)^{(n+1)-\nu} \binom{n+1}{\nu}.
 \end{aligned}$$

(Eingegangen am 13. 2. 1933.)



# Über asymptotische Entwicklungen bei Randwert- aufgaben der Gleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = \lambda^k \psi$ .

Von

Erich Rothe in Breslau.

Zweck der folgenden Zeilen ist, am Beispiel von  $\Delta \Delta u + \lambda u$  zu zeigen, daß die in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> erhaltenen Ergebnisse bezüglich asymptotischer Entwicklungen bei elliptischen Randwertaufgaben zweiter Ordnung sich auch auf Randwertaufgaben höherer Ordnung übertragen lassen. Genauer gesprochen sollen die beiden folgenden Sätze bewiesen werden:

Satz 1. Sei  $\mathfrak{B}$  ein im Endlichen liegender dreidimensionaler Bereich. An seinem Rande seien gewisse lineare *homogene* Randbedingungen  $H$  vorgeschrieben. Vorausgesetzt wird, daß zu diesen Randbedingungen und dem Operator  $\Delta^{(2)} \equiv \Delta \Delta$  eine reelle symmetrische Greensche Funktion  $K(s, t)$ <sup>2)</sup> existiere, die im Sinn der Theorie der Integralgleichungen brauchbar unstetig sei. Es seien ferner  $W_+^{(1)}$  bzw.  $W_-^{(2)}$  die beiden Winkelräume der komplexen  $\lambda$ -Ebene, welche die positive bzw. negative reelle Achse in ihrem Innern enthalten und von den beiden durch den Nullpunkt unter den Winkeln  $\pm \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ ) gegen die reelle Achse gezogenen Geraden begrenzt werden. Ist dann  $\psi(s)$  eine gegebene in  $\mathfrak{B}$   $(4m+4)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $k$  eine beliebige reelle Zahl, so gilt in jedem inneren, vom Rande mehr als  $d$  entfernten Punkte für die Lösung  $v$  der durch die Randbedingungen  $H$  und die Gleichung

$$\Delta^{(2)} v + \lambda v = \lambda^k \psi \quad (\Delta^{(2)} \equiv \Delta \Delta)$$

<sup>1)</sup> E. Rothe, Über asymptotische Entwicklungen bei elliptischen Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen, Math. Annalen 108 (1933), S. 578. Im folgenden mit A. E. zitiert.

<sup>2)</sup> Die Variablen  $s, t$  bedeuten Punkte des Bereiches  $\mathfrak{B}$ . Entsprechend schreiben wir Raumintegrale kurz in der Form  $\int_{\mathfrak{B}} f(t) dt$ .

gegebenen Randwertaufgabe die Darstellung

$$v = \frac{\Psi}{\lambda^{1-k}} - \frac{\Delta^{(1)} \Psi}{\lambda^{2-k}} + \frac{\Delta^{(2)} \Psi}{\lambda^{3-k}} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{\Delta^{(m-2)} \Psi}{\lambda^{m-k}} + P_m$$

mit

$$|P_m| < \frac{C}{\lambda^m + 1 - k},$$

wenn  $\lambda$  außerhalb der Winkelräume  $W_s^{(1)}$  und  $W_s^{(2)}$  liegt;  $C$  ist dabei eine von  $d, \varepsilon, m, \left| \int_{\mathfrak{B}} [K(s, t)]^2 dt \right|$ , dem Inhalt von  $\mathfrak{B}$  und der gegebenen Funktion  $\Psi$ , aber nicht von  $\lambda$  und  $s$  abhängige Konstante.

**Satz 2.** Am Rande des dreidimensionalen Bereiches  $\mathfrak{B}$  seien lineare *inhomogene* von  $\lambda$  unabhängige Randbedingungen  $J$  vorgeschrieben. Zu den zugehörigen homogenen Randbedingungen  $H$  möge eine symmetrische Greensche Funktion  $K(s, t)$  von  $\Delta \Delta$  existieren. Ist dann  $w$  die den Bedingungen  $J$  genügende Lösung der Gleichung

$$\Delta \Delta w + \lambda w = 0$$

und  $\delta > d$  ein Paar positiver Zahlen, so gibt es eine positive Zahl  $\lambda_0$ , so daß folgendes der Fall ist: In jedem inneren Punkte  $s$  von  $\mathfrak{B}$ , der vom Rande um mindestens  $\delta$  entfernt ist, gilt

$$|w| < e^{-|\sqrt{\lambda}| \sin \frac{\pi}{4} d}$$

für alle nicht  $W_s^{(1)}, W_s^{(2)}$  angehörigen  $\lambda$ , deren Betrag oberhalb  $\lambda_0$  liegt.

Zum *Beweise beider Sätze* genügt es nach A. E., Hilfssatz V, und den zum Beweise der Sätze I und II in A. E. (§ 5) gemachten Ausführungen, den folgenden, dem Hilfssatz VI in A. E. entsprechenden Hilfssatz 1 zu beweisen:

**Hilfssatz 1.** Sei  $G(s, t, \lambda)$  in dem dreidimensionalen Bereich  $\mathfrak{B}$  der lösende Kern zu dem symmetrischen brauchbar un stetigen Kern  $K(s, t)$  der Sätze 1, 2. Für  $s \neq t$  genüge also  $G(s, t, \lambda)$  (in  $s$ ) der Gleichung

$$(1) \quad \Delta \Delta G + \lambda G = 0.$$

Ist dann der innere Punkt  $s$  vom Punkte  $t$  und vom Rande des Bereiches  $\mathfrak{B}$  um mehr als  $\eta$  entfernt und ist  $\delta$  eine positive, der Ungleichung

$$(2) \quad 0 < \delta < \eta$$

genügende Zahl, so gibt es ein  $\lambda_0$ , so daß für alle nicht in den Winkelräumen  $W_s^{(1)}, W_s^{(2)}$  gelegenen  $\lambda$ , für welche überdies  $|\lambda| > \lambda_0$  ist,

$$(3) \quad |G(s, t, \lambda)| < e^{-|\sqrt{\lambda}| \sin \frac{\pi}{4} \delta}$$

gilt.

Zum Beweise zeigen wir zunächst die Richtigkeit des folgenden

Hilfssatz 2. Ist  $U$  eine in der Kugel  $k_\eta$  mit dem Mittelpunkt  $s$  und dem Radius  $\eta$  reguläre Lösung der Gleichung

$$(4) \quad \Delta \Delta U + \lambda U = 0,$$

so gilt

$$(5) \quad 2\pi \sqrt{-\lambda} U(s) = \frac{\alpha}{N} \int_{k_\eta} U d\tau + \frac{\beta}{N} \int_{k_\eta} \Delta U d\tau,$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\eta) = \sin \sqrt{-\lambda} \eta - \sin \sqrt{-\lambda} \eta - \sqrt{-\lambda} \eta (\cos \sqrt{-\lambda} \eta - \cos \sqrt{-\lambda} \eta), \\ \beta &= \beta(\eta) = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} \{ \sin \sqrt{-\lambda} \eta + \sin \sqrt{-\lambda} \eta - \sqrt{-\lambda} \eta (\cos \sqrt{-\lambda} \eta \\ (5a) \quad &+ \cos \sqrt{-\lambda} \eta) \}, \\ N &= N(\eta) = 4 \left( \frac{\eta}{\sqrt{-\lambda}} \right)^2 \cos \sqrt{-\lambda} \eta \cos \sqrt{-\lambda} \eta \\ &\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{-\lambda} \eta} (\operatorname{tg} \sqrt{-\lambda} \eta + \operatorname{Irg} \sqrt{-\lambda} \eta) + \frac{1}{(\sqrt{-\lambda} \eta)^2} \operatorname{Irg} \sqrt{-\lambda} \eta \operatorname{tg} \sqrt{-\lambda} \eta \right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen

$$(6) \quad \begin{aligned} v_1(r) &= \frac{\cos \sqrt{-\lambda} r}{r}, \quad v_2(r) = \frac{\cos \sqrt{-\lambda} r}{r}, \quad v_3(r) = \frac{\sin \sqrt{-\lambda} r}{r}, \\ v_4 &= \frac{\sin \sqrt{-\lambda} r}{r}. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind Lösungen von (4). Wendet man daher die für irgend einen Bereich  $\mathfrak{B}'$  und irgend zwei darin viermal stetig differenzierbare Funktionen  $u, v$  gültige Greensche Formel

$$\int_{\mathfrak{B}'} (u \Delta \Delta v - v \Delta \Delta u) d\tau = \int_{\text{Rand von } \mathfrak{B}'} \left( u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} + \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

(n äußere Normale)

auf eine zu  $k_\eta$  konzentrische Kugel vom Radius  $r < \eta$  mit  $u = U$  und  $v = v_r$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) an, so erhält man in der üblichen Weise, wenn man noch die Abkürzung

$$(v) = \frac{\partial \Delta v_r}{\partial r} \int_{O_r} U d\sigma + \frac{\partial v_r}{\partial r} \int_{O_r} \Delta U d\sigma - v_r \int_{O_r} \frac{\partial \Delta U}{\partial r} d\sigma - \Delta v_r \int_{O_r} \frac{\partial U}{\partial r} d\sigma$$

( $O_r$  Oberfläche von  $k_r$ )

einführt,

$$-4\pi (\Delta U - \sqrt{-\lambda} U) = (1),$$

$$-4\pi (\Delta U + \sqrt{-\lambda} U) = (2),$$

$$0 = (3),$$

$$0 = (4).$$

Diese Formeln fassen wir als lineare Gleichungen für die in ( $\nu$ ) auftretenden Oberflächenintegrale mit den Integranden  $U$ ,  $\Delta U$ ,  $\frac{\partial \Delta U}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial r}$  auf. Auflösung nach den beiden erstgenannten liefert nach elementarer Rechnung unter Beachtung von (6):

$$\begin{aligned} \int_{0_r} \Delta U d\sigma &= 2\pi r \sqrt[4]{-\lambda} (\sin \sqrt[4]{-\lambda} r - \sin \sqrt[4]{-\lambda} r) U \\ &\quad + \frac{2\pi r}{\sqrt[4]{-\lambda}} (\sin \sqrt[4]{-\lambda} r + \sin \sqrt[4]{-\lambda} r) \Delta U, \\ \int_{0_r} U d\sigma &= \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \left[ 2\pi r \sqrt[4]{-\lambda} (\sin \sqrt[4]{-\lambda} r + \sin \sqrt[4]{-\lambda} r) U \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi r}{\sqrt[4]{-\lambda}} (\sin \sqrt[4]{-\lambda} r - \sin \sqrt[4]{-\lambda} r) \Delta U \right]. \end{aligned}$$

Integration über  $r$  von 0 bis  $\eta$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{k_\eta} \Delta U dt &= 2\pi \sqrt[4]{-\lambda} U A + 2\pi \frac{\Delta U}{\sqrt[4]{-\lambda}} B, \\ \sqrt[4]{-\lambda} \int_{k_\eta} U dt &= 2\pi \sqrt[4]{-\lambda} U B + 2\pi \frac{\Delta U}{\sqrt[4]{-\lambda}} A \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta}{\sqrt[4]{-\lambda}} \{ \cos \sqrt[4]{-\lambda} \eta + \cos \sqrt[4]{-\lambda} \eta \} - \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \{ \sin \sqrt[4]{-\lambda} \eta + \sin \sqrt[4]{-\lambda} \eta \}, \\ B &= \frac{\eta}{\sqrt[4]{-\lambda}} \{ \cos \sqrt[4]{-\lambda} \eta - \cos \sqrt[4]{-\lambda} \eta \} - \frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda}} \{ \sin \sqrt[4]{-\lambda} \eta - \sin \sqrt[4]{-\lambda} \eta \}. \end{aligned}$$

Auflösung dieser Gleichungen für  $U$  und  $\Delta U$  nach  $2\pi \sqrt[4]{-\lambda} U$  liefert die Behauptung (5).

Nunmehr gehen wir zum *Beweis von Hilfssatz 1* über. Da  $G(s, t, \lambda)$  als Funktion des ersten Arguments innerhalb  $k_\eta$  eine *reguläre* Lösung von (1) ist, so können wir in (5)

$$(7) \quad U(s) = G(s, t, \lambda)$$

setzen. Setzen wir ferner  $\sqrt[4]{-\lambda} = a + ib$ , so sind (für  $\lambda \neq 0$ ) wegen des Ausschlusses von  $W^{(3)}_1$   $a$  und  $b \neq 0$ , und da die Gleichung (5) für jede der vier Bestimmungen von  $\sqrt[4]{-\lambda}$  gilt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(8) \quad a > 0, \quad b > 0$$

annehmen. Drückt man nun die in (5a) auftretenden trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen durch die  $e$ -Funktion aus, so sieht man durch elementare Rechnung ein, daß für  $\lambda \rightarrow \infty$  (also auf Grund des Ausschlusses des Winkelraumes  $W_i^{(g)}$  für  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ )

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}{2} \left\{ e^{b \eta} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}\right) \right) - e^{a \eta} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}\right) \right) \right\}, \\ \beta &= \frac{\eta}{2 \sqrt[4]{-\lambda}} \left\{ e^{b \eta} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}\right) \right) + e^{a \eta} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}\right) \right) \right\}, \\ N &= 4 \left( \frac{\eta}{\sqrt[4]{-\lambda}} \right)^3 e^{(a+b) \eta} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{-\lambda \eta}}\right) \right\} \end{aligned}$$

ist, wobei  $O$  das Landausche Symbol bedeutet.

Was nun die Integrale in (5) betrifft, so bemerken wir, daß nach A. E. Hilfssatz III

$$(10) \quad \left| \int_{k_\eta} G(s, t, \lambda) dt \right| \leq C_2$$

ist, wobei die Konstante  $C_2$  (für  $t \in \mathfrak{B}$ ) nur von  $\varepsilon$ ,  $\text{Max} \int_{\mathfrak{B}} [K(s, t)]^2 dt$

und dem Inhalt des Bereiches  $\mathfrak{B}$  abhängt. Das andere abzuschätzende Integral in (5) ist nach (7)

$$U_1(t) = \int_{k_\eta} \Delta U d\tau = \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) \Delta_\tau G(\tau, t, \lambda) d\tau^3,$$

wenn

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{in } k_\eta \\ 0 & \text{außerhalb } k_\eta \end{cases}$$

gesetzt ist. Aus der Relation zwischen Kern und lösendem Kern

$$G(\tau, t, \lambda) = K(\tau, t) + \lambda \int_{\mathfrak{B}} G(\tau, \vartheta, \lambda) K(\vartheta, t) d\vartheta$$

folgt durch Differentiation

$$\Delta_\tau G(\tau, t, \lambda) = \Delta_\tau K(\tau, t) + \lambda \int_{\mathfrak{B}} \Delta_\tau G(\tau, \vartheta, \lambda) K(\vartheta, t) d\vartheta^4.$$

Multiplikation mit  $\varphi(\tau)$  und nachfolgende Integration liefert für  $U_1(t)$  die Integralgleichung.

$$(11) \quad U_1(t) - \lambda \int_{\mathfrak{B}} K(\vartheta, t) U_1(\vartheta) d\vartheta = \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) \Delta_\tau K(\tau, t) d\tau.$$

<sup>3)</sup> Der Index  $\tau$  bei  $\Delta_\tau$  soll andeuten, daß nach  $\tau$  zu differenzieren ist.

<sup>4)</sup> Die Differentiation unter dem Integral ist erlaubt. Man beachte hierzu, daß  $\tau$  eine Grundlösung von  $\Delta \Delta u = 0$  und daß  $\Delta \tau = \frac{2}{r}$  ist.

Sind  $u_i$  die Eigenfunktionen und  $\lambda_i$  die zugehörigen Eigenwerte des symmetrischen Kernes  $K(\theta, t)$ , so lautet die Lösung von (11)

$$U_1(t) = \int_{\mathfrak{B}} \varphi(\tau) \Delta_\tau K(\tau, t) d\tau + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{u_i(t)}{\lambda_i - \lambda} \iint_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}} u_i(\theta) \varphi(\tau) \Delta_\tau K(\tau, \theta) d\tau d\theta \right\}.$$

Für alle außerhalb der Winkelräume  $W_s^{(1)}$ ,  $W_s^{(2)}$  gelegenen  $\lambda$  ist daher auf Grund der Schwarzsehen und Besselschen Ungleichung

$$\begin{aligned} U_1(t) &\leq \int_{k_\eta} |\Delta_\tau K(\tau, t) d\tau| + \frac{|\lambda|}{\sin \varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{u_i(t)}{\lambda_i} \iint_{\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}} u_i(\theta) \varphi(\tau) \Delta_\tau K(\tau, \theta) d\tau d\theta \right| \\ &\leq \int_{k_\eta} |\Delta_\tau K(\tau, t) d\tau| + \frac{|\lambda|}{\sin \varepsilon} \sqrt{\int_{\mathfrak{B}} [K(t, \tau)]^2 d\tau \cdot \int_{\mathfrak{B}} \left[ \int_{k_\eta} |\Delta_\tau K(\tau, \theta) d\tau| \right]^2 d\theta}. \end{aligned}$$

Also ist für  $|\lambda| \geq \lambda' > 0$

$$(12) \quad U_1(t) \leq C_2 |\lambda| \quad (t \in \mathfrak{B}),$$

wo die Konstante  $C_2$  von  $\lambda'$  und  $\varepsilon$ , aber nicht von  $\lambda$  oder  $t$  abhängt. Aus (9), (10) und (12) im Verein mit (5) und (7) folgt nun für  $|\lambda| \geq \lambda'$

$$(13) \quad |G(s, t, \lambda)| < \text{Const} \cdot |\sqrt[4]{\lambda}|^5 e^{-\eta \cdot \text{Min}(a, b)} \\ (s, t \in \mathfrak{B}),$$

wo Const von  $\lambda'$ ,  $\varepsilon$  und  $\eta$ , aber nicht von  $\lambda$ ,  $s$  oder  $t$  abhängt.

Da nun  $\lambda$  in keinem der Winkelräume  $W_s^{(1)}$ ,  $W_s^{(2)}$  liegt, so liegt bei der Festsetzung (8)  $\arccos \sqrt[4]{-\lambda}$  zwischen  $\varepsilon/4$  und  $\pi/2 - \varepsilon/4$ , woraus man leicht auf

$$(14) \quad \text{Min}(a, b) \geq \sqrt[4]{|\lambda|} \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \left( 0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

schließt. Aus (13) und (14) folgt aber sofort (3), wenn man noch (2) beachtet. Hilfssatz 1 und also auch die eingangs angeführten Sätze 1 und 2 sind damit bewiesen.

(Eingegangen am 24. 3. 1933.)

## On the properties of domains and their boundaries in $E_n$ <sup>1)</sup>.

By

R. L. Wilder in Ann Arbor, Mich. (USA.).

In his work "Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten"<sup>2)</sup>, Schoenflies supplied definite direction and method for the topological investigation of plane sets of points. He gave special attention to the relation of continua, especially Jordan continua<sup>3)</sup>, to their complementary domains; his results concerning common boundaries of two domains, the converse of the Jordan curve theorem, and the characterization of Jordan continua by external properties, are classic. Although those topologists who proceeded in the direction which he indicated have virtually cleared up the topology of plane point sets, our knowledge of corresponding topological properties of point sets in higher dimensions is relatively meager. It is apparent, indeed, that there has grown up a feeling among topologists that the results obtained by Schoenflies are in great part not extendible to higher dimensions<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> The contents of this paper were presented to the American Mathematical Society in three parts: (1) *A converse of the theorem regarding the separation of  $E_3$  by a closed two-dimensional manifold of genus  $p$*  (Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930), p. 219, abstract no. 196); (2) second paper, under same title as (1) (ibid. 37 (1931), p. 519, abstract no. 236); (3) *On Jordan continua that are the common boundaries of two or more domains in  $E_n$*  (ibid. 37, p. 525, abstract no. 258). The main results of (1) and (2) are embodied in Theorems 16 and 20 of the present paper, and were originally obtained by very different although much more complicated methods than those used in the present instance. It was because the author recognized that the results of (3) could be used to obtain simpler proofs of the theorems given in (1) and (2) that the above papers are here combined.

<sup>2)</sup> Ergänzungsband, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., 1908.

<sup>3)</sup> A *Jordan continuum* is a compact, connected and locally connected point set. Such continua are also variously termed *continuous curves*, *Peano continua* or simply *locally connected continua*.

<sup>4)</sup> See, for instance, G. Feigl, *Geschichtliche Entwicklung der Topologie*, Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. 37 (1928), pp. 273—286.



The reasons for this state of affairs, are, I believe, not difficult to ascertain. The so-called set-theoretic method, based on the neighborhood-limit point notion, which has been almost exclusively used in carrying on the researches begun by Schoenflies in the plane, is only partially the method used by Schoenflies, who made strong use of the properties of polyhedrals and the Riemann connectivity numbers, and who indicated in his paragraphs entitled "Ausdehnung auf den Raum" that in extending his results to higher dimensions, account must be taken of the connectivity of higher dimensional polyhedrals<sup>5</sup>). The fact that it has been fairly well established that the set-theoretic method alone is sufficient for plane topology, should not blind us to the possibility that in attempting to extend results to higher dimensions we must at least adopt the complete method of Schoenflies.

I have already indicated, in a previous work devoted to the converse of the "Jordan curve theorem" in  $E_3$ <sup>6</sup>), what I believe to be the higher dimensional analogue of Schoenflies' method. This consists in the use not only of the set theoretic properties of a point set  $M$  but of what we may call the combinatorial properties of  $M$ <sup>7</sup>). In this manner the properties in the large are made manifest, as well as the local properties exhibited by the set-theoretic method<sup>8</sup>).

It is the purpose of the present paper, by continued use of this unified method, to obtain results which are the higher dimensional analogue of much of Schoenflies' work concerning domains and their boundaries in the plane. We shall find it expedient to introduce the finer methods of the pure combinatorial topology as begun by Brouwer<sup>9</sup>) in his amendments to the work of Schoenflies and later developed by Vie-

<sup>5</sup>) See, for instance, the latter part of chapter 5 of Schoenflies' work cited above.

<sup>6</sup>) R. L. Wilder, *A converse of the Jordan-Brouwer separation theorem in three dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **32** (1930), pp. 632—657.

<sup>7</sup>) We shall use the "modulo 2" combinatorial topology throughout, since it seems sufficient to achieve the desired results. For an exposition of this see O. Veblen, *Analysis Situs*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 5, part II, 1931 (2nd ed.). A brief exposition which is sufficient for the purposes of the present paper will be found in the paper cited in <sup>8</sup>) below.

<sup>8</sup>) See my paper *Point sets in three and higher dimensions and their investigation by means of a unified analysis situs*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), pp. 649—692.

<sup>9</sup>) L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Math. Ann. **72** (1912), pp. 422—425.

toris<sup>10</sup>). I shall first consider some fundamental questions concerning common boundaries of two or more domains, with special reference to Jordan continua and to the higher connectivity of the domains and their interlinking. In conclusion I shall give what we may say is the complete solution of the problem of extending Schoenflies' converse of the Jordan curve theorem to  $E_3$ .

It was shown by Brouwer<sup>11</sup>) that a plane closed curve, that is, a continuum which is the common boundary of all its (at least two) complementary domains, may bound more than two mutually exclusive domains. In his investigations concerning irreducible cuts of the plane<sup>12</sup>). Kuratowski determined that a closed curve which has more than two such complementary domains is either an indecomposable continuum or the sum of two indecomposable continua.

For the sake of uniformity, a compact, connected, metric space of dimension  $m$  whose Brouwer number  $p^m(M) > 0$  but such that if  $K$  is a closed proper subset of  $M$  then  $p^m(K) = 0$ , we shall call (following Alexandroff) a *closed cantorion manifold of dimension  $m$* <sup>13</sup>). In particular, then, a continuum in  $E_n$  which is the common boundary of all its complementary domains is a closed cantorion manifold of dimension  $n - 1$  and conversely.

We may first ask, in view of the results of Brouwer and Kuratowski just referred to: Do there exist, in  $E_3$ , closed cantorion manifolds that bound more than two domains, and that are neither indecomposable nor the sum of two indecomposable continua? We shall prove the following theorem:

**Theorem 1.** *There exists, in  $E_3$ , a surface  $S_1$  which is both a Jordan continuum and a closed cantorion manifold, and which bounds three (any finite number  $> 2$  of, or a denumerable infinity of) domains<sup>14</sup>).*

**Proof.** We shall first construct the surface  $S_1$ . We use a method similar to that employed by Wada in the construction of an indecompo-

<sup>10</sup>) L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), pp. 454–472. See also P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. 30 (1928–29), pp. 101–187.

<sup>11</sup>) L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68 (1910), pp. 422–444. See also the example of Wada referred to below.

<sup>12</sup>) C. Kuratowski, *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 130–145.

<sup>13</sup>) See the memoir of Alexandroff cited in <sup>10</sup>).

<sup>14</sup>) It is well known that no Jordan continuum is an indecomposable continuum. This fact follows easily, for instance, from the property of local connectedness and a theorem of Knaster and Kuratowski. See B. Knaster and C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), pp. 206–255, Th. VI.

sable continuum in the plane<sup>15</sup>). Let us start with the set of all points  $(x, y, z)$  in cartesian three-space such that:

$$(1) \quad x^3 - x + y^3 + z^3 \geq 0.$$

$$(2) \quad x^3 + x + y^3 + z^3 \geq 0.$$

$$(3) \quad x^3 + y^3 + z^3 \leq 1.$$

Denote this set of points by  $S$ . Also, denote the set of all points of space that fail to satisfy the single condition (i) by  $D_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ); thus  $E_3 - S = D_1^0 + D_2^0 + D_3^0$ .

We first proceed as follows: From  $D_1^0$  we "bore" a "tunnel" into  $S$  expanding  $D_1^0$  into a domain  $D_1^1$  whose boundary is a topological 2-sphere not meeting  $F(D_2^0)$  or  $F(D_3^0)$ <sup>16</sup>, and such that every point of  $S - S \cdot D_1^1$  is within a distance unity from some point of  $D_1^1$ .

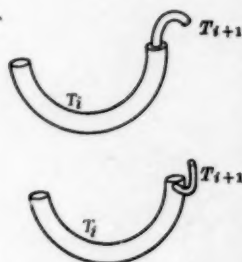


Fig. 1.

This tunnel is to be formed by boring out pieces bounded by semi-tori  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ), which may vary in size, and which may be joined consecutively in any manner (see figure 1) provided that the joining be such that it is impossible to join points of two non-consecutive semi-tori by a straight line interval which lies, except for its endpoints, within the tunnel. Furthermore, these semi-tori are not to lap back upon one another — more explicitly,  $T_i$  and  $T_j$  have points in common if and only if  $j = i - 1$  or  $j = i + 1$ , and no  $T_i$  meets  $F(D_1^0)$  unless  $i = 1$ .

We next bore a tunnel into  $S - S \cdot D_1^1$ , using semi-tori as above, expanding  $D_2^0$  into a domain  $D_2^1$  whose boundary is a topological 2-sphere, such that every point of  $S - S \cdot (D_1^1 + D_2^1)$  is within a distance unity from some point of  $D_2^1$ , and such that  $\bar{D}_2^1 \cdot (\bar{D}_1^1 + \bar{D}_3^0) = 0$ . We then expand  $D_3^0$  into a domain  $D_3^1$  satisfying similar conditions. This completes the first stage of the procedure.

The  $n$ 'th ( $n > 1$ ) stage of the procedure begins as follows: Proceeding from  $D_1^{n-1}$ , we expand this domain into a domain  $D_1^n$  by boring into  $S - S \cdot (D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + D_3^{n-1})$  as in the first stage, such that (1) every point of  $S$  not already tunneled out is within a distance  $1/n$  from some point of  $D_1^n$ , (2) every semi-torus that is used in this step is of diameter  $< 1/n$ , and (3)  $F(D_1^n)$  is a topological 2-sphere that meets neither  $F(D_2^{n-1})$  nor  $F(D_3^{n-1})$ . The expansions of  $D_2^{n-1}$  and  $D_3^{n-1}$  into  $D_2^n$

<sup>15</sup> See the memoir of K. Yoneyama, *Theory of continuous sets of points*, Tôhoku Math. Journ. 12 (1917). p. 60.

<sup>16</sup> If  $D$  is a domain, by  $F(D)$  we mean the boundary, or frontier, of  $D$ .

and  $D_3^n$  respectively will no doubt now be obvious to the reader from analogy to what has already been said.

Denoting the set of points  $D_i^n - D_i^{n-1}$  by  $A_i^n$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) we define the following sets of points:

$$S_1 = S - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 A_i^n$$

$$D_i = D_i^0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_i^n \quad (i = 1, 2, 3).$$

That  $S_1$  is the common boundary of  $D_1$ ,  $D_2$  and  $D_3$  is readily seen, and that  $E_3 - S_1 = D_1 + D_2 + D_3$  is obvious, thus assuring us that  $S_1$  is a closed cantorion manifold. (The connectedness of  $S_1$  follows from a theorem of Brouwer<sup>17</sup>), although this fact may be established independently by using the method which we give immediately in showing  $S_1$  locally connected, to establish that  $S_1$  is arcwise connected.)

To show that  $S_1$  is a Jordan continuum, it is necessary only to show that it is locally connected. Let  $P$  be any point of  $S_1$  and  $\epsilon$  any positive number. We distinguish two cases, by noting that  $P$  may be a point in either of two sets  $M_1$ ,  $M_2$ , defined as follows:

$$M_1 = S_1 \cdot \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 F(D_i^n) \right],$$

$$M_2 = S_1 - M_1.$$

If  $P$  is a point of  $M_2$ , there is a number  $\delta > 0$  such that  $\delta < \epsilon/4$  and if  $x$  is a point of  $M_1$  whose distance from  $P$  is less than  $\delta$ , then  $x$  is in an  $F(A_i^n)$  such that  $1/n < \epsilon/4$ . Let  $Q$  be any point of  $S_1$  whose distance from  $P$  is less than  $\delta$ , and let  $PQ$  denote the straight line interval whose endpoints are  $P$  and  $Q$ . If all points of  $PQ$  belong to  $S_1$ , then  $P$  and  $Q$  are joined by an arc of  $S_1$  of diameter  $< \epsilon$ . Suppose  $x$  is a point of  $PQ$  not in  $S_1$ . Then the component of  $PQ - S_1 \cdot PQ$  determined by  $x$  is an open interval of  $PQ$  with endpoints  $a$  and  $b$ , say. Clearly the points  $a$  and  $b$  belong to  $M_1$ . Suppose they belong to  $F(A_1^n)$  (they may, it is true, belong to consecutive  $F(A_1^n)$ , but this case is handled similarly to the case in hand). Then  $a$  and  $b$  either both belong to the same semi-torus used in the construction of  $A_1^n$ , or to consecutive semi-tori; since the semi-tori used in the construction of  $A_1^n$  are all of diameter  $< 1/n$  (which is, in turn,  $< \epsilon/4$ ),  $a$  and  $b$  are joined by an arc of  $M_1$  which lies either wholly on one semi-torus or on two semi-tori that entered into the construction of  $A_1^n$ ; such an arc is of

<sup>17</sup>) L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, Math. Ann. 69 (1910), pp. 169—175.

diameter  $< \varepsilon/2$  and will be denoted by  $t_{a_3}$ . Clearly every point of  $t_{a_3}$  is at a distance less than  $\varepsilon$  from  $P$ .

As the points of  $PQ - S_1 \cdot PQ$  form a denumerable set of open intervals  $ab$ , the arcs obtained as indicated above form a denumerable set of arcs  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , whose diameters converge to zero. Then the set

$$t = S_1 \cdot PQ + \sum_{i=1}^{\infty} t_i$$

is a Jordan continuum and therefore contains an arc  $s$  joining  $P$  and  $Q$ . Thus,  $P$  and  $Q$  are joined by an arc of  $S_1$  of diameter  $< \varepsilon$ .

The case where  $P$  is a point of  $M_1$  offers no difficulty in view of what we have shown above. If  $P$  is a point of  $F(D_1^*)$ , we must stipulate, in addition to conditions analogous to those above, that  $\delta$  is such that if  $x$  and  $y$  are points of  $\sum_{n=k-1}^{k+1} F(A_i^n)$  whose distances from  $P$  are less than  $\delta$ , then they are joined by an arc of  $S_1 \cdot \left[ \sum_{n=k-1}^{k+1} F(A_i^n) \right]$  whose diameter is  $< \varepsilon/2$ . The construction of the arc  $s$  then proceeds practically as before.

It follows, then, that  $S_1$  is locally connected and therefore a Jordan continuum. This completes the proof of the theorem for the case of three complementary domains.

To obtain  $n$  ( $n > 3$ ) complementary domains, we of course proceed in a similar fashion, starting, however, with  $n$  domains  $D_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) complementary to  $S$ . To obtain a denumerable infinity of domains, we start with a denumerable set of domains complementary to  $S$ , whose diameters converge to zero, and which converge to a common limiting point in  $S$ . The construction of tunnels then proceeds by the common diagonal procedure through the set of domains.

Let us inquire more closely into the properties of the surface  $S_1$ . We assert: (a) *The Brouwer number  $p^1(E_3 - S_1) = 0$ ; indeed, the 1-cycles of  $E_3 - S_1$  bound uniformly in  $E_3 - S_1^{18}$* ; (b) *no arc of  $S_1$  disconnects  $S_1$ ; and* (c) *no simple closed curve of  $S_1$  disconnects  $S_1$ .*

The proof that  $p^1(E_3 - S_1) = 0$  is simple. Suppose  $I^1$  is a 1-cycle of  $E_3 - S_1$ . Without loss of generality, we may assume that  $I^1$  is an irreducible cycle, hence connected, and therefore a subset of one complementary domain, say  $D_1$ , of  $S_1$ . Clearly, then, there exists an  $n$  such that  $I^1$  is contained in  $D_1^n$ . But  $D_1^n$  is a domain complementary to the

<sup>18</sup> If  $G$  is an open subset of  $E_n$  we shall say that the  $i$ -cycles ( $i < n$ ) bound uniformly in  $G$  or are uniformly homologous to zero in  $G$  if  $p^i(G) = 0$  and for every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta > 0$  such that every  $i$ -cycle of  $G$  of diameter  $< \delta$  bounds a complex in  $G$  of diameter  $< \varepsilon$ .

topological sphere  $F(D_1^n)$  and consequently  $\Gamma^1 \sim 0$  in  $D_1^n$ , and hence in  $E_n - S_1$ .

The rest of property (a) now follows from the following theorem:

**Theorem 2.** *In  $E_n$ , let  $M$  be a Jordan continuum, and  $D$  a domain complementary to  $M$  such that the boundary,  $M'$ , of  $D$  has no cut point. Then if the  $(n-2)$ -cycles of  $D$  all bound in  $D$ , they are uniformly homologous to zero in  $D$ .*

**Proof.** For purposes of symmetry, let us add the point at infinity to  $E_n$  so that we may consider  $M$  as imbedded in the euclidean  $n$ -dimensional sphere  $H_n$ . If the  $(n-2)$ -cycles of  $D$  are not uniformly homologous to zero in  $D$ , there is a positive number  $\varepsilon$  and a point  $P$  of  $M$  such that for every number  $\delta > 0$  there exists, in  $D \cdot S(P, \delta)$ , an  $(n-2)$ -cycle that is not homologous to zero in  $D \cdot S(P, \varepsilon)^{19}$ .

It is now necessary to know that  $P$  is not a cut-point of  $M$ . For this purpose we note the following lemma:

**Lemma 1.** *In  $E_n$ , a cut-point of the boundary of a domain  $D$  complementary to a compact continuum  $M$  is also a cut-point of  $M$ ^{20}.*

**Proof.** Let  $M'$  denote the boundary of  $D$  and let  $P$  be a point of  $M'$  such that  $M' - P$  is the sum of two mutually separated sets  $U$  and  $V$ . Let  $A$  and  $B$  denote points of  $U$  and  $V$ , respectively. By a theorem of Knaster and Kuratowski<sup>21</sup>), there is a continuum  $K$  which separates  $A$  and  $B$  in  $E_n$  and which contains no point of  $M' - P$ . By a theorem of Mazurkiewicz<sup>22</sup>), there is a subset  $C$  of  $K$  which forms an irreducible cut of  $E_n$  between  $A$  and  $B$ . As  $C$  is an  $(n-1)$ -dimensional closed cantorion manifold, the set  $C - P$  is connected<sup>23</sup>.

As  $A$  and  $B$  are boundary points of  $D$ , it is clear that  $D \cdot (C - P) \neq 0$ . Then, since  $M' \cdot (C - P) = 0$ ,  $C - P$  must be a subset of  $D$ . Consequently,  $M \cdot (C - P) = 0$ . Thus  $C \cdot M = P$ , and as  $C$  separates the points  $A$  and  $B$  of  $M$ , the set  $M - P$  is not connected.

To return to the proof of Theorem 2: Since, by Lemma 1,  $P$  cannot be a cut-point of  $M$ , there exists an  $M$ -domain<sup>24</sup>)  $H$  containing  $P$  and

<sup>19</sup>) For any positive number  $\delta$  the symbol  $S(P, \delta)$  denotes the set of all points of space whose distance from  $P$  is  $< \delta$ . The boundary of  $S(P, \delta)$  we shall denote by  $F(P, \delta)$ .

<sup>20</sup>) For the case  $n = 2$  see G. T. Whyburn, *Concerning continua in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), pp. 369-400, Theorem 19. For the converse of this lemma see R. L. Moore, *Concerning the common boundary of two domains*, Fund. Math. 6 (1924), pp. 203-213, Theorem 8.

<sup>21</sup>) Loc. cit., Theorem XXXVII, which holds in  $E_n$ .

<sup>22</sup>) S. Mazurkiewicz, *Sur un ensemble G<sub>s</sub>, punctiforme, qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire*, Fund. Math. 1 (1920), pp. 61-81, Theorem I.

<sup>23</sup>) See P. Alexandroff, loc. cit., p. 154.

<sup>24</sup>) An  $M$ -domain is a connected open subset of  $M$ .

lying in  $S(P, \varepsilon)$ , such that  $M - H$  is connected<sup>25</sup>). Let  $\delta$  be a positive number such that  $M \cdot S(P, \delta) \subset H$ . Let  $\Gamma^{n-2}$  denote any  $(n-2)$ -cycle of  $D \cdot S(P, \delta)$ , and let  $\bar{H} - H = F = \bar{H} \cdot (M - H)$ . Then there exist complexes  $\Gamma_i^{n-1}$  such that

$$(4) \quad \begin{aligned} \Gamma_1^{n-1} &\rightarrow \Gamma^{n-1} [D; H_n - \bar{H}] \\ \Gamma^{n-1} &\rightarrow \Gamma^{n-2} [S(P, \delta); H_n - [(M - H) + F(P, \varepsilon)]] \end{aligned}$$

Let the cycle  $\Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}$  be denoted by  $\Gamma^{n-1}$ . The complement of  $\Gamma^{n-1}$  is a finite number of domains. Furthermore,  $M - H$  is a continuum which does not meet  $\Gamma^{n-1}$ . For

$$\begin{aligned} \Gamma^{n-1} \cdot (M - H) &= (\Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}) \cdot (M - H) \\ &\subset \Gamma_1^{n-1} \cdot (M - H) + \Gamma_2^{n-1} \cdot (M - H) = 0. \end{aligned}$$

Consequently  $M - H$  lies wholly in one of the domains complementary to  $\Gamma^{n-1}$ . Then from the domains complementary to  $\Gamma^{n-1}$  that do not contain  $M - H$  we may form an  $n$ -complex bounded by  $\Gamma^{n-1}$ ; that is,

$$(5) \quad \Gamma^{n-1} \sim 0 [H_n - (M - H); H_n - F].$$

But

$$(6) \quad \bar{H} \cdot [(M - H) + F(P, \varepsilon)] = \bar{H} \cdot (M - H) = F,$$

and

$$(7) \quad \bar{H} + (M - H) + F(P, \varepsilon) = M + F(P, \varepsilon).$$

Then from relations (4)–(7) and the Alexander Addition Theorem<sup>26</sup>) we have that  $\Gamma^{n-2} \sim 0$  in  $D \cdot S(P, \varepsilon)$ . As  $\Gamma^{n-2}$  was any  $(n-2)$ -cycle of  $D \cdot S(P, \delta)$ , the theorem is proved.

Since a (compact) common boundary of two domains has no cut point, we have the following corollary of Theorem 2.

**Corollary 1.** *If a common boundary of (at least) two domains in  $E_n$  is a Jordan continuum and  $D$  is one of these domains such that all  $(n-2)$ -cycles of  $D$  bound in  $D$ , then the  $(n-2)$ -cycles of  $D$  are uniformly homologous to zero in  $D$ .*

It is clear that the proof of Theorem 2 may be adapted to prove the following theorem:

**Theorem 2a.** *If, in Theorem 2, the condition that the  $(n-2)$ -cycles of  $D$  all bound in  $D$  be replaced by the condition that there exists an  $\varepsilon > 0$  such that all  $(n-2)$ -cycles of  $D$  of diameter less than  $\varepsilon$  bound in  $D$ , then the set of all  $(n-2)$ -cycles of the latter type bound uniformly in  $D$ .*

<sup>25</sup>) R. L. Wilder, *On the imbedding of subsets of a metric space in Jordan continua*, Fund. Math. 19 (1932), pp. 45–64.

<sup>26</sup>) J. W. Alexander, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), pp. 333–349, Corollary  $W^1$ . For future reference we note that Theorem *F* of this paper is what is known as the Alexander Duality Theorem.



Theorem 2a is applicable to such cases as, for instance, the case where  $M$  is a 2-dimensional manifold of optional connectivity in  $E_3$ .

Preparatory to showing that the surface  $S_1$  has property (b) we prove the following theorem:

**Theorem 3.** *Let  $M$  be an  $m$ -dimensional closed cantorian manifold, and  $K$  a closed subset of  $M$  such that  $p^{m-1}(K) = k$ . Then  $M - K$  has at most  $k + 1$  components.*

**Proof.** By the Menger imbedding theorem<sup>27</sup>, there exists an  $n (= 2m + 1)$  such that  $M$  can be imbedded in  $E_n$ . As  $M$  is an  $m$ -dimensional closed cantorian manifold,  $p^m(M) > 0$ , and there is accordingly an  $(n - m - 1)$ -cycle,  $\Gamma^{n-m-1}$ , which links  $M$  in  $E_n$ <sup>28</sup>.

Suppose, now, that  $M - K$  has at least  $k + 2$  components. Then there exists a separation

$$M - K = M_1 + M_2 + \dots + M_{k+2},$$

where the  $M_i$  are mutually separated sets. As the set of points  $\sum_{i=1}^{k+2} M_i + K$  is a proper closed subset of  $M$ , and  $M$  is a closed cantorian manifold,

$$(8) \quad p^m \left( \sum_{i=1}^{k+2} M_i + K \right) = 0.$$

By virtue of (8), there exists a complex  $M_i^{n-m}$  such that

$$(9) \quad M_i^{n-m} \rightarrow \Gamma^{n-m-1} \left[ E_n - \left( \sum_{i=1}^{k+2} M_i + K \right) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, k+2).$$

Consider the cycles

$$(10) \quad \gamma_j^{n-m} = M_1^{n-m} + M_j^{n-m} \quad (j = 2, 3, \dots, k+2).$$

We shall show that the cycles (10) form a set of  $k + 1$  cycles which are linearly independent with respect to homologies in  $E_n - K$ . For suppose there exists a homology

$$(11) \quad \gamma_{j_1}^{n-m} + \gamma_{j_2}^{n-m} + \dots + \gamma_{j_h}^{n-m} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

By (10), this homology may be expressed as follows:

$$(11') \quad M_{j_1}^{n-m} + (M_1^{n-m} + \gamma_{j_2}^{n-m} + \dots + \gamma_{j_h}^{n-m}) \sim 0 \quad (E_n - K).$$

<sup>27</sup> See K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 295.

<sup>28</sup> By well-known duality relations. See P. Alexandroff, *Über die Dualität zwischen den Zusammenhangszahlen einer abgeschlossenen Menge und des zu ihr komplementären Raumes*, Gött. Nachr. 1927, p. 323; F. Frankl, *Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Prim-Enden-Theorie*, Wien. Akad. d. Wiss., Math.-Naturw. Kl., Sitz., Abt. 2 A, 136 (1927), pp. 689-699; P. Alexandroff, loc. cit., pp. 156 ff; S. Lefschetz, *Closed point sets on a manifold*, *Annals of Math.* 29 (1928), pp. 232-254.

But from relations (9) we have the following bounding relations:

$$(12) \quad M_{j_1}^{n-m} \rightarrow \Gamma^{n-m-1} \left[ E_n - \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{k+2} M_s + K \right) \right]$$

$$M_1^{n-m} + \gamma_{j_2}^{n-m} + \dots + \gamma_{j_k}^{n-m} \rightarrow \Gamma^{n-m-1} [E_n - (M_{j_1} + K)],$$

and applying the Alexander Addition Theorem we have, by virtue of (11') and (12) that

$$(13) \quad \Gamma^{n-m-1} \sim 0 \quad (E_n - M),$$

which stands in contradiction to the fact that  $\Gamma^{n-m-1}$  links  $M$ .

We have shown, then, that if  $M$  has at least  $k+2$  components, there exists a set of  $k+1$  linearly independent  $(n-m)$ -cycles (10) in  $E_n - K$ . As this contradicts the fact that

$$p^{n-m}(E_n - K) = p^{m-1}(K) = k^{28},$$

we must conclude that  $M - K$  has at most  $k+1$  components.

We now note that the fact that  $M$  is a closed cantorion manifold was used in the proof of Theorem 3 essentially to obtain relations (9). However, if  $M$  is given as a common boundary of two domains in  $E_n$ , not necessarily a closed cantorion manifold, the relations (9), with  $n-m=1$ , are obtainable without relations (8) (which may not now hold) by making use of the fact that if  $D_1$  and  $D_2$  are domains of which  $M$  is a common boundary, and  $P$  is a point of  $M$ , there exists a simple 1-complex joining arbitrary points of  $D_1$  and  $D_2$  which meets  $M$  only in an arbitrarily small neighborhood of  $P$ . Consequently we have the following theorem:

**Theorem 4.** (Generalized Urysohn-Alexandroff Theorem.) *If a compact set  $M$  is the common boundary of two domains in  $E_n$ , and  $K$  is a closed subset of  $M$  such that  $p^{n-2}(K) = k$ , then  $M - K$  has at most  $k+1$  components.*

In particular, if  $K$  is of dimension  $\leq n-3$ , then  $p^{n-2}(K) = 0$ , and  $M - K$  is connected (Urysohn-Alexandroff)<sup>29</sup>; and in any case, if  $p^{n-2}(K) = 0$ ,  $M - K$  is connected (Alexandroff)<sup>30</sup>.

For the general theory of Jordan continua, especially in  $E_3$ , the following corollary of Theorem 4 is of special interest:

**Corollary 2.** *Let  $M$  be a Jordan continuum which is a common boundary of (at least) two domains in  $E_n$ . Then 1) no arc of  $M$  dis-*

<sup>29</sup> Proved for  $n=3$  and suggested for the general case by Urysohn; see P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantorienes*, Fund. Math. 7 (1925), pp. 30-137 (especially p. 123) and ibid. 8 (1926), pp. 225-356 (especially pp. 311-313). Proved for the general case by P. Alexandroff, loc. cit. (p. 154).

<sup>30</sup> See P. Alexandroff, loc. cit. (p. 154).



and combining relations (15') and (16) we see that  $M$  does not separate  $P_1$  and  $P_2$ , thus yielding a contradiction.

Suppose, then, an *odd* number of the  $\eta_i$ 's are different from zero. First, suppose *only*  $\eta_1 \neq 0$ . Then we have

$$(17) \quad \Gamma^1 \sim M_1^{(1)} + M_3^{(1)} \quad (E_n - K)$$

or, writing (17) with "0" in the right-hand member,

$$(17') \quad M_3^{(1)} + M_3^{(2)} + M_3^{(3)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

But we have the bounding relations

$$(18) \quad \begin{aligned} M_3^{(1)} + M_3^{(2)} &\rightarrow P_1 + P_2 \quad [E_n - (K + M_1 + M_2 + \dots + M_{k+1})], \\ M_3^{(2)} &\rightarrow P_1 + P_2 \quad [E_n - (K + M_2)], \end{aligned}$$

and relations (17') and (18) imply that  $M$  does not separate  $P_1$  and  $P_2$ , again yielding a contradiction. The case where only  $\eta_2 \neq 0$  is treated similarly.

Consequently, there is at least one  $\eta_i$ , where  $i > 2$ , that is not zero. We can therefore write (15) in the form

$$(15'') \quad M_2^{(2)} + M_3^{(3)} + M_{i+1}^{(1)} + M_{i+1}^{(1)} + \dots + M_{i+h}^{(1)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

Again we have the bounding relations

$$(19) \quad \begin{aligned} M_{i+1}^{(1)} &\rightarrow P_1 + P_2 \quad [E_n - (K + M_1 + \dots + M_i + M_{i+2} + \dots + M_{k+1})], \\ M_2^{(2)} + M_3^{(3)} + M_{i+1}^{(1)} + \dots + M_{i+h}^{(1)} &\rightarrow P_1 + P_2 \quad [E_n - (K + M_{i+1})]. \end{aligned}$$

Relations (15'') and (19) imply that  $M$  does not separate  $P_1$  and  $P_2$ , giving the final contradiction for the case  $k > 1$ .

If  $k = 1$  (for  $k = 0$ , see Theorem 4), we proceed as follows: The cycle  $M_1^{(1)} + M_3^{(1)}$  must link  $K$ , as already noted. Likewise, the cycle  $M_1^{(1)} + M_3^{(2)} + M_3^{(3)}$  links  $K$ . Since  $p^1(E_n - K) = p^{n-2}(K) = 1$ ,

$$(20) \quad M_1^{(1)} + M_3^{(1)} \sim M_1^{(1)} + M_3^{(2)} + M_3^{(3)} \quad (E_n - K),$$

or

$$(20') \quad M_3^{(1)} + M_3^{(2)} + M_3^{(3)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

But we have

$$(21) \quad \begin{aligned} M_3^{(1)} &\rightarrow P_2 + P_3 \quad [E_n - (K + M_2)], \\ M_3^{(2)} + M_3^{(3)} &\rightarrow P_2 + P_3 \quad [E_n - (K + M_1)], \end{aligned}$$

and relations (20') and (21) imply that  $M$  does not separate  $P_2$  and  $P_3$ , contradicting our hypothesis. Thus the theorem is proved.

Returning now to the surface  $S_1$  and property (c): Since the 1-dimensional Brouwer number of a simple closed curve is 1 and  $S_1$  is a common boundary of at least three domains in  $E_3$ , Theorem 5 tells us that no simple closed curve of  $S_1$  disconnects  $S_1$ .

Because of the relation between Theorems 3 and 4 it is now natural to ask if there does not exist an analogous relation between Theorem 5 and a theorem on closed cantorion manifolds<sup>39)</sup>? In the following theorem we answer this question. Because of the greater complications that arise in the general conditions assumed we give the proof completely, although there is some analogy to the proof of Theorem 5.

**Theorem 6.** *Let  $M$  be an  $m$ -dimensional closed cartorian manifold such that  $p^m(M) > 1$ ; also, let  $K$  be a closed subset of  $M$  such that  $p^{m-1}(K) = k > 0$ <sup>83</sup>. Then  $M - K$  has at most  $k$  components.*

**Proof.** We can assume (Menger imbedding theorem) that  $M$  is imbedded in some  $E_n$ . Since  $p^n(M)$  is at least as great as 2, there exist linearly independent cycles  $\Gamma_1^{n-m-1}$  and  $\Gamma_2^{n-m-1}$  linking  $M$  in  $E_n$  <sup>28</sup>.

Suppose  $M - K = M_1 + M_2 + \dots + M_{k+1}$ , where the  $M_i$  are mutually separated sets. As  $M$  is a closed cantorion manifold,

$$p^m \left( \sum_{s=1}^{k+1} M_s + K \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k+1).$$

Hence, for each  $i$ , there are complexes  $M_i^{(1)}$  and  $M_i^{(2)}$  such that

$$\begin{aligned} M_i^{(1)} &\rightarrow I_1^{n-m-1} & \left[ E_n - \left( K + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{k+1} M_s \right) \right], \\ M_i^{(2)} &\rightarrow I_2^{n-m-1} & \text{,,} \end{aligned}$$

Suppose first that  $k = 1$ . The cycle  $M_1^{(1)} + M_2^{(1)}$  must link  $K$ ; likewise the cycle  $M_1^{(2)} + M_2^{(2)}$  links  $K$ . Consequently, since

$$p^{n-m}(E_n - K) = p^{m-1}(K) = k = 1,$$

$$M_1^{(1)} + M_2^{(1)} \sim M_1^{(2)} + M_2^{(2)} \quad (E_n - K)$$

OF

$$(22) \quad (M_1^{(1)} + M_1^{(2)}) + (M_9^{(1)} + M_9^{(2)}) \sim 0 \quad (E_n - K).$$

However, relation (22) together with the relations

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} + M_1^{(2)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1} [E_n - (K + M_2)], \\ M_1^{(1)} + M_1^{(3)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_3^{n-m-1} [E_n - (K + M_1)] \end{aligned}$$

imply that

$$F_1^{n-m-1} + F_9^{n-m-1} \sim 0 \quad (E_n - M),$$

which is impossible since these cycles are linearly independent in  $E_n - M$ .

<sup>32)</sup> We recall the fact that a continuum which is a common boundary of two or more domains in  $E_n$  is not necessarily a closed cantorion manifold, since it may have other complementary domains of which it is not itself the boundary, in the sense that their boundaries are *proper* subsets of the continuum.

<sup>23)</sup> For  $k = 0$ , Theorem 3 may be applied.

Consider then the case  $k > 1$ , in which there are at least three sets  $M_1, M_2, M_3$ . Denote the  $(n-m)$ -cycles  $M_i^{(1)} + M_j^{(1)}$  by  $\gamma_{ij}^{(1)}$  ( $j = 2, 3, \dots, k+1$ ). As in the proof of Theorem 3, we may show that these constitute an  $(n-m)$ -basis for  $E_n - K$ .

That the cycle  $M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + M_3^{(1)} + M_3^{(2)}$  links  $K$  is shown in the usual manner, since we have

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} + M_2^{(1)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1} & [E_n - (K + M_3)], \\ M_2^{(1)} + M_3^{(2)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1} & \left[ E_n - \left( K + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{k+1} M_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Consequently, there exists a homology relation

$$(23) \quad M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + M_3^{(1)} + M_3^{(2)} \sim \eta_1 \gamma_{12}^{(1)} + \dots + \eta_k \gamma_{1(k+1)}^{(1)} (E_n - K).$$

Suppose, first, that an even number of the  $\eta$ 's are different from zero. Then, writing (23) with "0" in the right-hand member, combining symbols modulo 2 wherever possible, we get

$$(23') \quad M_1^{(1)} + \sum_{i \neq 1} M_i^{(j)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

However, we have the bounding relations

$$(24) \quad \begin{aligned} M_1^{(1)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} & [E_n - (K + \sum_{i=2}^{k+1} M_i)], \\ \sum_{i \neq 1} M_i^{(j)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} & [E_n - (K + M_1)], \end{aligned}$$

and relations (23') and (24) imply that  $\Gamma_1^{n-m-1}$  does not link  $M$ .

Suppose, then, that an odd number of the  $\eta$ 's in (23) are different from zero. First, suppose only  $\eta_1 \neq 0$ . Then we have

$$(25) \quad M_1^{(1)} + M_2^{(2)} + M_3^{(1)} + M_3^{(2)} \sim M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \quad (E_n - K)$$

or

$$(25') \quad M_2^{(1)} + M_2^{(2)} + M_3^{(1)} + M_3^{(2)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

However, we have the bounding relations

$$(26) \quad \begin{aligned} M_2^{(1)} + M_3^{(2)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1} & [E_n - (K + \sum_{i \neq 1}^{k+1} M_i)], \\ M_3^{(1)} + M_3^{(2)} &\rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1} & [E_n - (K + M_2)] \end{aligned}$$

and relations (25') and (26) imply that  $\Gamma_1^{n-m-1} + \Gamma_2^{n-m-1}$  does not link  $K$ . Similarly, for only  $\eta_2$  to be different from zero would imply that  $\Gamma_2^{n-m-1}$  does not link  $K$ .

We may assume, then, that there is a least one  $\eta_i$ , where  $i > 2$ , that is not zero. Let such an  $\eta$  be  $\eta_s$ . We can therefore write (23) in the form

$$(23'') \quad M_2^{(3)} + M_3^{(1)} + M_3^{(3)} + M_{s+1}^{(1)} + M_{t_1}^{(1)} + \dots + M_{t_{2h}}^{(1)} \sim 0 \quad (E_n - K).$$

But we have the bounding relations

$$(27) \quad M_{s+1}^{(1)} \rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} \left[ E_n - \left( K + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s+1}}^{k+1} M_t \right) \right],$$

$$M_2^{(3)} + M_3^{(1)} + M_3^{(3)} + M_{t_1}^{(1)} + \dots + M_{t_{2h}}^{(1)} \rightarrow \Gamma_1^{n-m-1} [E_n - (K + M_{s+1})],$$

and relations (23'') and (27) imply that  $\Gamma_1^{n-m-1}$  does not link  $M$ .

In every case, then, we are led to a contradiction, and the theorem is proved.

It will probably occur to the reader that although Theorems 5 and 6 place an *upper* limit on the number of components of  $M - K$ , it is possible, *a priori*, that there exists a smaller upper limit. Thus, for the surface  $S_1$ , it appears as though no subset  $K$  of  $S_1$  with the number  $p^1(K)$  finite can disconnect  $S_1$ . This raises the question, is it true in general that we could have, in Theorems 5 and 6, the conclusion that, for  $k$  finite, the set  $M - K$  is *connected*? That this is not the case, and that the upper limit imposed on the number of components of  $M - K$  in these theorems is really the smallest upper limit in general, the following example shows:

In figure 2,  $D_1^0$  and  $D_2^0$  are domains bounded by right cylinders and their bases. The domain  $D_3^0$  is the exterior of the solid whose appearance is that of a  $W$  superimposed on an  $M$ ; this solid has the property that the plane  $T$  intersects it in a set  $K = J_1 + J_2$ , where  $J_1$  and  $J_2$  are simple closed curves. Obviously here  $p^1(K) = k = 2$ . To get the surface we wish, we tunnel into the solid as in the construction of  $S_1$ , except that  $D_1^1$ , for instance, is obtained by extending  $D_1^0$  both above  $T$  and below  $T$ , as in the figure. The

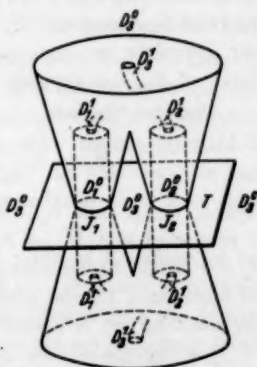


Fig. 2.

resulting surface,  $S_1$ , obtained by the complete process, has three complementary domains of which it is the common boundary, and consequently is a 2-dimensional closed cantorian manifold such that  $p^2(S_1) = 2$ . Clearly  $S_1 - K$  is the sum of two components, so that here we have a case where the number of components of  $M - K$  is exactly  $k > 1$ .



It is interesting to note that by a slight modification in the construction of  $S_1$  we obtain a curious surface  $S_2$ . By way of introducing this surface we note that it is known<sup>24)</sup> that a Jordan continuum which is not disconnected by the omission of any one of its arcs, but is disconnected by the omission of any one of its simple closed curves, is a simple closed surface (topological 2-sphere). Furthermore, that if  $H_2$  is a simple closed surface imbedded in  $E_3$ , then we have the relations<sup>25)</sup>

$$(28) \quad \begin{aligned} p^3(H_2) &= p^0(E_3 - H_2) = 1, \\ p^1(H_2) &= p^1(E_3 - H_2) = 0, \\ p^0(H_2) &= p^2(E_3 - H_2) = 0. \end{aligned}$$

**Theorem 7.** *There exists, in  $E_3$ , a Jordan continuum  $S_3$  which satisfies relations (28) if  $S_3$  is substituted for  $H_2$ , is the common boundary of its two (simply connected) complementary domains, and is not disconnected by the omission of any arc; yet not only is  $S_3$  not a simple closed surface, but no simple closed curve of  $S_3$  disconnects  $S_3$ .*

**Proof.** We proceed as in the construction of  $S_1$ , except that the solid  $S$  is now the set of all points that satisfy relations (1) and (3), and  $D_1^0$  and  $D_2^0$  are defined as before. It is easy to see, in view of our observations regarding  $S_1$ , that the surface  $S_3$  so constructed satisfies all of the conditions of Theorem 7, except the property that no simple closed curve of  $S_3$  disconnects  $S_3$ . As this property does not follow from any of our theorems we proceed to establish it. Let  $J$  be a simple closed curve of  $S_3$ , and suppose  $S_3 - J$  is not connected.

Consider the sets

$$M_1 = S_3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} F(D_1^i); \quad M_2 = S_3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} F(D_2^i).$$

Neither of the sets  $S_3 - M_1$ ,  $S_3 - M_2$  contains  $J$ . For  $M_1$ , for instance, is connected and  $\bar{M}_1 = S_3$ , so that if  $J$  were wholly in  $S_3 - M_1$ , then  $S_3 - J$  would be connected by virtue of the fact that if a connected set be augmented by the addition of an arbitrary subset of its limit points the resulting set is connected.

Let us denote by  $B_i$  the set of points  $J \cdot M_i$  ( $i = 1, 2$ ). Then  $M_1 - B_1$  is not connected since if it were  $S_3 - J$  would be connected; for not all of the points of  $M_1$  in the neighborhood of an arbitrary point of  $S_3$  can belong to  $B_1$ . Consequently  $M_1 - B_1 = A_1 + A_2$ , separate.

<sup>24)</sup> L. Zippin, *On continuous curves and the Jordan Curve Theorem*, Amer. Journ. Math. 52 (1930), pp. 331-350.

<sup>25)</sup> J. W. Alexander, loc. cit., Theorem  $X^d$ . It is to be noted that the numbers  $p^d$  are uniformly less by unity than the numbers  $K^d$  employed in Alexander's paper.

Denote the semi-tori that enter into the construction of  $D_1$  by  $t_1^1, t_1^2, t_1^3, \dots$ , where the superscripts denote the order of their construction, and let  $S_3 \cdot t_1^i = T_1^i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Then, no matter how great  $n$  may be, there exists  $m > n$  such that  $T_1^m \cdot B_1 = 0$ ; otherwise every point of  $S_3$  would be a limit point of  $J$ . Furthermore there exists  $s > n$  such that  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) has points in  $T_1^s$ . For suppose  $A_1$ , say, lies wholly in  $F(D_1^0) + \sum_{i=1}^n T_1^i$ . The latter set is topologically a 2-cell whose boundary we can assume contains no point of  $A_1$ . The parts of this 2-cell that belong respectively to  $A_1$  and to  $A_2$  constitute a separation of the 2-cell by a subset of an arc that does not meet the boundary of the 2-cell, which is of course impossible.

Let  $n_1$  be such that  $T_1^{n_1} \cdot B_1 = 0$ . Then  $T_1^{n_1} \subset A_1$ , say. There exists  $n_2 > n_1$  such that  $T_1^{n_2} \cdot A_2 \neq 0$ , and  $n_3 > n_2$  such that  $T_1^{n_3} \cdot B_1 = 0$ . But the set of points  $\sum_{i=n_1}^{n_2} T_1^i$  is homeomorphic with the lateral surface of a finite right cylinder, and since no points of  $B_1$  lie in either  $T_1^{n_1}$  or  $T_1^{n_2}$ , the omission of points of  $B_1$  belonging to it does not disconnect  $\sum_{i=n_1}^{n_3} T_1^i$ . But the separation of  $M_1$  by  $B_1$  induces a separation of  $\sum_{i=n_1}^{n_3} T_1^i$  since the latter set contains points of both  $A_1$  and  $A_2$ . Thus the assumption that  $S_3 - J$  is not connected leads to a contradiction.

Before proceeding to the next theorem it may be noted that although in the construction of surfaces  $S_1$  and  $S_2$  we have started from spherical regions of  $E_3$  to construct complementary domains, we might have started with regions bounded by tori, or, in general, with regions bounded by any closed 2-dimensional manifold of genus  $p$ . In this way we may arrive at Jordan continua that are common boundaries of at least three domains  $D_i$  and such that  $p^1(D_i) \neq 0$ .

It is well-known that in  $E_n$  if  $M$  is a common boundary of two uniformly locally connected domains, at least one of which is bounded, then  $M$  is a Jordan continuum<sup>36</sup>). It is fairly obvious that the domains complementary to the surfaces constructed above are not uniformly locally connected. This raises the question, does there exist in  $E_n$  a Jordan continuum which is the common boundary of more than two uniformly

<sup>36</sup>) See R. L. Moore, *On the relations of a continuous curve to its complementary domains in space of three dimensions*, Proc. Nat. Acad. Sci. 8 (1922), pp. 33-38; in this paper will also be found some interesting examples of continuous curves in three dimensions; also see my paper referred to in <sup>6</sup>), p. 644, II, a slight alteration in the last paragraph of which yields a proof of this for the case where there may be other complementary domains.

locally connected domains? It is already known that if  $n = 2$ , the answer to this question is negative, since a bounded Jordan continuum in  $E_2$  that is the common boundary of two domains is a simple closed curve<sup>37</sup>); and we have already noted in the introduction the result of Kuratowski concerning a common boundary of more than two domains in  $E_2$ . However, the situation in higher dimensions is decidedly different, as the following theorem and observations to be made subsequent to its proof will show.

**Theorem 8.** *There exists, in  $E_3$ , a Jordan continuum  $S$ , which is the common boundary of three (any finite number  $> 2$ , a denumerable infinity of) domains, each of which is uniformly locally connected.*

**Proof.** As in the proof of Theorem 1, we shall use a tunneling process. For the sake of simplicity we shall illustrate the process by starting with just two initial domains  $D_1^0$  and  $D_2^0$  (just as we might have done in indicating the method of constructing  $S_1$ ); the extension to more than two domains will be obvious.



Fig. 3.

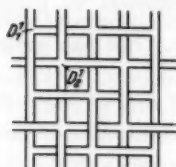


Fig. 4.

Let us, then, start with the set of points  $(x, y, z)$  such that  $1 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$ , which constitutes a solid that we shall call  $S$ . Denote the bounded domain complementary to this solid by  $D_1^0$ , the other domain by  $D_2^0$ . Let  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  denote a sequence of positive numbers which converge to zero.

We shall not bore along semi-tori this time, but shall use a network of tunnels. Thus, starting out from  $D_1^0$  we lay out a network somewhat as in figure 3, such that the diameter of the mesh is  $< \varepsilon_1$ ; the mesh does not meet  $F(D_2^0)$ ; the cross-diameter of the tube used is always  $< \varepsilon_1$ ; and finally, if the domain into which  $D_1^0$  is expanded is denoted by  $D_1^1$ , then every point of  $S - S \cdot D_1^1$  is within a distance  $\varepsilon_1$  of some point of  $D_1^1$ .

We now lay out a network from  $D_2^0$  which interlinks the one constructed above but does not meet it at any point, and which satisfies

<sup>37</sup>) See R. L. Moore, *Concerning continuous curves in the plane*, Math. Zeitschr. 15 (1922), pp. 254–260, Th. 5, and C. Kuratowski, loc. cit., Th. VII.

similar conditions. The mode of interlinking may be such as shown in figure 4. The domain into which  $D_2^0$  is expanded by this new network of tunnels we denote by  $D_2^1$ .

In the next step, that is in the expanding of  $D_1^1$  into  $D_1^2$ , the network used in obtaining  $D_1^1$  is extended so that every point of  $S - S \cdot (D_1^1 + D_2^1)$  is within a distance  $\varepsilon_2$  of some point of  $D_1^2$ ; the tube used in this extension is of a cross-diameter  $< \varepsilon_2$ , and in general the mesh is of diameter  $< \varepsilon_2$  except that a certain number of meshes will of necessity be of diameter  $> \varepsilon_2$ , perhaps (but not of diameter  $> \varepsilon_1$ ), where it becomes necessary to link a tube of  $D_2^1$  by a new mesh.

The construction of  $D_2^2$  by extending  $D_2^1$  now parallels that of  $D_1^1$ , and again we note that it is required that  $F(D_1^2) \cdot F(D_2^2) = 0$ .

As the networks are more and more refined, it will appear that the number of meshes in  $D_i^i$ , say, that link a tube of  $D_1^1$  and hence are limited only to a diameter  $< \varepsilon_1$ , increases with  $i$ . However, it is to be noted that wherever it happens that two meshes, such as  $M_1$  and  $M_2$  in figure 5, lying side by side and linking  $D_1^1$ , reach a sufficient degree of proximity to one another, they are to be connected by tubes forming a finer mesh of  $D_i^i$ . Furthermore, that as more and more of such meshes as  $M_1$  and  $M_2$  are constructed, they fit more closely to  $D_1^1$  in such a way that a point  $P$  which is a limit point of a sequence of points  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , where  $P_i$  and  $P_j$  ( $i \neq j$ ) are from different meshes  $M_i$  and  $M_j$ , must lie on  $F(D_1^1)$ .

We define

$$D_1 = \sum_{i=0}^{\infty} D_1^i,$$

$$D_2 = \sum_{i=0}^{\infty} D_2^i,$$

$$S_i = F(D_1) = F(D_2).$$

Then the domains  $D_1, D_2$  are uniformly locally connected. Consider  $D_1$ , for instance. Let  $\varepsilon$  be an arbitrary assigned positive number, and let  $P$  be a point of  $F(D_1)$ . There is a  $\delta > 0$  such that that part of the network entering into the construction of  $D_1$  and having points in  $S(P, \delta)$  is so fine that any two points of  $D_1$  in  $S(P, \delta)$  can be joined within this network by an arc that lies wholly in  $S(P, \varepsilon)$ . From this it follows that  $D_1$  is uniformly locally connected.

Concerning the surface  $S_i$  referred to in the statement of Theorem 8 we now make the following assertions: (I) Every point of  $S_i$  is accessible from each of the complementary domains of  $S_i$ ; (II) if  $P$  is any point of  $S_i$  and  $\varepsilon$  is an arbitrary assigned positive number, then the component of  $S_i$

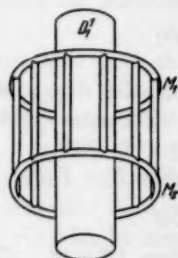


Fig. 5.

determined by  $P$  in  $S(P, \varepsilon)$  is the common boundary of three uniformly locally connected domains in  $S(P, \varepsilon)$ ; (III) if  $P$  is any point of  $S_k$  and  $\varepsilon$  is an arbitrary assigned positive number, then in  $S(P, \varepsilon)$  there exist 1-cycles  $\Gamma_i^1 \subset D_i^1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) such that  $\Gamma_i^1$  links  $S_k$ ; (IV) if  $D_i$  is any one of the domains complementary to  $S_k$ , then  $p^1(D_i)$  is infinite.

Property (I) is of course a well-known property of the boundaries of domains that are uniformly locally connected. However, in  $E_n$  it is not possible for every point of a common boundary of three domains to be accessible from all of these domains<sup>39</sup>).

Property (II) is a consequence of the following theorem:

**Theorem 9.** *Let a compact set  $K$  be the common boundary of  $m$  ( $> 1$ ) uniformly locally connected domains  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) in  $E_n$ . Also, let  $P$  be any point of  $K$ ,  $\varepsilon$  any positive number, and  $C$  the component of  $K$  determined by  $P$  in  $S(P, \varepsilon)$ . Then  $C$  is a locally connected common boundary of  $m$  uniformly locally connected domains  $D_i^1$  in  $S(P, \varepsilon)$ .*

**Proof.** That  $C$  is locally connected and an open subset of  $K$  is a consequence of the fact that  $K$  is a Jordan continuum. Let  $A$  denote an arbitrary point of  $C$  and  $\delta_A$  a positive number such that

$$\begin{aligned} S(A, \delta_A) &\subset S(P, \varepsilon), \\ K \cdot S(A, \delta_A) &\subset C \cdot S(A, \delta_A). \end{aligned} \quad (29)$$

For each  $i$  let  $a_i$  denote a 0-cell such that  $a_i \subset D_i \cdot S(A, \delta_A)$ .

Consider any two points  $a_i, a_j$  ( $i \neq j$ ). Then  $a_i$  and  $a_j$  are separated by  $C$  in  $S(P, \varepsilon)$ . For if not, they are not separated by  $F + C$  in  $E_n$ , where  $F = F(P, \varepsilon)$ , and there exists a connected 1-complex  $M_1^1$  such that

$$M_1^1 \rightarrow a_i + a_j, \quad [E_n - (F + C)]. \quad (30)$$

Since  $[F + (K - C)] \cdot S(A, \delta_A) = 0$ , there is a connected complex  $M_2^1$  such that

$$M_2^1 \rightarrow a_i + a_j, \quad \{E_n - [F + (K - C)]\}. \quad (31)$$

But the 1-cycle  $M_1^1 + M_2^1$  must bound in  $S(P, \varepsilon)$ ; i. e.,

$$M_1^1 + M_2^1 \sim 0 \quad (E_n - F). \quad (32)$$

Since  $[F + (K - C)] \cdot [F + C] \subset F$ , it follows from relations (30)–(32) that

$$a_i + a_j \sim 0 \quad [E_n - (F + K)]. \quad (33)$$

But (33) contradicts the fact that  $K$  separates  $a_i$  and  $a_j$  in  $E_n$ . Consequently  $a_i$  and  $a_j$  are separated by  $C$  in  $S(P, \varepsilon)$ .

<sup>39</sup>) See G. T. Whyburn, *Concerning accessibility in the plane and regular accessibility in  $n$  dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. 34 (1928), pp. 504–510.

For every point  $A$  of  $C$  there is a  $\delta_A$  satisfying conditions (29). Let

$$(34) \quad D = \sum_{A \subset C} S(A, \delta_A).$$

Then  $D$  is a connected open subset of  $E_n$  such that  $S(P, \varepsilon) \supset D \supset C$ .

Let  $a_1$  and  $a_2$  be any two points of  $D \cdot D_1$ . Then  $a_1$  and  $a_2$  are not separated by  $C$  in  $S(P, \varepsilon)$ . For let  $S(A_1, \delta_{A_1})$  and  $S(A_2, \delta_{A_2})$  be elements of the sum (34) containing  $a_1$  and  $a_2$ , respectively. On the straight line interval  $a_1 A_1$  let  $A'_1$  be the first point of  $K$ ; determine  $A'_2$  similarly relative to  $a_2$ . There is an arc  $A'_1 A'_2$  of  $C$  joining  $A'_1$  and  $A'_2$ . By a method of approximation (based on the uniform local connectedness of  $D_1$ ) used in my paper *A converse of the Jordan-Brouwer separation theorem in three dimensions*<sup>(4)</sup>, it can be shown that there exists, in  $D_1 \cdot S(P, \varepsilon)$ , an arc from a point on  $a_1 A'_1$  to a point on  $a_2 A'_2$ . Thus  $a_1$  and  $a_2$  are not separated by  $C$  in  $S(P, \varepsilon)$ . Consequently if we let  $D'_i$  denote the component of  $D_1 \cdot S(P, \varepsilon)$  determined by  $a_i$  in  $S(P, \varepsilon) - C$ , then all points of  $D \cdot D_1$  belong to  $D'_i$ , and thus  $C$  is the common boundary of  $m$  domains in  $S(P, \varepsilon)$ . That  $D'_i$  is uniformly locally connected follows from the fact that  $D_1$  is uniformly locally connected and all points of  $D \cdot D_1$  belong to  $D'_i$ .

It will be noted that the above proof also shows that if  $K$  is the common boundary of exactly  $m$  uniformly locally connected domains, then  $C$  is the common boundary of exactly (in particular, not more than)  $m$  uniformly locally connected domains in  $S(P, \varepsilon)$ .

Before taking up the proof of property (III) of  $S_n$ , which will follow from a general theorem, it will be expedient to prove another theorem concerning the set  $C$  of Theorem 9, as well as certain preliminary lemmas. We note first the following lemma:

**Lemma 2.** *Let  $S$  be a compact domain in  $E_n$  whose boundary is an  $(n-1)$ -sphere  $F$ ; also let  $M$  be a closed subset of  $S$  and  $\Gamma^i (i < n-1)$  an  $i$ -cycle of  $S - M$ . Then  $\Gamma^i$  links  $M$  in  $S$  if and only if it links  $M$  in  $E_n$ .*

**Proof.** It is obvious that if  $\Gamma^i$  links  $M$  in  $E_n$ , it links  $M$  in  $S$ .

Suppose  $\Gamma^i$  links  $M$  in  $S$ , but that  $\Gamma^i \sim 0$  in  $E_n - M$ . Then there exists a complex  $M^{i+1}$  such that

$$M^{i+1} \rightarrow \Gamma^i \quad (E_n - M).$$

Let  $S'$  be a compact domain whose boundary is an  $(n-1)$ -sphere  $F'$  concentric with and of smaller radius than  $F$ , and such that  $S' \supset M$ . Let the cells of  $M^{i+1}$  be subdivided so finely that any cell of  $M^{i+1}$  that meets  $E_n - S$  fails to meet  $F' + S'$ . Then the set of all  $(i+1)$ -cells of  $M^{i+1}$

that meet  $E_n - S$  is a complex  $M_i^{i+1}$  whose boundary,  $\Gamma_i^i$ , lies entirely between  $F$  and  $F'$  in  $E_n$ . Now

$$p^i[E_n - (F + F')] = p^{n-i-1}(F + F') = 2 \text{ if } i = 0, \\ = 0 \text{ if } i \neq 0.$$

If  $i \neq 0$ , then,  $\Gamma_i^i \sim 0$  in  $E_n - (F + F')$ . If  $i = 0$ , it is obvious that  $\Gamma_i^i \sim 0$  in the domain bounded by  $F + F'$ . In any case, then,

$$(35) \quad \Gamma_i^i \sim 0 \quad [E_n - (F + M)].$$

From the fact that  $M^{i+1} \rightarrow \Gamma^i$  and  $M_i^{i+1} \rightarrow \Gamma_i^i$ , we have

$$M^{i+1} + M_i^{i+1} \rightarrow \Gamma^i + \Gamma_i^{i+1},$$

and noting that  $M^{i+1} + M_i^{i+1}$  is a subset of  $E_n - (F + M)$ ,

$$(36) \quad \Gamma^i + \Gamma_i^i \sim 0 \quad [E_n - (F + M)].$$

From relations (35) and (36) it follows that

$$\Gamma^i \sim 0 \quad [E_n - (F + M)].$$

But this contradicts the fact that  $\Gamma^i$  links  $M$  in  $S$ . Consequently for  $\Gamma^i$  to link  $M$  in  $S$  implies that it links  $M$  in  $E_n - M$ .

**Theorem 10.** *Under the hypothesis of Theorem 9 (with  $n > 2$ ), if  $M$  is a closed subset of  $C$  such that  $p^{n-2}(M) = k$ , then  $C - M$  has at most  $k + 1$  components.*

**Proof.** Suppose  $C - M = C_1 + C_2 + \dots + C_{k+2}$ , where the  $C_i$  are mutually separated sets. Let  $a_i$  denote a 0-cell of  $D_i$  (as defined in the proof of Theorem 9), and denote the 0-cycle  $a_1 + a_2$  by  $\gamma^0$ . There exists a 1-complex  $M_j^1$  such that

$$M_j^1 \rightarrow \gamma^0 \quad \left[ S(P, \epsilon) - \left( M + \sum_{s=1}^{k+2} C_s \right) \right].$$

We define

$$(37) \quad \gamma_j^1 = M_1^1 + M_j^1 \quad (j = 2, 3, \dots, k+2).$$

Then the cycles (37) form a set of  $k+1$  linearly independent cycles linking  $M$  in  $E_n$ . For suppose we have

$$(38) \quad \eta_2 \gamma_2^1 + \eta_3 \gamma_3^1 + \dots + \eta_{k+2} \gamma_{k+2}^1 \sim 0 \quad (E_n - M).$$

At least one of the  $\eta$ 's is not zero; suppose, for instance,  $\eta_2 \neq 0$ . Then we have the relations

$$(39) \quad M_2^1 \rightarrow \gamma^0 \quad [E_n - [F + (C - C_2)]], \\ M_1^1 + \eta_3 \gamma_3^1 + \dots + \eta_{k+2} \gamma_{k+2}^1 \rightarrow \gamma^0 \quad [E_n - (F + M + C_2)].$$



Now  $[F + (C - C_1)] \cdot [F + M + C_1] = F + M$ , and since by Lemma 2, relation (38) holds in  $E_n - (F + M)$ , it follows from the Alexander Addition Theorem that  $C$  does not separate  $a_1$  and  $a_2$  in  $S(P, \varepsilon)$ . But this is impossible and hence the cycles  $\gamma_i^1$  are linearly independent in  $E_n - M$ . As this contradicts the assumption that

$$p^{n-1}(M) = p^1(E_n - M) = k,$$

we must conclude that  $C - M$  has at most  $k + 1$  components.

**Corollary 3.** *Let  $K$  be a compact set in  $E_n$  ( $n > 2$ ) which is a common boundary of at least two uniformly locally connected domains. Then  $K$  is not locally disconnected by the omission of any closed subset  $F$  such that  $p^{n-1}(F) = 0$ <sup>39)</sup>; furthermore,  $K$  contains simple closed curves locally<sup>40)</sup>.*

In particular, then, such a continuum  $K$  has no local separating point<sup>41)</sup>. Thus, from a theorem of Whyburn<sup>41)</sup> we have:

**Corollary 4.** *If  $K$  is a compact set in  $E_n$  ( $n > 2$ ) which is a common boundary of at least two uniformly locally connected domains, and  $P$  and  $Q$  are distinct points of  $K$ , then  $K$  contains a continuum  $T$  such that  $T = \sum_{0 \leq x \leq y \leq 1} P_x Q$  where, for each  $x$ ,  $P_x Q$  is an arc from  $P$  to  $Q$ , and for  $0 \leq x < y \leq 1$ ,  $P_x Q \cdot P_y Q = P + Q$ . Furthermore, if  $P$  and  $Q$  are points of  $C$  (as defined in Theorem 9), then  $T$  lies in  $C$ .*

Since by Corollary 3 such a continuum as  $K$  is not locally separated by arcs, and if, in addition, it were locally separated by all its simple closed curves, it would be locally an  $E_2$ <sup>42)</sup> and thus a closed 2-dimensional manifold<sup>43)</sup>, we have the following corollary:

**Corollary 5.** *Under the hypothesis of Theorem 9 (with  $n > 2$ )' if  $C$  is separated by all its simple closed curves, then  $n = 3$  and  $K$  is a closed 2-dimensional manifold.*

**Lemma 3.** *In  $E_n$ , let  $J$  be a simple closed curve,  $P$  a point of  $J$  and  $\varepsilon$  a positive number. Then there exists in  $S(P, \varepsilon)$  an  $(n - 2)$ -cycle which links  $J$ .*

<sup>39)</sup> That is, for every point  $P$  of  $K$  there exists an  $\varepsilon > 0$  such that if  $C$  is the component of  $K$  determined by  $P$  in  $S(P, \varepsilon)$  and  $F \subset C$ , then  $C - F$  is connected.

<sup>40)</sup> Let  $C$  be defined as in <sup>39)</sup>. Then as  $C$  has no cut-point it is cyclicly connected [see footnote <sup>31)</sup>].

<sup>41)</sup> G. T. Whyburn, *Continuous curves without local separating points*, Amer. Journ. Math. 53 (1931), pp. 163-166.

<sup>42)</sup> See T. Radó, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Litt. et Scient. (Szeged) 2 (1925), pp. 101-121.

**Proof.** Let  $\Gamma^{n-2}$  denote an  $(n-2)$ -cycle which links  $J$ . We may assume  $\varepsilon$  so small that  $J$  has points not in  $S(P, \varepsilon)$  and no point of  $\Gamma^{n-2}$  lies in  $S(P, \varepsilon)$ .

If  $t$  denotes the component of  $J$  determined by  $P$  in  $S(P, \varepsilon/2)$ , then  $J - t$  is an arc  $J_1$ . There exists, in  $E_n - J_1$ , a complex  $M^{n-1}$  bounded by  $\Gamma^{n-2}$ . Let the cells of  $M^{n-1}$  be so subdivided that all are of diameter less than  $\varepsilon/2$ , and let  $K^{n-1}$  denote the complex consisting of those cells which (together with their boundaries) meet  $t$ . Denote the boundary of  $K^{n-1}$  by  $\gamma^{n-2}$ .

The cycle  $\gamma^{n-2}$  has no points in common with  $J$ . For suppose it has a point  $Q$  in common with  $J$ . Then all  $(n-1)$ -cells of  $M^{n-1}$  which have  $Q$  in their boundaries lie in  $K^{n-1}$ . As the collection of all such  $(n-1)$ -cells is even in number, it follows that  $Q$  cannot be in the boundary of  $K^{n-1}$ .

That  $\gamma^{n-2}$  lies in  $S(P, \varepsilon)$  is obvious, and that it links  $J$  follows from the relation

$$M^{n-1} + K^{n-1} \rightarrow \Gamma^{n-2} + \gamma^{n-2} \quad (E_n - J)$$

and the fact that it is already known that  $\Gamma^{n-2}$  links  $J$ .

**Lemma 4.** *In any fundamental subdivision of  $E_n$  ( $n > 2$ ) let  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $\Gamma_2^{n-2}$  be two irreducible  $(n-2)$ -cycles that have no common point, and let  $M_1^{n-1}$  and  $M_2^{n-1}$  be complexes which have no common point and are bounded by  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $\Gamma_2^{n-2}$  respectively. Also, let  $M_3^{n-1}$  be bounded by  $\Gamma_1^{n-2} + \Gamma_2^{n-2}$  and let  $\Gamma^1$  be an irreducible 1-cycle which links both  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $\Gamma_2^{n-2}$  and does not meet  $M_3^{n-1}$ . Then if  $M$  denotes the point set which consists of all points in the complexes  $M_i^{n-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), there exist two arcs,  $t_1$  and  $t_2$ , of  $\Gamma^1$ , each of which joins a point of  $M_1^{n-1}$  to a point of  $M_2^{n-1}$ , and which lie, except for their endpoints, in different domains complementary to  $M$ .*

**Proof.** It is clear that  $\Gamma^1$  meets both  $M_1^{n-1}$  and  $M_2^{n-1}$  since it is linked with their boundaries. As all of the complexes under consideration are formed from the same subdivision of  $E_n$ , only a finite number of open arcs of  $\Gamma^1$  lie in domains complementary to  $M$ . Let those arcs which join  $M_1^{n-1}$  to  $M_2^{n-1}$  be denoted by  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2k$ ), where the subscripts correspond to a definite cycle order on  $\Gamma^1$ . Suppose that the arcs  $t_i$  all lie in the same domain,  $D$ , complementary to  $M$ . Denote the endpoints of  $t_i$  by  $a_i$  and  $b_i$ , where  $a_i \in M_1^{n-1}$ . Let  $x_i$  be a 0-cell on  $t_i$  in  $D$ , and let any 1-complex irreducible from  $x_{2i-1}$  to  $x_{2i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) in  $D$  be denoted by  $E_i^{1(43)}$ . Since all complexes are in  $E_n$  ( $n > 2$ ) we

<sup>43)</sup> That is, each  $E_i^1$  is a simple arc.

may assume that no two  $E_i^j$  meet and also that they meet  $\Gamma^1$  only in their endpoints.

Consider the 1-cycle  $T_i$  formed by  $E_i^1$  and the portion  $x_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}x_{2i}$  of  $\Gamma^1$  <sup>44</sup>). It is clear that  $T_i$  does not meet either  $M_2^{n-1}$  or  $M_3^{n-1}$  and consequently links neither  $\Gamma_1^{n-2}$  nor  $\Gamma_2^{n-2}$ . Thus the irreducible 1-cycle  $\Gamma^1 + \sum_{i=1}^k T_i$  links  $\Gamma_1^{n-2}$ . But the cycle  $\Gamma^1 + \sum_{i=1}^k T_i$  does not meet  $M_1^{n-1}$  and accordingly  $\Gamma_1^{n-2}$  does not link it. But  $\Gamma^1 + \sum_{i=1}^k T_i$  and  $\Gamma_1^{n-2}$  are both irreducible cycles and therefore either each links the other or neither links the other <sup>45</sup>). Consequently the assumption that the arcs  $t_i$  all lie in one domain complementary to  $M$  leads to a contradiction.

**Theorem 11.** In  $E_2$ , let  $K$  be a (compact) common boundary of two uniformly locally connected domains,  $D_1$  and  $D_2$ . Then if there exists a point  $P$  on  $K$  and a positive number  $\varepsilon$  such that all 1-cycles of  $D_i \cdot S(P, \varepsilon)$ , ( $i = 1, 2$ ), are homologous to zero in  $D_i$ ,  $K$  is the common boundary of only two domains.

**Proof.** As  $K$  is a common boundary of two uniformly locally connected domains, it is a Jordan continuum. In  $S(P, \varepsilon)$  let  $C$  be the component of  $K$  determined by  $P$ . Then by Theorem 9 and Corollary 3,  $C$  is a locally compact <sup>46</sup>), metric, connected and locally connected space which has no cut point and is therefore cyclicly connected <sup>47</sup>).

Suppose  $K$  is a common boundary of three domains,  $D_1$ ,  $D_2$  and  $D_3$  (where  $D_1$  and  $D_2$  are as defined above). Let  $J$  be a simple closed curve of  $C$ . By Theorem 5, since  $p^1(K) = 1$ , the set  $K - J$  is connected.

By Lemma 3 there exists, in  $S(P, \varepsilon)$ , an irreducible 1-cycle  $\Gamma^1$  which links  $J$ . Let  $\varrho$  denote the distance between the point sets  $(\Gamma^1)$  and  $J$  <sup>47</sup>).

There exists in  $K$ , by virtue of Theorem 10 of my paper *On the imbedding of subsets of a metric space in Jordan continua* <sup>48</sup>), a Jordan continuum  $N$  and a positive number  $\eta$  such that every point of  $N$  is within a distance  $\varrho/4$  of some point of  $J$ ,  $N$  contains every point of  $K$  that is within a distance  $\eta$  of  $J$ , and such that  $K - N$  is connected. Obviously  $(\Gamma^1) \cdot N = 0$ .

<sup>44</sup>) We assume here that this portion of  $\Gamma^1$  contains no point  $b_i$ ; this is clearly a matter of properly assigning the notation.

<sup>45</sup>) See L. Pontrjagin, *Zum Alexanderschen Dualitätssatz*, Göttinger Nachr. (1927), pp. 315–322, Th. 3.

<sup>46</sup>) That is, if  $Q$  is a point of  $C$  there is a neighborhood  $U$  of  $Q$  in  $C$  such that  $\bar{U}$  is compact. [P. Alexandroff, *Math. Annalen* 92 (1924), p. 294.]

<sup>47</sup>) Hereafter, if  $K$  is a complex, we shall denote by  $(K)$  the point set consisting of all points in  $K$ .

Now, since  $\Gamma^1$  links  $J$ , it is easy to show by the method of approximation referred to in the proof of Theorem 9 that there exist irreducible 1-cycles  $\Gamma_1^1$  and  $\Gamma_2^1$  such that  $\Gamma_i^1$  ( $i = 1, 2$ ) lies in  $D_i$  and links  $\Gamma^1$ , and every point of  $(\Gamma_i^1)$  is within a distance  $\eta$  of  $J$ . By hypothesis there exists in  $D_i$  a 2-complex  $M_i^2$  bounded by  $\Gamma_i^1$ . Also, since in the construction of  $\Gamma^1$  the 1-cells are chosen in spheres  $S(P, \eta)$  (where  $P \subset J$ ), one 1-cell of  $\Gamma_1^1$  and one 1-cell of  $\Gamma_2^1$  in  $S(P, \eta)$ , there exists a 2-complex  $M_3^2$  which lies entirely within an  $\eta$ -neighborhood of  $J$  and is bounded by  $\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1$ . It is obvious that  $\Gamma^1$  links  $M_3^2$ , since it links  $\Gamma_1^1$ .

Let  $M = \sum_{i=1}^3 (M_i^2)$ . Then  $M$  is a closed point set, and there exist, in  $\Gamma^1$ , two arcs which join points of  $M_1^2$  to points of  $M_2^2$  and which lie except for their endpoints in different domains complementary to  $M$  (Lemma 4). As  $M_1^2$  and  $M_2^2$  lie in different domains complementary to  $K$ , there exist on these respective arcs points  $A_1$  and  $A_2$  of  $K$ .

Since  $A_1$  and  $A_2$  lie on  $\Gamma^1$ , they also lie in  $K - N$ . Then there exists an arc  $A_1 A_2$  of  $K - N$ , since the latter is a connected open subset of  $K^{(4)}$ . But the arc  $A_1 A_2$  has no points in common with  $M$ . For

$$(40) \quad M \cdot K \subset (M_3^2) \cdot K \subset N \cdot K = N,$$

and since

$$(41) \quad A_1 A_2 \cdot M \subset K \cdot M,$$

we have, by combining relations (40) and (41), that  $A_1 A_2 \cdot M \subset N$ . Then, as  $A_1 A_2 \cdot N = 0$ , it follows that

$$(42) \quad A_1 A_2 \cdot M = 0.$$

But (42) stands in contradiction to the fact that  $A_1$  and  $A_2$  lie in different domains complementary to  $M$ . Thus the supposition that  $K$  is a common boundary of three domains leads to a contradiction.

Before proceeding to the statement of Theorem 12, we make note of a general property of complexes which are irreducible with respect to their boundaries. In general, if  $M^s \rightarrow \Gamma^{s-1}$ , then  $M^s$  contains an  $N^s$  such that  $N^s \rightarrow \Gamma^{s-1}$  and such that no proper subcomplex of  $N^s$  is bounded by  $\Gamma^{s-1}$  (as is shown by deleting  $s$ -cycles from  $M^s$ ). Call such a complex  $N^s$  irreducible with respect to its boundary  $\Gamma^{s-1}$ . Then we have the following property of such complexes:

<sup>(4)</sup> See R. L. Moore, *Concerning continuous curves in the plane*, loc. cit., Th. 1; the proof of this theorem is valid when the imbedding space is any  $E_n$ .

Lemma 5. If a complex  $M^s$  ( $s > 1$ )<sup>49</sup> is irreducible with respect to its boundary  $\Gamma^{s-1}$  and  $\Gamma^{s-1}$  is an irreducible  $(s-1)$ -cycle, then  $(M^s)$  and  $(M^s) - (\Gamma^{s-1})$  are both connected point sets.

Proof. That  $(M^s)$  is connected is easily seen, due to the fact that every irreducible  $(s-1)$ -cycle ( $s > 1$ ) is connected.

Suppose  $(M^s) - (\Gamma^{s-1})$  is the sum of components  $(C_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), and denote by  $C_i$  the  $s$ -complex (cells coinciding with cells of  $M^s$ ) constituted by the point set  $(\bar{C}_i)$ . At least one of the complexes  $C_i$  is not an  $s$ -cycle, else  $\Gamma^{s-1} = 0$ . Suppose  $C_1$  not an  $s$ -cycle; denote its boundary by  $\beta_1^{s-1}$ .

The cycle  $\beta_1^{s-1}$  is a subcomplex of  $\Gamma^{s-1}$ . For the complexes  $C_i$  meet only in cells of  $\Gamma^{s-1}$ , and if a cell  $b$  of  $\beta_1^{s-1}$  were not in  $\Gamma^{s-1}$ , all of the cells of  $M^s$  incident with it would lie in  $C_1$ . As these cells are even in number,  $b$  could not be in  $\beta_1^{s-1}$ .

But  $\beta_1^{s-1}$  is an  $(s-1)$ -cycle, and  $\Gamma^{s-1}$  is an irreducible  $(s-1)$ -cycle. Consequently  $\beta_1^{s-1}$  is identical with  $\Gamma^{s-1}$ . But then  $C_1$  must be identical with  $M^s$ , since  $M^s$  is irreducible with respect to its boundary. Therefore  $C_i$ , for  $i \neq 1$ , must be vacuous.

Theorem 12. Let a compact set  $K$  be a common boundary of  $k$  uniformly locally connected domains  $D_i$  in  $E_n$  ( $n > 2$ ). Then if  $\Gamma_1^{n-2}$  is an irreducible cycle that links  $K$ , there exists in every  $D_i$  that does not contain  $\Gamma_1^{n-2}$  a 1-cycle that links both  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $K$ .

Proof. Because of its connectedness the cycle  $\Gamma_1^{n-2}$  lies in one domain complementary to  $K$ , say in  $D$ .

Consider  $D_i \neq D$ . Denote the distance between  $K$  and  $(\Gamma_1^{n-2})$  by  $\varepsilon$ . Let  $Z$  denote a subdivision of  $E_n$  into cells of diameter  $\delta$  so small that if two 0-cells of  $D_i$  are a distance apart less than  $5\delta$ , they bound a 1-complex (made up of cells of  $Z$  or of a subdivision of  $Z$ ) of  $D_i$  of diameter less than  $\varepsilon/2$ . Let  $\Pi$  denote that polyhedral complex consisting of all  $n$ -cells of  $Z$  which (with their boundaries) meet  $K$ .

It is clear that  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $\Pi$  do not meet. Then, since  $\Gamma_1^{n-2}$  links  $K$ , it must also link  $\Pi$ . Accordingly, by a theorem of Pontrjagin<sup>50</sup>, there is an irreducible 1-cycle  $J^1$  of  $\Pi$  that is linked with  $\Gamma_1^{n-2}$ .

Let  $pq$  be any one of the 1-cells that make up  $J^1$ , its boundary being made up of 0-cells  $p$  and  $q$ . Let  $C_p$  and  $C_q$  be  $n$ -cells of  $\Pi$  of

<sup>49</sup>) For  $s = 1$ ,  $\Gamma^{s-1}$  is a pair of points and  $M^s$  is a 1-cell, in which case this lemma is obviously true.

<sup>50</sup>) Loc. cit. From Theorem 1 of Pontrjagin it follows that  $K$  contains a 1-cycle  $C^1$  that is linked with  $\Gamma_1^{n-2}$ . That  $C^1$  contains an irreducible cycle  $J^1$  that links  $\Gamma_1^{n-2}$  follows from the fact that if no such cycle links  $\Gamma_1^{n-2}$ , then  $C^1$  cannot link  $\Gamma_1^{n-2}$ .

which  $p$  and  $q$  are, respectively, vertices. In  $C_p$  and  $C_q$  (together with their boundaries) there are points  $p'$  and  $q'$ , respectively, of  $K$ . Let  $P$  and  $Q$  be 0-cells in  $D_i$  whose distances from  $p'$  and  $q'$ , respectively, are less than  $\delta$ . Then  $\varrho(P, Q) < 5\delta$ , and accordingly  $P$  and  $Q$  bound a 1-complex  $M_{PQ}$  in  $D_i$  of diameter  $< \varepsilon/2$ . By proceeding, in a given cyclic order, from 1-cell to 1-cell of  $J^1$ , we may replace in this fashion each cell  $pq$  by a complex  $M_{PQ}$  of  $D_i$ ; it can be assumed that these complexes do not overlap and that they are irreducible with respect to their boundaries. Denote the sum  $\Sigma M_{PQ}$  by  $L^1$ . Then  $L^1$  is an irreducible 1-cycle.

The cycles  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $L^1$  are linked. For  $pq$  and  $M_{PQ}$  lie within a sphere  $S$  of radius  $\varepsilon$  that encloses at least one point of  $K$  and hence encloses no point of  $\Gamma_1^{n-2}$ . A 1-cycle, formed by  $pq$ ,  $M_{PQ}$  and 1-complexes from  $p$  to  $P$  and from  $q$  to  $Q$  that lie in  $S$ , must bound in  $S$ , and we conclude that

$$(43) \quad J^1 \sim L^1 \quad (E_n - \Gamma_1^{n-2}).$$

Clearly (43) implies that if  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $J^1$  are linked, so too are  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $L^1$ .

That  $L^1$  links  $K$  follows from the fact that if it bounds in  $E_n - K$ , then by Lemma 5 it bounds a connected 2-complex which accordingly lies wholly in  $D_i$  and does not meet  $\Gamma_1^{n-2}$ ; such a situation would conflict with the fact just proved, viz., that  $\Gamma_1^{n-2}$  and  $L^1$  are linked.

**Theorem 13.** *In  $E_n$ , let a compact set  $K$  be the boundary of a uniformly locally connected domain  $D$ . Then if  $\Gamma_1^{n-2}, \Gamma_2^{n-2}, \dots, \Gamma_k^{n-2}$  are cycles of  $E_n - K$  independent with respect to homologies in  $E_n - K$ , there exists in  $D$  a set of 1-cycles  $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_k^1$  such that any linear combination of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  links at least one cycle  $\gamma_j^1$ .*

**Proof.** Let  $\varepsilon$  denote the distance between  $K$  and  $\sum_{i=1}^k (\Gamma_i^{n-2})$ , and let  $Z$  denote a subdivision of  $E_n$  all of whose cells are of diameter  $< \delta$ , where  $\delta$  is such that if two 0-cells of  $D$  are a distance apart less than  $5\delta$ , they bound a 1-complex of  $D$  of diameter  $< \varepsilon/2$ . Let  $\Pi$  denote that polyhedral complex consisting of all  $n$ -cells of  $Z$  that (together with their boundaries) meet points of  $K$ .

Since the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  are linearly independent with respect to homologies in  $E_n - K$ , they are certainly linearly independent with respect to homologies in  $E_n - \Pi$ . Then by a theorem of Pontrjagin<sup>61)</sup> there exist, among the cycles of the 1-dimensional basis of  $\Pi$ , a set of 1-cycles  $\gamma_i^1$

<sup>61)</sup> Loc. cit., Theorem II.

( $i = 1, 2, \dots, k$ ) such that every linear combination of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  links at least one of the cycles  $\gamma_i^1$ .

Pursuing an argument similar to that used in the proof of Theorem 12 in the construction of the complexes  $M_{PQ}$ , we see that there exists, for each  $i$ , an  $\varepsilon$ -deformation of  $\gamma_i^1$  into a 1-cycle  $\gamma_i^1$  of  $D$ .

Let  $L(\Gamma_i^{n-2})$  denote any linear combination of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$ . Then  $L(\Gamma_i^{n-2})$  links some cycle  $\gamma_i^1$ . Then, by Theorem IV of the paper of Pontrjagin cited above,  $L(\Gamma_i^{n-2})$  links  $\gamma_i^1$ .

**Theorem 14.** *Let a compact set  $K$  be the common boundary of two uniformly locally connected domains  $D_i$  in  $E_n$  ( $n > 2$ ), and let  $p^{n-2}(E_n - K) = k$ , where  $k$  is finite. Then there exists a positive number  $\varepsilon$  such that no  $(n-2)$ -cycle that links  $K$  is of diameter less than  $\varepsilon$ .*

**Proof.** Every cycle that links  $K$  contains an irreducible cycle that links  $K$ . We need, then, consider only irreducible cycles that link  $K$ , since the diameter of a cycle is at least as great as that of any one of its sub-cycles. Furthermore, if  $k = 0$ , the theorem is obviously true, so that we need consider only the case  $k > 0$ .

Denote the cycles of an  $(n-2)$ -basis for  $E_n - K$  by  $\Gamma_i^{n-2}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). There exists, by Theorem 13, a set of 1-cycles  $\gamma_i^1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2$ ) in  $D_j$ , such that any linear combination of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  links at least one cycle  $\gamma_i^1$ .

Let  $\Gamma^{n-2}$  be any irreducible cycle linking  $K$ . Then

$$\Gamma^{n-2} \sim \Gamma_{i_1}^{n-2} + \Gamma_{i_2}^{n-2} + \dots + \Gamma_{i_h}^{n-2} \quad (E_n - K).$$

Let  $M^{n-1}$  denote an  $(n-1)$ -complex of  $E_n - K$  bounded by  $\Gamma^{n-2} + \sum_{j=1}^h \Gamma_{i_j}^{n-2}$ .

Let  $N^{n-1}$  denote that component of  $M^{n-1}$  which contains  $\Gamma^{n-2}$ . The boundary of  $N^{n-1}$  is  $\Gamma^{n-2}$  together with certain of the cycles  $\Gamma_{i_j}^{n-2}$ , say  $\Gamma_{s_1}^{n-2}, \Gamma_{s_2}^{n-2}, \dots, \Gamma_{s_m}^{n-2}$ . Furthermore,  $N^{n-1}$  must lie in one domain  $D$  complementary to  $K$ . Either  $D \neq D_1$  or  $D \neq D_2$ . Suppose  $D \neq D_1$ . The cycle  $\sum_{j=1}^m \Gamma_{s_j}^{n-2}$  links  $\gamma_i^1$ , say, of  $D_1$ .

Since  $N^{n-1}$  lies wholly in  $D \neq D_1$ , we have

$$\Gamma^{n-2} \sim \Gamma_{s_1}^{n-2} + \Gamma_{s_2}^{n-2} + \dots + \Gamma_{s_m}^{n-2} \quad (E_n - \gamma_i^1).$$

Then  $\Gamma^{n-2}$  must link  $\gamma_i^1$ .

Denote by  $\varrho$  the distance between  $K$  and the set of points  $\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^k (\gamma_i^j)$ .

Then  $\Gamma^{n-2}$  must have a diameter at least as great as  $\varrho$ . For suppose not. Let  $S$  denote a spherical neighborhood of diameter  $< \varrho$  enclosing  $\Gamma^{n-2}$ .



The neighborhood  $S$  cannot contain points of both  $K$  and  $\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^k (\gamma_i^j)$ . But  $\Gamma^{n-2} \sim 0$  in  $S$ , and does not, therefore, link both  $K$  and  $\gamma_i^1$ . Thus the diameter of  $\Gamma^{n-2}$  must be at least as great as  $\varrho$ , and if we set  $\varepsilon = \varrho$ , the theorem is proved.

**Theorem 15.** *In  $E_3$ , let a compact set  $K$  be a common boundary of two uniformly locally connected domains, and let  $p^1(E_3 - K)$  be finite. Then  $K$  is the common boundary of only two domains.*

Theorem 15 follows from Theorems 11 and 14.

We now raise the question, has such a set  $K$  as defined in the hypothesis of Theorem 15 any complementary domains other than the two of which it is the common boundary? That is, is such a set  $K$  a closed cantorinan manifold? In the next theorem we shall show that not only is this the case, but  $K$  is an ordinary 2-dimensional closed manifold of the combinatorial topology<sup>52</sup>).

**Theorem 16.** *In  $E_3$ , let  $K$  be a compact point set which is a common boundary of two uniformly locally connected domains,  $D_1$  and  $D_2$ , and such that  $p^1(E_3 - K) = k$ , where  $k$  is finite. Then  $K$  is a closed 2-dimensional (combinatorial) manifold of genus  $\frac{1}{2}p^1(E_3 - K)$ .*

**Proof.** By Theorem 14 there exists a positive number  $\varepsilon$  such that no 1-cycle of diameter  $< \varepsilon$  links  $K$ . Let  $P$  be any point of  $K$ , and let  $C$  be the component of  $S(P, \varepsilon)$  determined by  $P$ . By Theorems 9 and 10  $C$  is a cyclicly connected open connected subset of  $K$ , that is locally connected and is not disconnected by the omission of any arc.

Let  $J$  be any simple closed curve of  $C$ . Then the set  $C - J$  is not connected. For suppose  $C - J$  is connected. Then  $K - J$  is also connected<sup>53</sup>). Let  $\Gamma^1$  be an irreducible 1-cycle which links  $J$  and lies in  $S(P, \varepsilon)$  (Lemma 3), and denote the distance between  $(\Gamma^1)$  and  $J$  by  $\varrho$ . We now proceed almost exactly as in the proof of Theorem 11 to obtain a contradiction.

Now by Corollary 5,  $K$  is a closed 2-dimensional manifold. Since only those closed 2-dimensional manifolds that are *orientable* can be imbedded in  $E_3$ , it follows that the genus of  $K$  is  $\frac{1}{2}p^1(K)$ , which, by the Alexander Duality Theorem<sup>54</sup>), is equal to  $\frac{1}{2}p^1(E_3 - K)$ .

Since all of the conditions imposed upon  $K$  in the hypothesis of Theorem 16 are known to hold in case  $K$  is a closed 2-dimensional mani-

<sup>52</sup>) For a summary of the possible types of closed 2-dimensional manifolds, see Veblen, *Analysis situs*, pp. 50—51. (Note that Veblen's numbers  $R_i$  are uniformly greater by unity than the numbers  $p^i$  which we are using.)

<sup>53</sup>) This follows readily from the fact that  $C$  is an open subset of  $K$ .

fold in  $E_3$ <sup>54</sup>), we have in Theorem 16 a converse theorem, analogous to the converse of the Jordan curve theorem of Schoenflies — indeed, since the simple closed curve is the only 1-dimensional manifold, Theorem 16 constitutes the complete analogue for  $E_3$  of the plane case given by Schoenflies. In case  $p^1(E_3 - K) = 0$ , the conclusion of Theorem 16 is that  $K$  is a 2-sphere (simple closed surface). If  $p^1(E_3 - K) = 2$ , then  $K$  is a torus. And so on. It is interesting to note that it is not necessary to assume in Theorem 16 that  $p^1(E_3 - K)$  is an even number; furthermore, that it is not necessary to assume that  $p^0(E_3 - K) = 1$ <sup>55</sup>).

The results obtained above clearly suggest that if a set  $K$  is a common boundary of  $k$  uniformly locally connected domains, then  $p^1(E_3 - K) = k \cdot m$ , where if  $D$  is one of the  $k$  domains,  $p^1(D) = m$ ; and if  $B$  is a domain not in the above set, then  $p^1(B) = 0$ . We proceed to investigate this possibility.

**Theorem 17.** *Let a compact set  $K$  be the boundary of a uniformly locally connected domain  $D$  in  $E_n$ . Then  $p^1(D) \geq p^{n-2}(E_n - \bar{D})$ .*

**Proof.** Let  $\Gamma_1^{n-2}, \Gamma_2^{n-2}, \dots, \Gamma_s^{n-2}$  be linearly independent cycles of the  $(n-2)$ -basis of  $E_n - \bar{D}$ . Let  $\varepsilon$  denote the distance between  $\bar{D}$  and  $\sum_{i=1}^s (\Gamma_i^{n-2})$ . Let  $Z$  be a subdivision of  $E_n$  whose cells are all of diameter  $< \delta$ , where  $\delta$  is such that if two 0-cells of  $D$  are a distance apart less than  $5\delta$ , they bound a 1-complex of  $D$  of diameter  $< \varepsilon/2$ . Let  $\Pi$  denote that polyhedral complex consisting of all fundamental cells of  $Z$  which (together with their boundaries) meet  $K$ .

As the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  link  $\bar{D}$ , they link  $K$  and hence  $\Pi$ . Then there exists in the 1-basis of  $\Pi$  a set of cycles  $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_s^1$  such that every

<sup>54</sup>) For the uniform local connectedness of the domains complementary to a manifold, see my paper referred to in <sup>5</sup>).

<sup>55</sup>) That is, it is not necessary to assume that  $E_3 - K$  consists of exactly two domains. It might be noted here that in the plane case Schoenflies assumed (*Über einen grundlegenden Satz der Analysis Situs*, Göttinger Nachr. 1902, p. 185) that  $p^0(E_2 - K) = 1$ , and it was later shown by P. M. Swingle (*An unnecessary condition in two theorems of Analysis Situs*, Bull. Amer. Math. Soc. 34 (1928), pp. 607–618) that in the presence of Schoenflies' other conditions (which included the condition that  $p^0(E_2 - K) \geq 1$ ) this condition was unnecessary.

I should also like to call attention to the fact that whereas in the proof of the converse theorem for simple closed surfaces given in my paper referred to in <sup>5</sup>) it was felt necessary, in order to associate the combinatorial conditions imposed on the complement of the set  $K$  with the topological properties of  $K$ , to introduce a new definition of the simple closed surface in terms of what might be called *properties in the large*, we have succeeded in the proof of Theorem 16 in associating the combinatorial properties of  $E_3 - K$  directly with the *local* topological properties of  $K$ .

linear combination of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$  links at least one of the cycles  $\gamma_i^1$ , and conversely<sup>56)</sup>.

Approximating the cycles  $\gamma_i^1$ , we find in  $D$  a set of 1-cycles  $L_1^1, L_2^1, \dots, L_s^1$  such that

$$(44) \quad L_i^1 \sim \gamma_i^1 \quad \left( E_n - \sum_{i=1}^s \Gamma_i^{n-2} \right) \\ (i = 1, 2, \dots, s).$$

The cycles  $L_i^1$  of this set are linearly independent with respect to homologies in  $D$ . For suppose we have a complex  $M^2$  such that

$$(45) \quad M^2 \rightarrow L_{i_1}^1 + L_{i_2}^1 + \dots + L_{i_h}^1 \quad \left( D; E_n - \sum_{i=1}^s \Gamma_i^{n-2} \right).$$

However, by (44) we have

$$(46) \quad M_i^2 \rightarrow L_i^1 + \gamma_i^1 \quad \left( E_n - \sum_{i=1}^s \Gamma_i^{n-2} \right) \\ (i = 1, 2, \dots, s).$$

From relations (45) and (46) we have

$$M^2 + \sum_{j=1}^h M_{i_j}^2 \rightarrow \sum_{j=1}^h \gamma_{i_j}^1 \quad \left( E_n - \sum_{i=1}^s \Gamma_i^{n-2} \right).$$

But this is impossible since every linear combination of the cycles  $\gamma_i^1$  links at least one of the cycles  $\Gamma_i^{n-2}$ . Thus the cycles  $L_i^1$  are linearly independent with respect to homologies in  $D$ . Since the maximum number of such cycles is  $p^1(D)$ , it follows that  $s \leq p^1(D)$ . Consequently we have  $p^1(D) \geq p^{n-2}(E_n - \bar{D})$ .

Suppose now that  $K$  is a common boundary of two uniformly locally connected domains  $D_1$  and  $D_2$  in  $E_3$ . Then by Theorem 17

$$p^1(D_1) \geq p^1(E_3 - \bar{D}_1) \geq p^1(D_2),$$

$$p^1(D_2) \geq p^1(E_3 - \bar{D}_2) \geq p^1(D_1).$$

Consequently,

$$p^1(D_1) = p^1(D_2).$$

Obviously, then, if  $K$  is a common boundary of uniformly locally connected domains  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , we have

$$p^1(D_i) = p^1(D_j) \quad (i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots).$$

Thus we have the following theorem:

**Theorem 18.** *Let a compact set  $K$  be a common boundary of the uniformly locally connected domains  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , in  $E_3$ . Then*

$$p^1(D_i) = p^1(D_j) \quad (i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots).$$

<sup>56)</sup> L. Pontrjagin, loc. cit., Theorem II.

Suppose, now, that  $p^1(D_1) = k$ , finite. Then by Theorem 17  $p^{n-2}(E_n - \bar{D}_1) \leq k$ . Consequently, under the hypothesis of Theorem 18 there can be at most two of the domains  $D_i$ , provided  $k > 0$ , since three domains would require

$$p^1(E_n - \bar{D}_1) \geq p^1(D_2) + p^1(D_3) = 2k.$$

However, in case  $k = 0$ , Theorem 11 tells us that there can be at most two domains  $D_i$ . Consequently we have

$$p^1(D_1) = p^1(D_2) = k,$$

$$p^1(E_n - \bar{D}_1) \geq p^1(D_2) = k,$$

$$p^1(E_n - \bar{D}_1) \leq p^1(D_1) = k,$$

and therefore

$$p^1(E_n - \bar{D}_1) = k.$$

It follows at once, then, that

$$p^1(E_n - K) = p^1(D_1) + p^1(E_n - \bar{D}_1) = 2k.$$

Consequently we have the theorem:

**Theorem 19.** *If a compact set  $K$  is a common boundary of at least two uniformly locally connected domains in  $E_n$ , and  $p^1(D) = k$  where  $D$  is a fixed one of these domains and  $k$  is finite, then  $K$  is a common boundary of only two uniformly locally connected domains  $D_1$  and  $D_2$  and the following duality relations hold:*

$$p^1(D_1) = p^1(D_2) = k,$$

$$p^1(E_n - K) = p^1(K) = 2k.$$

Furthermore, if  $D$  is any other domain complementary to  $K$ , then  $p^1(D) = 0$ .

Property (IV) of the surface  $S_n$  now follows from Theorem 19. Also, from Theorems 16 and 19 we have the following simple converse of the theorem regarding the separation of  $E_n$  by a closed 2-dimensional manifold of genus  $k$ :

**Theorem 20.** *Let  $K$  be a compact set which is a common boundary of at least two uniformly locally connected domains in  $E_n$  such that the 1-dimensional connectivity number of one of these domains is a finite number  $k$ . Then  $K$  is a closed 2-dimensional (combinatorial) manifold of genus  $k^{57}$ .*

<sup>57)</sup> Since a (compact) common boundary of two uniformly locally connected domains is a Jordan continuum, it might occur to the reader to ask, is a locally connected 2-dimensional closed cantorion manifold  $K$  such that  $p^1(K)$  is finite necessarily a closed 2-dimensional (combinatorial) manifold? That such is not the case is shown immediately by the surface  $S_1$  of Theorem 1. However, a locally

In conclusion we note that in the proof of Theorem 16, the information that  $p^1(E_s - K)$  is finite is used only to establish (by virtue of Theorem 14) the existence of a positive number  $\varepsilon$  such that no 1-cycle of diameter less than  $\varepsilon$  links  $K$ . Thus we can state the converse theorem for 2-dimensional closed manifolds in  $E_s$  in the following form, which is, a priori, of a quite different nature from the forms in Theorems 16 and 20:

**Theorem 21.** *In  $E_s$ , let a compact set  $K$  be a common boundary of (at least) two uniformly locally connected domains  $D_1$  and  $D_2$ , and let there exist a positive number  $\varepsilon$  such that if  $\Gamma^i$  is a 1-cycle of  $D_i$  ( $i = 1$  or  $2$ ) of diameter less than  $\varepsilon$ , then  $\Gamma^i \sim 0$  in  $D_i$ . Then  $K$  is a closed 2-dimensional (combinatorial) manifold.*

connected 1-dimensional cantorian manifold is a 1-dimensional (combinatorial) manifold (= simple closed curve), as shown in my paper *On the linking of Jordan continua by  $(n-2)$ -cycles*, to appear soon in the *Annals of Math.*

(Eingegangen am 1. 3. 1933.)

## Gebietsteilung durch eine Kurve zweiter Ordnung.

Von

Karl Kommerell in Tübingen.

Bei der synthetischen Behandlung der Kurven zweiter Ordnung wird die Eigenschaft einer solchen Kurve, die projektive Ebene gleich einer Jordankurve in zwei völlig getrennte Gebiete zu teilen, mit Hilfe der Stetigkeit bewiesen. Dabei ist mir nur ein Beweis bekannt, der alle Anforderungen an Strenge erfüllt: ich meine den Beweis von Enriques in seinen „Vorlesungen über projektive Geometrie“ (übers. von Fleischer, 1903, § 69, S. 241 ff.). Den Beweis, den Reye in seiner „Geometrie der Lage“ (3. Aufl. 1886, I, S. 95) gibt, wird man heute nicht mehr als genügend erachten, und bei Sturm, „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ (Bd. I, 1908, S. 146), kann von einem Beweis kaum die Rede sein. Enriques schließt sich bei seiner Grundlegung der projektiven Geometrie an den klassischen Standpunkt v. Staudts an und benutzt also Stetigkeitsaxiome.

Nun kann man aber den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie ohne Benutzung von Stetigkeitsaxiomen mit Hilfe des Desarguesschen und Pascalschen Satzes für ein Geradenpaar gewinnen, wie es Schur in seinen „Grundlagen der Geometrie“ (1909, S. 49 f.) getan hat. In einer schönen Note<sup>1)</sup> hat dann Schur die Polarentheorie der Kegelschnitte mit Hilfe des Desarguesschen Satzes und des Pascalschen Satzes für eine Kurve zweiter Ordnung entwickelt. Bei einem solchen Aufbau der projektiven Geometrie entsteht dann das Bedürfnis für einen Beweis des Satzes, wonach eine Kurve zweiter Ordnung die projektive Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt, der ohne Stetigkeitsaxiome auskommt. Dies ist der Anlaß für die folgenden Entwicklungen.

Dabei bedienen wir uns des Pasch-Axioms (P-A); in der Hilbertschen Axiomgruppe ist es das Axiom  $II_4$ : „Es seien  $A, B, C$  drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und  $a$  eine Gerade in der Ebene  $A, B, C$ ,

<sup>1)</sup> „Über den Hauptsatz der Polarentheorie der Kegelschnitte“, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1927, S. 259 f.

<sup>2)</sup> Den Fall, wo der innere Punkt  $P$  der Mittelpunkt, also die Gerade  $QR$  in Fig. 1 und 2 die unendlich ferne Gerade ist, übergehen wir. Durch leichte Abänderung des im Text Gesagten ergibt sich der Beweis. Im übrigen können dieser Fall und die weiter unten erwähnten Sonderfälle durch eine passend gewählte Zentralprojektion auf die im Text behandelten Fälle zurückgeführt werden.



(P-A), angewendet auf das Dreieck  $PQR$ , schneidet  $P'R' = a$  die Gerade  $PR$  in dem Punkt  $Q''$  zwischen  $P$  und  $R$ . Die Involution  $(P, R)$ ,  $(Q', Q'')$  konjugierter Punkte ist wieder hyperbolisch, und darum schneidet auch  $PR$  die Kurve.

2. Fall (Fig. 2). Die Gerade durch  $P$  schneide die Gerade  $QR$  in einem Punkt  $P'$ , der nicht zwischen  $Q$  und  $R$  liegt. Man kann annehmen, daß  $Q$  zwischen  $R$  und  $P'$  liegt: anderenfalls vertausche man die Namen der Punkte  $Q$  und  $R$ .  $A$  sei wieder ein Punkt von  $PP'$  zwischen  $P$  und  $P'$ .  $RA$  schneidet nach dem (P-A) für das Dreieck  $PP'Q$  die Gerade  $PQ$  in einem Punkt  $R'$  zwischen  $P$  und  $Q$ . Der zu  $R'$  konjugierte Punkt  $R''$  auf  $PQ$  liegt zwischen  $P$  und  $Q$ , und der zu  $P'$  konjugierte  $P''$  auf  $QR$  zwischen  $Q$  und  $R$ , also nicht zwischen  $Q$  und  $P'$ .  $P'R''$  ist jetzt die Polare  $a$  von  $A$  und schneidet nach dem (P-A) für das Dreieck  $PP'Q$  die Gerade  $PP'$  in einem Punkt  $A'$  zwischen  $P$  und  $P'$ , dem konjugierten zu  $A$ . Die Involution konjugierter Punkte  $(P, P')$ ,  $(A, A')$  ist also hyperbolisch, und  $PP'$  schneidet die Kurve, womit der Satz bewiesen ist.

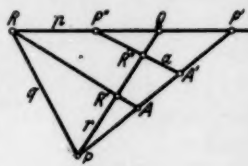


Fig. 2.

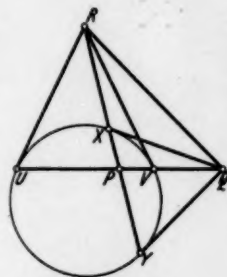


Fig. 3.

Nennt man *äußere* Punkte in der Ebene einer Kurve zweiter Ordnung solche, von denen aus zwei Tangenten an die Kurve gehen, so ist jeder Punkt einer Geraden, die die Kurve nicht schneidet, für die also die Involution konjugierter Punkte elliptisch ist (vgl. die Gerade  $QR$  in Fig. 1 und 2) ein *äußerer*; denn die Polare irgendeines ihrer Punkte  $P''$ , nämlich  $PP'$ , schneidet die Kurve. Sind  $J$  und  $K$  die Schnittpunkte, so sind  $JP''$  und  $KP''$  die Tangenten aus  $P''$ .

Alle Punkte einer Tangente  $t$  außer dem Berührungspunkte  $T$  sind *äußere* Punkte; denn ist  $t'$  eine andere Tangente, so schneiden die Kurventangenten aus  $t$  und  $t'$  projektive Punktreihen aus. Ist  $A$  ein von  $T$  verschiedener Punkt von  $t$ ,  $A'$  der entsprechende auf  $t'$ , so ist  $AA'$  Tangente und verschieden von  $t$ . Von  $A$  gehen also zwei Kurventangenten aus, nämlich  $t$  und  $AA'$ .

Ob nun innere Punkte wirklich existieren, folgt aus dem Vorhergehenden nicht: Seien darum (Fig. 3)  $U, V$  zwei Kurvenpunkte und  $R$  der Schnittpunkt der Tangenten in  $U, V$  — der Pol von  $UV$  —, so lege man durch  $R$  eine beliebige Sekante  $RXY$ , welche  $UV$  in  $P$  trifft.

Die Tangenten in den Kurvenpunkten  $X, Y$  schneiden sich in einem Punkt  $Q$  von  $UV$ , und es ist jetzt das Dreieck  $PQR$  ein Polardreieck. Wir behaupten nun, daß  $P$  ein innerer Punkt ist.

Beweis<sup>3)</sup>. Wir kehren zu Fig. 1 zurück, wo, wie in Fig. 3,  $PR$  und  $PQ$  hyperbolische Involutionen konjugierter Punkte tragen.  $P'$  sei wieder ein Punkt zwischen  $Q$  und  $R$ , und  $A$  ein Punkt zwischen  $P$  und  $P'$ .  $RA$  schneidet  $PQ$  in einem Punkt  $R'$ , der zwischen  $P$  und  $Q$  liegt, und  $QA$  schneidet  $PR$  in einem Punkt  $Q'$  zwischen  $P$  und  $R$ . Der zu  $R'$  konjugierte Punkt  $R''$  auf  $PQ$  liegt zwischen  $P$  und  $Q$ , und der zu  $Q'$  konjugierte  $Q''$  auf  $PR$  liegt zwischen  $P$  und  $R$ , da  $PQ$  und  $PR$  hyperbolische Involutionen konjugierter Punkte tragen. Nach dem (P-A) für das Dreieck  $PQR$  schneidet  $Q'R''$ , d. h. die Polare  $a$  von  $A$ , die Gerade  $QR$  in einem Punkt  $P''$ , dem konjugierten zu  $P'$ , der nicht zwischen  $Q$  und  $R$  liegt. Die Involution konjugierter Strahlen ( $PQ, PR$ ) und ( $PP', PP''$ ) aus  $P$  ist also elliptisch, und  $P$  ist, wie behauptet wurde, ein innerer Punkt.

Die Schnittpunkte  $UV$  (Fig. 3) der Geraden  $PQ$  mit der Kurve begrenzen nun auf der Gesamtgeraden  $UV$  zwei Kontinua: wir behaupten nun, daß alle inneren Punkte des Kontinuums, in dem  $P$  liegt, innere Punkte in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung sind.

Beweis. Wie in der Fig. 3 bereits angenommen wurde, heiße derjenige der beiden Schnittpunkte  $U, V$ , der zwischen  $P$  und  $Q$  liegt,  $V$ . Das Kontinuum, in dem  $P$  liegt, zerfällt in die Teilkontinua  $UP$  und  $PV$ , und darum sind zwei Fälle zu unterscheiden<sup>4)</sup>.

1. Fall (Fig. 4).  $R'$  sei ein Punkt zwischen  $P$  und  $V$ , dann liegt der zu  $R'$  konjugierte Punkt  $R''$  von  $UV$  zwischen  $V$  und  $Q$ :  $R', R''$  werden nämlich von  $U, V$  (harmonisch) getrennt und von  $P, Q$  nicht, da die Involution  $(P, Q), (R', R'')$  hyperbolisch ist. Ist nun  $A$  ein Punkt auf  $RR'$  zwischen  $R$  und  $R'$ , so schneidet  $QA$  nach dem (P-A), angewendet auf das Dreieck  $PRR'$ , die Gerade  $PR$  in einem Punkt  $Q'$ , der zwischen  $P$  und  $R$  liegt: da nämlich  $UV PQ$  vier harmonische Punkte sind, so liegt  $Q$  nicht zwischen  $P$  und  $V$  und darum auch nicht zwischen  $P$  und  $R'$ , und  $A$  wurde ja zwischen  $R$  und  $R'$  angenommen.

<sup>3)</sup> In der Figur wurde angenommen, daß weder  $Q$  noch  $R$  im Unendlichen liegt. Wir übergehen der Kürze halber diese Fälle, die ähnlich zu behandeln sind, und verweisen im übrigen auf den Schluß der Fußnote auf S. 308.

<sup>4)</sup> In der Figur wurde angenommen, daß das Kontinuum, in dem  $P$  liegt, die Strecke  $UV$  ist. Es könnte nun auch  $U$  ins Unendliche fallen, oder  $P$  könnte außerhalb der Strecke  $UV$  liegen. Diese Fälle erledigen sich ganz analog. Auch den Fall, daß  $UV$  Durchmesser ist, also  $R$  ein unendlich ferner Punkt ist, übergehen wir. Es sei nochmals auf den Schluß der Fußnote auf S. 308 verwiesen.

Der zu  $Q'$  konjugierte Punkt  $Q''$  auf  $PR$  liegt auch zwischen  $P$  und  $R$ , da  $PR$  eine hyperbolische Involution trägt.  $Q''R''$  ist die Polare  $a$  von  $A$  und schneidet nach dem (P-A), angewendet auf das Dreieck  $PRR'$ , die Gerade  $RR'$  in dem zu  $A$  konjugierten Punkt  $A'$  zwischen  $R$  und  $R'$ . Die Involution  $(R, R'), (A, A')$  ist hyperbolisch,  $RR'$  schneidet die Kurve, und  $R'$  ist aus demselben Grunde innerer Punkt wie in Fig. 3  $P$  als Schnitt von  $UV$  und  $XY$ .

2. Fall (Fig. 5).  $R'$  sei ein Punkt zwischen  $U$  und  $P$ . Der zu  $R'$  konjugierte Punkt  $R''$  auf  $UV$  liegt, da  $R, R''$  von  $U, V$  (harmonisch) getrennt liegen, nicht zwischen  $U$  und  $V$ , also auch nicht zwischen  $R'$  und  $P$ .  $A$  sei wieder ein Punkt zwischen  $R$  und  $R'$ , dann schneidet  $AQ$  aus  $PR$  den Punkt  $Q'$  aus, der zwischen  $P$  und  $R$  liegt. Der zu  $Q'$  konjugierte Punkt  $Q''$  auf  $PR$  liegt wie oben auch zwischen  $P$  und  $R$ .

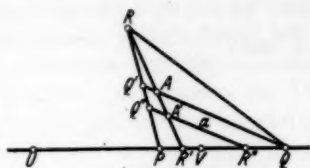


Fig. 4.

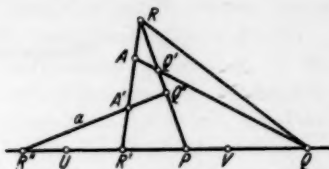


Fig. 5.

Nach dem (P-A), angewendet auf das Dreieck  $PRR'$ , schneidet  $Q''R''$ , d. h. die Polare  $a$  von  $A$ , die Gerade  $RR'$  in dem zu  $A$  konjugierten Punkt  $A'$  zwischen  $R$  und  $R'$ . Die Involution  $(R, R'), (A, A')$  ist hyperbolisch,  $RR'$  schneidet die Kurve, und  $R'$  ist aus demselben Grunde innerer Punkt, wie in Fig. 3  $P$  als Schnitt von  $UV$  und  $XY$ .

Das ganze von  $U, V$  begrenzte Kontinuum  $UV$ , in dem  $P$  liegt, mit Ausnahme der Begrenzungspunkte  $U, V$  (Kurvenpunkte), besteht also aus inneren Punkten.

Durchläuft  $P$  in Fig. 3 das Intervall der inneren Punkte, so durchläuft der konjugierte Punkt  $Q$ , der ja nach dem obigen stets ein äußerer Punkt ist, das offene Restintervall der Gesamtgeraden  $UV$ . Dieses offene Restintervall besteht also aus lauter äußeren Punkten. Daraus folgt: Von einem beliebigen inneren Punkt  $A$  kann man nach einem beliebigen inneren Punkt  $B$  auf gerader Linie gehen, wobei nur innere Punkte passiert werden. Entsprechendes gilt für zwei äußere Punkte. Dagegen ist es unmöglich, auf gerader Linie von dem inneren Punkt  $A$  nach dem äußeren Punkt  $B$  zu gelangen, ohne die Kurve zu treffen. Ja man sieht auch leicht ein, daß es keinen Polygonweg gibt, der, ohne einen Kurvenpunkt zu treffen, von  $A$  nach  $B$  führt. Damit ist unser Ziel erreicht.

Wir beweisen zum Schluß noch den

*Satz. Von einem Polardreieck einer Kurve zweiter Ordnung liegt stets eine Ecke im Gebiet der inneren Punkte, die zwei anderen Ecken liegen im Gebiet der äußeren Punkte.*

Zum Beweis gehe man in Fig. 3 von dem äußeren Punkt  $Q$  aus, so schneidet seine Polare  $XY$  die Kurve, die zwei anderen Ecken  $P$  und  $R$  werden von  $X, Y$  harmonisch getrennt; der eine dieser ist also ein innerer, der andere ein äußerer Punkt. Geht man von dem inneren Punkt  $P$  aus, so schneidet  $PR$  stets die Kurve in zwei Punkten  $X$  und  $Y$ .  $R$  ist jetzt ein äußerer Punkt, und die Tangenten in  $X$  und  $Y$  bestimmen als Schnittpunkt die dritte Ecke  $Q$ , die ein äußerer Punkt ist.

Tübingen, den 8. Juni 1933.

(Eingegangen am 11. 6. 1933.)

## Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

### Über die Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes.

Von

H. Behnke und P. Thullen in Münster (Westf.).

Mit der Übertragung des Weierstraßschen Satzes von der Existenz einer ganzen Funktion zu vorgegebenen Nullstellen auf Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen und den damit zusammenhängenden Fragen — insbesondere der *Quotientendarstellung meromorpher Funktionen* — beschäftigen sich bereits die frühesten Untersuchungen zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Wir erinnern an die Arbeit von Poincaré aus dem Jahre 1883<sup>1)</sup> und vor allem an die Cousinsche Arbeit aus dem Jahre 1895<sup>2)</sup>, die das Ergebnis von Poincaré wesentlich verschärft. Eine besondere Schwierigkeit bei der Übertragung des Satzes von Weierstraß entsteht dadurch, daß im Raume von  $n$  Veränderlichen die Nullstellen einer regulären Funktion nicht mehr isoliert liegen, sondern  $(2n - 2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten bilden; in den diese Mannigfaltigkeiten charakterisierenden analytischen Gleichungen treten möglicherweise Funktionen auf, deren Singularitäten es unmöglich machen, nach dem klassischen Verfahren die Produkte zu bilden<sup>3)</sup>.

Zum Verständnis des Folgenden führen wir zunächst den Begriff der Äquivalenz von Funktionen ein: Zwei in der Umgebung eines Punktes  $P$  reguläre Funktionen  $f$  und  $g$  heißen im Punkte  $P$  äquivalent in bezug auf Division oder kurz *äquivalent*, falls der Quotient  $\frac{f}{g}$  im Punkte  $P$  regulär und von Null verschieden ist.

<sup>1)</sup> Poincaré, "Sur les fonctions de deux variables complexes", Acta Math. 2 (1883).

<sup>2)</sup> Cousin, "Sur les fonctions de  $n$  variables complexes", Acta Math. 19 (1895).

<sup>3)</sup> Zur vorliegenden Arbeit vgl. insbesondere a) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, Kap. III, §§ 22—28. b) Hartogs, „Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen“, Jahresber. D. M. V. 16 (1907). c) Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen.

Der Cousinsche Satz lautet dann:

Satz A<sup>3)</sup>. Jedem Punkt  $P$  des endlichen Raumes  $R_{2n}$  der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (bzw. eines einfachzusammenhängenden Zylinderbereiches  $\mathfrak{Z}$ ) sei eine Umgebung  $\mathfrak{U}(P)$  und eine dort reguläre Funktion  $f_P(z_1, z_2, \dots, z_n)$  so zugeordnet, daß stets, falls  $Q$  einen beliebigen Punkt aus  $\mathfrak{U}(P)$ ,  $f_Q$  die  $Q$  zugeordnete Funktion bedeuten, die Funktionen  $f_P$  und  $f_Q$  im Punkte  $Q$  äquivalent sind. Dann gibt es eine ganze (bzw. in  $\mathfrak{Z}$  reguläre) Funktion  $G(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , die in jedem Punkte  $P$  mit der zugehörigen Funktion  $f_P$  äquivalent ist.

Aus Satz A folgt fast unmittelbar<sup>4)</sup>:

Satz B. Ist die Funktion  $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$  im ganzen endlichen Raume  $R_{2n}$  (bzw. in dem einfachzusammenhängenden Zylinderbereich  $\mathfrak{Z}$ ) meromorph, so gibt es stets zwei ganze (bzw. in  $\mathfrak{Z}$  reguläre) Funktionen  $G(z_1, z_2, \dots, z_n)$  und  $H(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , so daß  $F(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv \frac{G(z_1, z_2, \dots, z_n)}{H(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ ;  $G$  und  $H$  sind dabei in jeder gemeinsamen Nullstelle zueinander teilerfremd.

Satz B hängt eng mit der bisher nur bei speziellen Bereichen gelösten Frage zusammen, ob ein Meromorphiebereich stets auch ein Regularitätsbereich ist. Ist nämlich  $\mathfrak{R}$  der Meromorphiebereich einer Funktion  $F$  und läßt sich  $F$  als Quotient zweier in  $\mathfrak{R}$  regulären Funktionen  $G$  und  $H$  darstellen, so ist  $\mathfrak{R}$  mit dem Durchschnitt der Regularitätsbereiche der beiden Funktionen  $G$  und  $H$  identisch, nach dem Hauptsatze über die Regularitätshüllen also selbst ein Regularitätsbereich<sup>4)</sup>.

Lange war die Frage offen, ob sich Satz A und damit Satz B auf beliebige Bereiche des  $R_{2n}$  übertragen läßt, bis Hartogs<sup>5)</sup> als erster (an dem Beispiele eines beschränkten, allerdings mehrfachzusammenhängenden Bereiches) nachwies, daß sicher Satz A nicht mehr in beliebigen Bereichen gelten kann. Später gab dann H. Cartan<sup>6)</sup> einen beschränkten, einfachzusammenhängenden Bereich und Gronwall<sup>7)</sup> sogar einen (mehrfachzusammenhängenden) Zylinderbereich an, auf die sich Satz A in der obigen Form nicht verallgemeinern läßt.

<sup>4)</sup> Zur Theorie der Regularitätsbereiche und Regularitätshüllen vgl. a) Thullen, „Die Regularitätshüllen“, Math. Ann. 106 (1932), und insbesondere b) H. Cartan-Thullen, „Regularitäts- und Konvergenzbereiche“, Math. Ann. 106 (1932).

<sup>5)</sup> Vgl. <sup>3)</sup> b), S. 238. Hartogs ließ noch offen, ob in dem von ihm angegebenen Beispiel Satz B gilt. Man kann nun leicht zeigen, daß auf den angegebenen Bereich Satz B sicher übertragbar ist.

<sup>6)</sup> Auf einem Gastvortrage in Münster im Mai 1931.

<sup>7)</sup> Gronwall, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 20 (1914), S. 173 und Transact. Amer. Soc. 18 (1917).

Durch die Kenntnis der Regularitätshüllen<sup>4)</sup> gelingt es nun (vgl. § 1), ein allgemeines Prinzip zur Konstruktion von Bereichen dieser Art anzugeben, auf das auch die Beispiele von Hartogs und Cartan zurückgehen.

In § 2 untersuchen wir die Kreiskörper und vor allem die Reinhardt'schen Körper hinsichtlich der Übertragbarkeit von Satz A. Wir werden insbesondere zeigen, daß ein Reinhardt'scher Körper (von speziellen Ausnahmen abgesehen), in dem Satz A gilt, notwendig ein Regularitätsbereich ist.

Andererseits ist eine in einem Reinhardt'schen Körper meromorphe Funktion stets noch im kleinsten umfassenden vollkommenen Reinhardt'schen Körper meromorph<sup>5)</sup>. Hat somit ein solcher Körper einen Dizylinder zur Regularitätshülle, so gilt dort nach Satz B sicher die Quotientendarstellung der im Innern meromorphen Funktionen. Es ist also zugleich die Existenz (auch einfachzusammenhängender) Bereiche bewiesen, auf die sich zwar Satz B, nicht aber Satz A übertragen läßt.

In § 3 wird gezeigt werden, wie man — unter Abänderung der Cousin'schen Bedingungen — zu vorgegebenen „Nullstellenfunktionen“ zugehörige analytische Funktionen konstruieren kann, sobald in den vorgegebenen Bereichen gewisse Entwicklungen der dort regulären Funktionen möglich sind.

Die im folgenden auftretenden Bereiche setzen wir sämtlich als *schlicht* voraus.

### § 1.

Gegeben sei der Raum  $R_{2n}$  der  $n$  komplexen Veränderlichen  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .  $\mathfrak{B}_0$  sei ein beliebiger Bereich des  $R_{2n}$  mit der Eigenschaft, daß seine Regularitätshülle  $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$  mindestens einen Punkt  $P_0$  und eine volle Umgebung  $\mathcal{U}(P_0)$  enthält, die keinen Punkt mit  $\mathfrak{B}_0$  gemeinsam hat.  $E$  sei dann eine durch  $P_0$  laufende  $(2n-2)$ -dimensionale analytische Ebene, die den Bereich  $\mathfrak{B}_0$  trifft (eine solche Ebene existiert sicher);  $E$  habe die Gleichung  $h(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = 0$ .  $\mathfrak{B}_1$  sei ferner ein Bereich, der  $\mathcal{U}(P_0)$ , aber außer den in  $\mathcal{U}(P_0)$  liegenden Punkten der Ebene  $E$  keine weiteren Punkte auf  $E$  enthält; die Bereiche  $\mathfrak{B}_0$  und  $\mathfrak{B}_1$  mögen einen Durchschnitt gemeinsam haben. Wir behaupten dann, daß sich Satz A nicht auf den Vereinigungsbereich der beiden Bereiche  $\mathfrak{B}_0$  und  $\mathfrak{B}_1$  übertragen läßt.

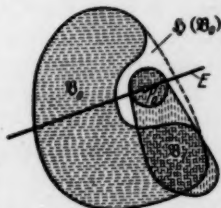


Fig. 1.

<sup>4)</sup> Vgl. etwa H. Cartan, „Les fonctions de deux variables complexes etc.“, Journ. de Math. (10) 9 (1931), S. 24.



Hierzu wählen wir  $f_P \equiv h(z_1, z_2, \dots, z_n)$  in jedem Punkte  $P$  auf  $E$ , der zugleich im Innern von  $\mathfrak{B}_0$  liegt. In allen übrigen Punkten von  $\mathfrak{B}$  (insbesondere also in  $P_0$ ) sei  $f_P \equiv 1$ . Bei geeigneter Wahl von Umgebungen  $U(P)$  genügen offenbar die  $f_P$  der Äquivalenzbedingung.

Existierte nun eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $G(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , die in allen Punkten mit der zugehörigen Funktion  $f_P$  äquivalent wäre, so müßte die Funktion

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv \frac{G(z_1, z_2, \dots, z_n)}{h(z_1, z_2, \dots, z_n)}$$

in  $\mathfrak{B}_0$  und damit im Innern der Regularitätshülle  $\mathfrak{S}(\mathfrak{B}_0)$  regulär sein — also auch in  $P_0$  selbst. Da aber  $h(P_0) = 0$ , ist dies nur möglich, falls auch  $G$  in  $P_0$  verschwindet;  $G$  könnte somit in  $P_0$  nicht mit  $f_{P_0} \equiv 1$  äquivalent sein, w. z. b. w.

Bemerkt sei, daß an die Stelle der Ebene  $E$  jede andere durch  $P_0$  laufende  $(2n - 2)$ -dimensionale analytische Fläche  $\mathfrak{F}$  treten kann, sofern sie den Bereich  $\mathfrak{B}_0$  schneidet und durch eine in  $\mathfrak{B}_0$  reguläre Funktion dargestellt wird, die innerhalb  $\mathfrak{B}_0$  nur auf  $\mathfrak{F}$  verschwindet.

Bei geeigneter Wahl von  $P_0$  unterscheidet sich der Bereich  $\mathfrak{B}$  beliebig wenig vom Bereiche  $\mathfrak{B}_0$ .

## § 2.

In diesem Paragraphen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Funktionen der beiden Veränderlichen  $w$  und  $z$ . Die Ergebnisse lassen sich aber ohne Schwierigkeit auf Funktionen von  $n$  Veränderlichen übertragen.

Hilfssatz 1. Das durch den Punkt  $P$  laufende analytische Flächenstück  $\mathfrak{F}$  sei in der Umgebung von  $P$  Nullstellenfläche der in  $P$  regulären Funktion  $f(w, z)$ . Ist dann  $Q$  ein beliebiger Punkt auf  $\mathfrak{F}$ , der sich mit  $P$  durch eine auf  $\mathfrak{F}$  liegende Kurve  $\mathfrak{C}$  verbinden läßt, die nur aus regulären Punkten der Funktion  $f$  besteht, so ist  $Q$  ebenfalls eine Nullstelle von  $f$ .

Wäre nämlich der Satz falsch, so müßte es auf dem Kurvenstück  $\mathfrak{C}$  von  $P$  aus einen ersten Punkt  $Q'$  geben, so daß in jeder Umgebung von  $Q'$  Punkte auf  $\mathfrak{F}$  lägen, in denen  $f$  nicht verschwindet.  $Q'$  ist selbst (wegen der Stetigkeit) eine Nullstelle von  $f$ . Dann aber folgt aus dem Vorbereitungssatz<sup>9)</sup> und der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung eines analytischen Flächenstückes, daß  $f$  in einer genügend kleinen Umgebung von  $Q'$  in sämtlichen Punkten von  $\mathfrak{F}$  verschwinden müßte, im Widerspruch zu unserer Annahme.

<sup>9)</sup> Vgl. 2) a), S. 86 ff.

Aus dem Hilfssatze ergibt sich unmittelbar:

Satz 1. Ist  $\mathfrak{B}$  ein nicht vollkommener Kreiskörper<sup>10)</sup>, so lassen sich stets Funktionen  $f_P$  so wählen, daß sie zwar der Äquivalenzbedingung genügen, aber keine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion existiert, die in jedem  $P$  mit der zugehörigen Funktion  $f_P$  äquivalent wäre.

Ist nämlich  $\mathfrak{B}$  nicht vollkommen, so gibt es mindestens eine Ebene  $w = c_0 z$ , die aus  $\mathfrak{B}$  eine Kreisscheibe

$$(\mathfrak{F}_1) \quad |w|^2 + |z|^2 < r^2, \quad s = \frac{w}{z} = c_0$$

und einen mit  $\mathfrak{F}_1$  punktfremden Kreisring

$$(\mathfrak{F}_2) \quad r_1^2 < |w|^2 + |z|^2 < r_2^2, \quad s = c_0 \quad (r \leq r_1 < r_2)$$

ausschneidet. In jedem Punkte  $P$  auf  $\mathfrak{F}_1$  wähle man  $f_P \equiv w - c_0 z \equiv g(w, z)$ , in allen übrigen Punkten von  $\mathfrak{B}$  sei  $f_P \equiv 1$ ; bei geeigneter Wahl der  $\mathfrak{U}(P)$  genügen die  $f_P$  der Äquivalenzbedingung. Da nun jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion auch im kleinsten umfassenden vollkommenen Kreiskörper, insbesondere also auf der vollen Kreisscheibe

$$(\mathfrak{F}) \quad |w|^2 + |z|^2 < r_2^2, \quad s = c_0$$

regulär ist<sup>11)</sup>, muß nach dem Hilfssatze eine mit  $g$  in den Punkten von  $\mathfrak{F}_1$  äquivalente Funktion auf ganz  $\mathfrak{F}$  verschwinden, kann also auf  $\mathfrak{F}_2$  nicht mit  $f \equiv 1$  äquivalent sein, w. z. b. w.

Satz 2. Gilt in einem Reinhardtschen Körper  $\mathfrak{B}$  die Aussage von Satz A, so ist  $\mathfrak{B}$  notwendig entweder ein Regularitätsbereich oder unterscheidet sich von einem solchen höchstens um Stücke der beiden Symmetrieebenen  $w = 0$  und  $z = 0$ .

Beweis. Der Reinhardtsche Körper  $\mathfrak{B}$  sei kein Regularitätsbereich, noch unterscheide er sich von seiner Regularitätshülle nur um Stücke der  $w$ - oder  $z$ -Ebene. Wir beweisen, daß man in  $\mathfrak{B}$  geeignete  $f_P$  wählen kann, die den Äquivalenzbedingungen genügen, so daß es aber keine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion gibt, die mit allen  $f_P$  jeweils in  $P$  äquivalent wäre.

I.  $\mathfrak{B}$  sei nicht vollkommen! (Auch unterscheide sich  $\mathfrak{B}$  von einem vollkommenen Reinhardtschen Körper nicht lediglich um Stücke der Ebenen  $w = 0$  oder  $z = 0$ ).  $\mathfrak{B}$  ist dann sicher kein Regularitätsbereich, da jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion in den kleinsten umfassenden vollkommenen Reinhardtschen Körper fortsetzbar ist<sup>11)</sup>.

<sup>10)</sup> Unter einem Kreiskörper bzw. Reinhardtschen Körper des  $R_4$  versteht man bekanntlich einen Bereich  $\mathfrak{B}$ , der mit einem Punkte  $(a, b)$  auch alle Punkte  $(a e^{i\varphi}, b e^{i\varphi})$  bzw. alle Punkte  $(a e^{i\varphi}, b e^{i\varphi})$  und ferner den Punkt  $(0, 0)$  enthält. Liegen außerdem stets alle Punkte  $(ka, kb)$  bzw. alle Punkte  $(ka, hb)$  mit  $|k| \leq 1$ ,  $|h| \leq 1$  in  $\mathfrak{B}$ , so heißt  $\mathfrak{B}$  ein vollkommener Kreiskörper bzw. ein vollkommener Reinhardtscher Körper.

<sup>11)</sup> Vgl. 4).

In diesem Falle gibt es zwei reelle Zahlenpaare  $(\varrho_1, \varrho_2)$  und  $(r_1, r_2)$  mit  $0 < r_1 < \varrho_1$ ,  $0 < r_2 < \varrho_2$ , so daß alle Punkte  $(w, z)$  mit  $|w| = \varrho_1$ ,  $|z| = \varrho_2$  und  $|w| = r_1$ ,  $|z| = r_2$  Randpunkte des Bereiches  $\mathfrak{B}$  sind. Wir dürfen ohne Einschränkung  $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$  voraussetzen.

Da  $r_1, r_2 < 1$ , lassen sich zwei ganze positive Zahlen  $\mu$  und  $\nu$  so wählen, daß  $r_2 > r_1^\mu$  und  $r_1 > r_2^\nu$ . Die beiden Hyperflächen

$$r_1^\mu |z| = r_2 |w|^\mu \quad \text{und} \quad r_2^\nu |w| = r_1 |z|^\nu$$

laufen dann durch  $(0, 0)$  und  $(r_1, r_2)$ , und die außerhalb des Dizylinders  $|w| < r_1$ ,  $|z| < r_2$  liegenden Stücke dieser Hyperflächen trennen den Randpunkt  $(1, 1)$  des Bereiches  $\mathfrak{B}$  von dem inneren Punkte  $(0, 0)$ . Hieraus ergibt sich, daß entweder die Fläche

$$(\mathfrak{F}^{(1)}) \quad r_1^\mu z = r_2 w^\mu$$

oder

$$(\mathfrak{F}^{(2)}) \quad r_2^\nu w = r_1 z^\nu$$

den Bereich  $\mathfrak{B}$  in zwei punktfremden Stücken  $\mathfrak{F}_1^{(1)}$  und  $\mathfrak{F}_2^{(1)}$  schneidet. Da die Regularitätshülle  $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$  den kleinsten  $\mathfrak{B}$  umfassenden vollkommenen Reinhardtischen Körper enthält<sup>11)</sup>, sind  $\mathfrak{F}_1^{(1)}$  und  $\mathfrak{F}_2^{(1)}$  sicher innerhalb  $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$  über Punkte der Fläche  $\mathfrak{F}^{(1)}$  bzw.  $\mathfrak{F}^{(2)}$  miteinander verbindbar. Die Behauptung ergibt sich dann wie in Satz 1.

II.  $\mathfrak{B}$  sei ein vollkommener Reinhardtischer Körper, aber kein Regularitätsbereich. Sind  $(\varrho_1, \varrho_2)$  und  $(r_1, r_2)$  mit  $r_1 < \varrho_1$ ,  $r_2 > \varrho_2$  zwei Paare reeller, positiver Zahlen, so gibt es genau eine Hyperfläche der Form

$$(+ ) \quad |w||z|^\beta = C \quad (\beta > 0),$$

die die beiden Punkte  $(w = \varrho_1, z = \varrho_2)$  und  $(w = r_1, z = r_2)$  enthält. (Beweis durch Ausrechnung.)

Hilfssatz 2. Ein vollkommener Reinhardtischer Körper ist dann und nur dann ein Regularitätsbereich, falls folgende Bedingung erfüllt ist: Liegen die beiden reellen Punkte  $(\varrho_1, \varrho_2)$  und  $(r_1, r_2)$  mit  $0 < r_1 < \varrho_1$ ,  $0 < \varrho_2 < r_2$  auf dem Rande von  $\mathfrak{B}$ , ist ferner  $|w||z|^\beta = C$  die durch diese beiden Punkte bestimmte Hyperfläche  $(+)$ , so liegen sämtliche Punkte  $(w, z)$  im Innern von  $\mathfrak{B}$ , für die zugleich:

$$|w| < \varrho_1, \quad |z| < r_2, \quad |w||z|^\beta < C.$$

Diese Bedingung ist nämlich nach einem bekannten Satze<sup>12)</sup> notwendig und hinreichend dafür, daß  $\mathfrak{B}$  der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist.  $\mathfrak{B}$  ist aber dann und nur dann ein solcher Konvergenzbereich, wenn er ein Regularitätsbereich ist<sup>13)</sup>. Hilfssatz 2 läßt sich übrigens

<sup>12)</sup> Vgl. etwa Hartogs, Math. Annalen 62 (1906) und B. Almer, Ark. f. Math. 17 (1922), N. 7, S. 15.

<sup>13)</sup> Vgl. a) b) S. 641.

auch unmittelbar aus der Konvexität bezüglich einer Klasse von Monomen beweisen<sup>19)</sup>.

Ist demnach der vollkommene Reinhardtsche Körper  $\mathfrak{B}$  kein Regularitätsbereich, so gibt es auf dem Rande von  $\mathfrak{B}$  mindestens ein reelles Punktepaar  $(\varrho_1, \varrho_2)$  und  $(r_1, r_2)$ ,  $0 < r_1 < \varrho_1$ ,  $0 < \varrho_2 < r_2$ , so daß innerhalb

$$(*) \quad |w| < \varrho_1, \quad |z| < r_2, \quad |w||z|^\beta < C$$

Punkte liegen, die nicht dem Innern von  $\mathfrak{B}$  angehören ( $|w||z|^\beta = C$  bedeute wieder die zu den beiden Punkten gehörige Hyperfläche  $(+)$ ). Da die nicht in  $\mathfrak{B}$  liegenden, aber gleichzeitig die Ungleichungen  $(*)$  befriedigenden Punkte mindestens ein vierdimensionales „Ringgebiet“ ausfüllen, so schneidet für genügend kleines  $t$  die zu dem Punktepaar  $(\varrho_1, (1-t)\varrho_2)$  und  $((1-t)r_1, r_2)$  gehörige Hyperfläche  $|w||z|^\beta = C'$  den Bereich  $\mathfrak{B}$  in zwei punktfremden Stücken; wir können dabei  $t$  so wählen, daß  $\beta'$  rational ist — etwa  $\beta' = \frac{p}{q}$ ,  $p$  und  $q$  ganz positiv. Es schneidet also insbesondere die analytische Fläche

$$(\tilde{\mathfrak{F}}) \quad w^q z^p - C'^q = 0$$

aus  $\mathfrak{B}$  zwei punktfremde Flächenstücke  $\tilde{\mathfrak{F}}_1$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}_2$  aus, die aber sicher innerhalb der Regularitätshülle  $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$  auf der Fläche  $\tilde{\mathfrak{F}}$  miteinander verbindbar sind (vgl. Hilfssatz 2). Hieraus ergibt sich dann, wie oben, die Behauptung.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen:

Das Versagen des Cousinschen Satzes in den von uns betrachteten Fällen liegt darin, daß der vorgegebene Bereich  $\mathfrak{B}$  von einem analytischen Flächenstück  $\tilde{\mathfrak{F}}$  in zwei punktfremden Stücken  $\tilde{\mathfrak{F}}_1$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}_2$  geschnitten wird, andererseits aber jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre, auf einer der beiden Flächenstücke verschwindende Funktion notwendig auch auf dem anderen Stück verschwindet. Der Grund hierfür war in den Beispielen des § 1, daß zu einem solchen Bereiche  $\mathfrak{B}$  ein Teilbereich  $\mathfrak{B}_0$  existierte, der das Flächenstück  $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ , aber keinen Punkt von  $\tilde{\mathfrak{F}}_2$  enthielt, die Regularitätshülle von  $\mathfrak{B}$  aber sowohl  $\tilde{\mathfrak{F}}_1$  wie  $\tilde{\mathfrak{F}}_2$  umfaßte. In den Beispielen des § 2 ließen sich  $\tilde{\mathfrak{F}}_1$  und  $\tilde{\mathfrak{F}}_2$  innerhalb der Regularitätshülle durch eine nur aus Punkten der Fläche  $\tilde{\mathfrak{F}}$  bestehende Kurve miteinander verbinden.

Insbesondere sahen wir, daß Satz A auf keinen Reinhardtschen Körper übertragbar ist, dessen Regularitätshülle um ein volles vierdimensionales Stück „größer“ ist. So fragt es sich, ob es überhaupt einen einfachzusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B}$  gibt, auf den sich Satz A übertragen läßt, dessen Regularitätshülle aber zugleich einen Punkt enthält, der mit einer vollen Umgebung außerhalb von  $\mathfrak{B}$  liegt.

Auf der anderen Seite gelang es bisher nicht, einen einfachzusammenhängenden Regularitätsbereich anzugeben, in dem Satz A nicht gälte. Es ist also noch vollkommen die Frage offen, *ob nicht Satz A und damit Satz B wenigstens auf alle einfachzusammenhängenden Regularitätsbereiche verallgemeinert werden kann.*

Die letzte Frage hängt eng mit der folgenden zusammen: Gibt es einen einfachzusammenhängenden Regularitätsbereich  $\mathfrak{R}$ , der von einem analytischen Flächenstück  $g(w, z) = 0$  ( $g$  regulär in  $\mathfrak{R}$ ) in zwei punktfremden Stücken geschnitten wird, zu dem ferner ein Bereich  $\mathfrak{B}_0$  existiert, der nur Punkte eines der beiden Flächenstücke enthält und zugleich  $\mathfrak{R}$  zur Regularitätshülle hat. Auf einen solchen Bereich  $\mathfrak{R}$  wäre nämlich Satz A sicher nicht übertragbar (vgl. § 1).

Bemerkung. Daß auch ein einfachzusammenhängender Regularitätsbereich durch eine analytische Fläche in zwei punktfremden Stücken geschnitten werden kann, zeigt das folgende Beispiel (hier gelingt es natürlich nicht, einen Bereich  $\mathfrak{B}_0$  der oben gesuchten Art zu finden): Die Fläche  $w = 10z - 20z^2$  hat mit dem Dizylinder  $|w| < 1, |z| < 1$  den Punkt  $(0, 0)$  und  $(0, \frac{1}{2})$  gemeinsam. Aus  $|w| > 10|z| - 20|z|^2$  folgt, daß auf  $|z| = \frac{1}{2}$  innerhalb  $|w| < 1$  kein Punkt der Fläche liegen kann. Die Punkte  $(0, 0)$  und  $(0, \frac{1}{2})$  müssen also zwei punktfremden Stücken  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_2$  angehören.

Hieraus ergibt sich weiter, daß es im Dizylinder Funktionen gibt, die auf  $\mathfrak{F}_1$  nicht aber auf  $\mathfrak{F}_2$  verschwinden, für die also die obige Fläche nicht Nullstellenfläche bleibt. Man hat hierzu nur auf  $\mathfrak{F}_1$  die Funktionen  $f_P \equiv w - 10z + 20z^2$  und in den übrigen Punkten  $f_P \equiv 1$  zu wählen. Die nach Satz A zu diesen  $f_P$  existierende Funktion  $G$  leistet bereits das Verlangte.

Man beachte ferner, daß jeder Bereich, der den Dizylinder als Regularitätshülle hat, notwendig Punkte beider Flächenstücke enthält.

### § 3.

Die Ergebnisse von § 1, § 2 zeigen uns, daß man im allgemeinen Falle die Bedingungen im „Kleinen“, wie sie Cousin verlangt, aufgeben muß, um in vorgegebenen Bereichen zu gegebenen Nullstellenmannigfaltigkeiten Funktionen konstruieren zu können. Wir stellen daher die folgende Frage:

In einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  des  $R_{2,n}$  sei eine abzählbare Menge dort regulärer Funktionen  $g_1, g_2, \dots, g_m, \dots$  gegeben, die je in mindestens einem Punkt aus  $\mathfrak{B}$  verschwinden mögen, ohne dabei identisch zu verschwinden. Gibt es dann eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre oder meromorphe Funktion  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ,

die genau die  $g_m$  zu Nullstellenfunktionen hat? Ausführlicher gesagt, heißt dies: Gibt es eine Funktion  $f$  mit den Eigenschaften: 1.  $f$  verschwindet in  $\mathfrak{B}$  nur, wo eines der  $g_m$  verschwindet; 2. die Funktion  $\frac{f}{g_m}$  ist (für jedes  $m$ ) in  $\mathfrak{B}$  regulär (bzw. falls  $f$  nur meromorph, so ist  $\frac{f}{g_m}$  mindestens in sämtlichen Punkten aus  $\mathfrak{B}$ , in denen  $g_m = 0$ , regulär oder außerwesentlich singular von zweiter Art<sup>13a)</sup> <sup>14)</sup>)).

Zunächst ist klar, daß zu den  $g_m$  nur dann in  $\mathfrak{B}$  eine solche Funktion  $f$  existieren kann, falls die Nullstellenflächen der  $g_m$  sich in keinem inneren Punkte des Bereiches  $\mathfrak{B}$  häufen oder — was dasselbe bedeutet — falls in jedem ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  liegenden Teilbereiche  $\mathfrak{B}_0$  nur endlich viele der  $g_m$  verschwinden können.

Setzt man dieses voraus, so läßt sich in vielen Fällen die Existenz einer zu den  $g_m$  gehörigen regulären Funktion  $f$  nachweisen. Im allgemeinen Falle versagt das angegebene Verfahren; indessen gibt es stets eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion  $F$ , die genau die  $g_m$  zu Nullstellenfunktionen hat.

Es gelten die beiden Sätze:

Satz 3. In einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  sei eine abzählbare Menge dort regulärer, nicht identisch verschwindender Funktionen  $g_1, g_2, \dots, g_m, \dots$  gegeben, von denen in jedem ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  liegenden Teilbereiche  $\mathfrak{B}_0$  jeweils nur endlich viele verschwinden mögen. Dann gibt es stets eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion  $F$ , welche sämtliche  $g_m$  und nur diese zu Nullstellenfunktionen hat.

Beweis. Wir können eine Folge von Bereichen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m, \dots$  so wählen, daß jedes abgeschlossene  $\mathfrak{B}_m$  im Innern von  $\mathfrak{B}_{m+1}$  und  $\mathfrak{B}$  liegt, und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ , ferner für jedes  $m$  die Nullstellen von  $g_m$  außerhalb des abgeschlossenen Bereiches  $\mathfrak{B}_m$  liegen.

Bezeichnet man dann mit  $M_m \neq 0$  das Minimum von  $|g_m|$  in  $\mathfrak{B}_m$  und setzt man  $C_m \geq \frac{2^m + 1}{M_m}$ , so ist  $\left| \frac{1}{C_m g_m + 1} \right| \leq \frac{1}{2^m}$  für alle Punkte aus  $\mathfrak{B}_m$ .

Es konvergiert also das Produkt

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv \prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{C_m g_m + 1} \right\}$$

<sup>13a)</sup> Außerwesentliche Singularitäten zweiter Art treten nämlich dort auf, wo  $g_m = 0$  und eine Polfläche von  $f$  sich schneiden.

<sup>14)</sup> Diese Frage hat zuerst Herr St. Bergmann in einer kürzlich erschienenen Arbeit aufgeworfen, vgl. „Über die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen“, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35 (1932), S. 1188–1194.

gleichmäßig im Innern von  $\mathfrak{B}$ .  $F$  stellt eine in ganz  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion dar; Polstellen sind dort, wo  $C_m g_m + 1 = 0$ ; diese Polstellenflächen können sich im Innern von  $\mathfrak{B}$  nicht häufen<sup>16)</sup>.  $F$  ist offenbar die gesuchte Funktion.

**Satz 4.** Die in  $\mathfrak{B}$  regulären Funktionen  $g_m$  mögen den Voraussetzungen von Satz 3 genügen. Ferner existiere eine Folge von Bereichen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_\mu, \dots$  mit den Eigenschaften: 1. der abgeschlossene Bereich  $\mathfrak{B}_\mu$  liegt in. Innern von  $\mathfrak{B}_{\mu+1}$  und  $\mathfrak{B}$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) und es ist  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_\mu \equiv \mathfrak{B}$ ; 2. jede in einem Bereiche  $\mathfrak{B}_\mu$  reguläre Funktion läßt sich in eine dort gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln, die nach noch in  $\mathfrak{B}$  regulären Funktionen fortschreitet. Dann gibt es stets eine im Innern von  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $f$ , die genau die  $g_m$  zu Nullstellenfunktionen hat.

Der Beweis wird ganz analog dem Beweis des entsprechenden Satzes über die Nullstellenflächen ganzer Funktionen geführt<sup>16)</sup>.

$G_1$  sei das Produkt aller  $g_m$ , die in  $\mathfrak{B}_1$  verschwinden;  $G_\mu$  ( $\mu \geq 2$ ) das Produkt der  $g_m$ , die in  $\mathfrak{B}_\mu$ , aber nicht in  $\mathfrak{B}_{\mu-1}$  verschwinden. Auf Grund der Voraussetzung läßt sich dann  $G_\mu$  in  $\mathfrak{B}_{\mu-1}$  darstellen durch

$$G_\mu \equiv e^{P_\mu + R_\mu},$$

wobei  $P_\mu$  und  $R_\mu$  in  $\mathfrak{B}$  regulär sind und der Rest  $R_\mu$  in  $\mathfrak{B}_{\mu-2}$  beliebig klein gemacht werden kann ( $\mu = 3, 4, \dots$ ); es sei etwa  $|R_\mu| < \frac{1}{\mu^2}$  in  $\mathfrak{B}_{\mu-2}$ . Das unendliche Produkt

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv G_1 G_2 \prod_3^\infty G_\mu e^{-P_\mu}$$

konvergiert dann im Innern von  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig und stellt dort die gesuchte Funktion dar.

**Folgerung.** Ist  $\mathfrak{B}$  ein Reinhardtscher Körper oder ein Kreiskörper oder ein Rungescher<sup>17)</sup> Regularitätsbereich des  $R_1$ , so gibt es zu vorgegebenen  $g_m$ , die den Voraussetzungen von Satz 3 genügen, stets eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion, die genau die  $g_m$  zu Nullstellenfunktionen hat.

Ist nämlich  $\mathfrak{B}$  ein Reinhardtscher Körper oder Kreiskörper, so läßt sich  $\mathfrak{B}$  durch eine Folge ganz im Innern liegender Reinhardtscher Körper bzw. Kreiskörper approximieren; jede in einem solchen Körper reguläre

<sup>16)</sup> Die  $C_m$  sind so zu wählen, daß nie Pol- und Nullstellenflächen zusammenfallen.

<sup>18)</sup> Vgl. etwa <sup>2)</sup> a), S. 269 ff.

<sup>17)</sup> Wir nennen einen Bereich  $\mathfrak{B}$  einen Rungeschen Bereich, falls sich jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion in eine in  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig konvergente Polynomreihe entwickeln läßt.



Funktion ist in eine Potenzreihe bzw. eine Reihe homogener Polynome entwickelbar<sup>18)</sup>).

Ist  $\mathfrak{B}$  ein Rungescher Regularitätsbereich, so ist  $\mathfrak{B}$  konvex in bezug auf eine Klasse von Polynomen<sup>19)</sup>. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß ein solcher Bereich stets durch ganz im Innern liegende Teilbereiche approximiert werden kann, die gleichfalls konvex in bezug auf Polynome sind — Bereiche dieser Art sind aber nach einem Satze von A. Weil<sup>20)</sup> selbst wieder Rungesche Bereiche, woraus sich die Behauptung ergibt.

Die Frage, ob in einem beliebigen Bereiche  $\mathfrak{B}$  zu vorgegebenen Nullstellenmannigfaltigkeiten nicht nur eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion, sondern stets auch eine dort reguläre Funktion existiert, hängt wiederum mit Satz B zusammen. Es sei nämlich Satz B auf einen Bereich  $\mathfrak{B}$  übertragbar.  $F$  sei die zu den vorgegebenen Nullstellenfunktionen  $g_m$  nach Satz 3 sicher existierende in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion. Nach unserer Annahme gibt es zu  $F$  zwei in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktionen  $G$  und  $H$ , so daß  $F \equiv \frac{G}{H}$ . Da  $G$  und  $H$  überall in  $\mathfrak{B}$  (in eventuell vorhandenen gemeinsamen Nullstellen) teilerfremd miteinander sind, muß  $G$  genau die Nullstellen von  $F$  besitzen, ist also die gesuchte Funktion. Wir können somit sagen:

*Laßt sich Satz B auf einen Bereich  $\mathfrak{B}$  übertragen, so gibt es stets zu vorgegebenen Funktionen  $g_m$ , die den Voraussetzungen von Satz 3 genügen, eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion, die genau die  $g_m$  zu Nullstellenfunktionen hat.*

<sup>18)</sup> Vgl. <sup>8)</sup>, S. 14, 19, vgl. auch <sup>4)</sup> a) Satz 10 und 11.

<sup>19)</sup> Vgl. <sup>4)</sup> b).

<sup>20)</sup> Vgl. A. Weil, "Sur les séries de polynomes de deux variables complexes", C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932), S. 1304—1305.

# Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

## § 1.

### Problemstellung.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel bei der Untersuchung der Funktionen von einer komplexen Veränderlichen (= F. v. 1 k. V.) bildet das Schwarzsche Lemma. Es erlaubt uns, aus einigen wenigen Angaben über die Funktion weitgehende Schlüsse hinsichtlich ihres Wertevorrates zu ziehen.

Bei dem Beweise des Lemmas bzw. verwandter Sätze aus diesem Ideenkreise stützt man sich im wesentlichen auf die folgenden Eigenschaften der F. v. 1 k. V. bzw. der harmonischen Funktionen:

I. Das Maximum des absoluten Betrages einer im Bereich regulären Funktion wird am Rande angenommen.

II. Zu jedem Bereich existiert eine Greensche Funktion  $G(x, y; \xi, \eta)$ , die in einem beliebig vorgegebenen Punkte  $\xi, \eta$  des Bereiches eine logarithmische Singularität hat.

III. Zu jeder harmonischen Funktion  $g(x, y)$  gibt es eine konjugierte  $k(x, y)$ , so daß  $g(x, y) + i k(x, y) = f(x + i y)$  eine F. d. k. V.  $z = x + i y$  wird. [Unter Benutzung von II und III erhält man in  $e^{G(x, y; \xi, \eta) + i K(x, y; \xi, \eta)}$  die bei dem Beweise des Lemmas (Lindelöfsches Prinzip) angewandte Vergleichsfunktion, die am Rande des Bereiches den Betrag eins hat und im Punkte  $\xi, \eta$  eine Nullstelle erster Ordnung besitzt].

IV. Für die F. v. 1 k. V. gilt der Cauchysche Integralsatz. (Aus II, IV gewinnt man die Jensen-Nevanlinnasche Formel.)

Bei dem Versuche, die Sätze aus dem angegebenen Ideenkreis auf den Fall der F. v. 2 k. V. zu übertragen<sup>1)</sup>, findet man zwar, daß I auch

<sup>1)</sup> Verallgemeinerungen des Schwarzschen Lemmas, die die Eigenschaften der durch ein Paar von F. v. 2 k. V. erzeugten Abbildungen betreffen, findet man in

bei F. v. 2 k. V. allgemein gilt, hingegen ist es offenbar unmöglich, eine F. v. 2 k. V. zu konstruieren, die auf dem (dreidimensionalen) Rande des Bereiches den Betrag eins hat und gleichzeitig in einem vorgegebenen Innenpunkte des Bereiches verschwindet. Aus einem bekannten Hartogsschen Satze folgt nämlich, daß eine Funktion, die irgendwo im Innern eines Bereiches  $\mathfrak{B}^3$ ) verschwindet, auch auf der Randmannigfaltigkeit  $\mathfrak{b}$  von  $\mathfrak{B}$  Nullstellen besitzen muß.

Daher werden hier Verallgemeinerungen der Sätze aus diesem Ideenkreise auf den Fall von F. v. 2 k. V. mit Hilfe der folgenden beiden Betrachtungsweisen erzielt.

I. Man untersucht allgemeine<sup>3)</sup>, einfach zusammenhängende Bereiche, wobei man den log des Absolutwertes der Funktion betrachtet und die Eigenschaften der biharmonischen Funktionen heranzieht; anstatt aber die Abschätzungen mittels der Jensen-Nevanlinnaschen Ungleichung bzw. durch Vergleich mit einer bekannten Funktion zu gewinnen, benutzt man gewisse aus der Theorie der Orthogonalfunktionen herrührende Sätze.

den bekannten Arbeiten von Reinhardt „Über Abbildungen durch analytische F. v. 2 k. V.“ Math. Ann. 83 (1921), S. 211–255. II. Teil, von Carathéodory „Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen F. v. 2 k. V.“ Math. Ann. 97 (1927), S. 76–98 und Carathéodory „Über Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische F. v. 2 k. V. vermittelt werden“. Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 96–145. Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Fragen liegen aber in einer wesentlich anderen Richtung als die in den genannten Arbeiten behandelten. Dagegen besitzt die vorliegende Untersuchung Berührungspunkte mit der Note: „Über F. v. 2 k. V., die ebene Pol- und Nullflächen besitzen“, Jahresber. d. D. M. V. 39 (1930), S. 266–268.

<sup>3)</sup> Mit deutschen Buchstaben sollen im folgenden stets Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden, wobei:

fette, große Buchstaben	vierdimensionale Mannigfaltigkeiten,
„ kleine	„ dreidimensionale
gewöhnliche, große	„ zweidimensionale
„ kleine	„ eindimensionale

bedeuten. Durch die — großen und kleinen — gleichen Buchstaben werden wir im folgenden einen Bereich und seine Berandung bezeichnen. So bedeutet  $\mathfrak{a}$  die Berandung von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{b}$  die Berandung von  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{c}$  die von  $\mathfrak{C}$ .  $\mathfrak{B}(z_2 = \bar{z}_2)$  bedeutet den Schnitt der Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{B}$  mit der Ebene  $z_2 = \bar{z}_2$ . Die im folgenden vorkommenden Mannigfaltigkeiten sind stets offen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil hervorgehoben wird.

<sup>3)</sup> Wir werden im folgenden nur schlichte, ganz im Endlichen gelegene Bereiche, die von endlich vielen regulären dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandet sind, betrachten; die Bezeichnung „allgemeine“ soll nur als Gegensatz zu gewissen, später vorkommenden, sehr speziellen Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche dienen.

Dieser Weg wird im § 2 eingeschlagen. Nach Erledigung gewisser Hilfsbetrachtungen über biharmonische Funktionen, die es erlauben, jede solche Funktion durch ihren quadratischen Mittelwert im betrachteten Bereiche abzuschätzen, gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis:

Es bedeute  $f(z_1, z_2)$  eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion mit endlichem

$$(1, 1) \quad J(f) = \int_{\mathfrak{B}} (\log |f(z_1, z_2)|)^2 d\omega = F \quad (d\omega \text{ viert. Vol.-El.}).$$

Unter  $n_k(z_1, z_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ , bzw.  $p_k(z_1, z_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , verstehen wir irgendwelche in  $\mathfrak{B}$  regulären und (um Triviales auszuschließen) in mindestens einer inneren Stelle von  $\mathfrak{B}$  verschwindende Funktionen mit endlichen  $J(n_k)$  bzw.  $J(p_k)$ .

Zu jeder Funktion  $n_k$  (bzw.  $p_m$ ) läßt sich ein geeignetes in  $\mathfrak{B}$  reguläres quadratintegrierbares  $h_k(z_1, z_2)$  bestimmen, derart, daß der log des Betrages der Funktion

$$(1, 2) \quad v_k(z_1, z_2) = \frac{n_k(z_1, z_2)}{h_k(z_1, z_2)} \quad \left( \text{bzw. } \pi_m = \frac{p_m(z_1, z_2)}{e_{m_1}(z_1, z_2)} \right)$$

zu allen in  $\mathfrak{B}$  biharmonischen Funktionen (im üblichen Sinne) orthogonal ist. Die Funktion (1, 2) (deren Nullstellen mit denen von  $n_k$  übereinstimmen) bezeichnen wir als normiert in bezug auf  $\mathfrak{B}$ .

Falls der Ausdruck 
$$\frac{f(z_1, z_2) \prod_{k=1}^{k=r} \pi_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=l} v_k(z_1, z_2)}$$
 in  $\mathfrak{B}$  regulär ist und

dort nirgends verschwindet, bezeichnen wir die  $v_k(z_1, z_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  bzw.  $\pi_k(z_1, z_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$  als die (gesamten) normierten Null- bzw. Polfunktionen von  $f(z_1, z_2)$  in  $\mathfrak{B}$ .

Es gibt in diesem Falle eine positive, nur von  $\mathfrak{B}$  abhängige (positive) Funktion  $H(z_1, z_2)$ , ferner eine Konstante  $S$ , die von  $\mathfrak{B}$  und den normierten Pol- und Nullfunktionen abhängt, so daß für jedes  $f(z_1, z_2)$  mit  $J(f) = F$  der angegebenen Art in  $\mathfrak{B}$  die Ungleichung

$$(1, 3) \quad \left[ \frac{1}{H(z_1, z_2)} \right]^{\sqrt{F-S}} \left| \frac{\prod_{k=1}^{k=l} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} \pi_k(z_1, z_2)} \right| \leq |f(z_1, z_2)|$$

$$\leq [H(z_1, z_2)]^{\sqrt{F-S}} \left| \frac{\prod_{k=1}^{k=l} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} \pi_k(z_1, z_2)} \right|$$

gilt<sup>4)</sup>. Es gibt Funktionen, für die die angegebenen Schranken erreicht werden.

II. Will man die Untersuchung auf spezielle Gebiete beschränken, so liegt es nahe, „Bereiche mit ausgezeichneten Randfläche“ zu betrachten.

Hierunter verstehen wir Bereiche, die die Eigenschaft haben, daß auf der (dreidimensionalen) Berandung des Bereiches eine (zweidimensionale) Fläche liegt, die (funktionentheoretisch) eine ähnliche Rolle spielt, wie in der Theorie d. F. v. 1 k. V. der Rand zweidimensionaler Bereiche.

Insbesondere wird hier eine spezielle Klasse von „Bereichen mit ausgezeichneten Randfläche“ betrachtet, die in einer früheren Arbeit näher untersucht wurde<sup>5)</sup>.

In der genannten Arbeit wurde gezeigt, daß zu jeder Fläche  $\mathfrak{F}$  mit der Parameterdarstellung

$$x_1 = f_1(u, v), \quad y_1 = f_2(u, v), \quad x_2 = g_1(v), \quad y_2 = g_2(v),$$

wo  $f_k$  bzw.  $g_k$  reelle periodische Funktionen der reellen Veränderlichen  $u$  und  $v$  bedeuten, die gewissen Stetigkeits- und Konvexitätsbedingungen unterworfen sind, Bereiche  $\mathfrak{M}$  existieren, deren Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  ist. (Näheres vgl. § 3). Unter Bestimmungsfläche (das ist ein Spezialfall einer „ausgezeichneten Randfläche“) wird eine Fläche verstanden, die folgende Eigenschaften hat:

1. Jede in  $\mathfrak{M}$  reguläre, in  $\mathfrak{M} + a$  stetige Funktion nimmt das Maximum des absoluten Betrages auf  $\mathfrak{F}$  an.

2. Zu jeder auf  $\mathfrak{F}$  stetigen (reellen) Funktion  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ <sup>6)</sup>, die gewissen Nebenbedingungen  $N$ <sup>7)</sup> genügt, gibt es eine in  $\mathfrak{M}$  reguläre,

<sup>4)</sup> In der entsprechenden Ungleichung im Falle d. 1 k. V. tritt an die Stelle von  $[H(z_1, z_2)]^{\sqrt{F-S}}$  das  $\max |f(z)|$  am Rande. [Vgl. dazu z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II (1927), S. 121, Formel (7).]

<sup>5)</sup> „Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der F. v. 2 k. V.“ Math. Ann. 104 (1931), S. 611–636. Vgl. auch die Arbeit „Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneten Randfläche“, Jahresber. d. deutsch. Math. Verein. 42 (1932), S. 238–252, insbesondere § IV, S. 249 ff. Die erste dieser Arbeiten werden wir im § 3 als die Arbeit A, die zweite als Arbeit V bezeichnen.

<sup>6)</sup> Mit  $z_1, z_2$  werden die Koordinaten der Punkte von  $\mathfrak{F}$  bezeichnet. Es werden im folgenden im allgemeinen (auch als Argumente von reellen Funktionen) an Stelle der Veränderlichen  $x_k, y_k$  die komplexen  $z_k = x_k + i y_k$  ( $k = 1, 2$ ) benutzt.

<sup>7)</sup> Der Sinn der Nebenbedingung  $N$  ist der folgende: Im Innern von  $\mathfrak{M}$  liegt der Produktbereich  $\mathfrak{P}_\varepsilon = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_\varepsilon$ , wo  $\mathbb{C}$  der von der Kurve  $z_2 = g_1(v) + i g_2(v)$  berandete Bereich ist, und  $\mathbb{R}_\varepsilon$  den Kreis  $|z_1| < \varepsilon$  bedeutet ( $\varepsilon > 0$ , hinreichend klein). Der auf der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{M}$  gegebenen Funktion  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  wird durch gewisse Vorschriften in eindeutiger Weise eine Funktion  $U$ , auf der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{P}_\varepsilon$  zugeordnet. Die Bedingung  $N$  besagt nun, daß es eine in  $\mathfrak{P}_\varepsilon$  reguläre biharmonische Funktion gibt, die auf  $\mathfrak{G}$  die Randwerte  $U$  annimmt.

in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{a}$  stetige biharmonische<sup>a)</sup> Funktion  $U(z_1, z_2)$ , die auf  $\mathfrak{F}$  die vorgeschriebenen Randwerte annimmt.

Man bezeichnet  $\mathfrak{F}$  als die „kleinste Bestimmungsfläche“ für die Klasse der in  $\mathfrak{A}$  regulären, in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{a}$  stetigen Funktionen, falls  $\mathfrak{F}$  außerdem die folgende Eigenschaft hat:

1a) Zu jedem Punkte  $P$  von  $\mathfrak{F}$  gibt es eine in  $\mathfrak{A}$  reguläre, in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{a}$  stetige Funktion  $h$ , so daß  $|h(z_1, z_2)|$  sein Maximum (bzgl.  $\mathfrak{A} + \mathfrak{a}$ ) in  $P$  und nur dort erreicht<sup>b)</sup>).

Die biharmonische Funktion  $U(z_1, z_2) = \mathbf{P}[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}]$  ist also durch die (der Nebenbedingung  $N$  unterworfenen) Funktion  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  in  $\mathfrak{A}$  eindeutig bestimmt (Funktionenfunktion hinsichtlich  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ). Ist  $\mathfrak{A}$  der Bizylinder  $\mathfrak{E}: |z_1| < 1, |z_2| < 1$ , so läßt sich die angegebene Funktionenfunktion in sehr natürlicher Weise auf den Fall verallgemeinern, daß  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  beschränkt und abteilungsweise stetig ist (aber nicht notwendigerweise der Bedingung  $N$  genügt), indem man unter  $\mathbf{P}[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}]$  diejenige doppeltharmonische Funktion versteht, die durch das Poissonische Doppelintegral

$$(1,3) \quad \mathbf{P}[r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}; u(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}); \mathfrak{E}] \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}) P(r_1, \Phi_1 - \varphi_1) P(r_2, \Phi_2 - \varphi_2) d\Phi_1 d\Phi_2, \\ P(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}$$

gegeben ist<sup>10)</sup>. Unter Heranziehung dieser Funktionenfunktion kann man im Falle des Bizylinders den folgenden Satz von Ostrowski verallgemeinern:

Zerlegt man die Peripherie  $\mathfrak{f}$  des Einheitskreises  $\mathfrak{E}$  in  $n$  Teile  $\mathfrak{f}_k$  ( $\mathfrak{f} = \sum_{k=1}^n \mathfrak{f}_k$ ), so gibt es  $n$  in  $\mathfrak{E}$  positive, nur von der Zerlegung abhängige Funktionen  $\mathbf{B}_k(z, \mathfrak{E})$ , so daß für jede in  $\mathfrak{E}$  reguläre, in  $\mathfrak{E} + \mathfrak{e}$  stetige Funktion  $f$  in  $\mathfrak{E}$  die Ungleichung gilt

$$\log |f(z)| \leq \sum_{k=1}^n \log M_k \cdot \mathbf{B}_k(z, \mathfrak{E}), \quad M_k = \max_{\text{auf } \mathfrak{f}_k} |f(z)|.$$

<sup>a)</sup> Die Definitionsgleichungen der biharmonischen Funktion lauten

$$(A) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_k^2} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

$$(B) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial y_1} = 0.$$

Funktionen, die nur (A) befriedigen, bezeichnet man als doppeltharmonische. Real- bzw. Imaginärteil einer F. v. 2 k. V. ist eine biharmonische Funktion.

<sup>b)</sup> Das Erfülltsein von 1a) bei den Bereichen  $\mathfrak{A}$  wurde in der in der Fußnote <sup>5)</sup>, S. 327 zitierten Arbeit A nicht explizite bewiesen, man erschließt es aber leicht mit Hilfe der dort angegebenen Methoden.

<sup>10)</sup> Vgl. dazu die in der Fußnote <sup>5)</sup> S. 327 zitierte Arbeit A.

Im § 3 wird gezeigt, daß man allgemein in den Bereichen  $\mathfrak{A}$  eine Funktionenfunktion definieren kann, die alle notwendigen Eigenschaften besitzt, um eine der Ostrowskischen analoge Formel aufzustellen. Hierbei wird entsprechend der Zerlegung der Randkurve im Falle d. F. 1 k. V. die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  in  $n$  Teile zerlegt, und die in der Ungleichung (3, 25) auftretenden Funktionen  $\mathbf{P}_k[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}]$  erweisen sich als positiv in jedem Punkt von  $\mathfrak{A}$ .

## § 2.

**Abschätzung der meromorphen Funktionen in allgemeinen Bereichen.**

$\mathfrak{B}$  sei ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet, das ganz im Endlichen liegt. Mit

$$(2, 1) \quad B_m(z_1, z_2), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

bezeichnen wir ein für die Klasse der in  $\mathfrak{B}$  quadratintegrierbaren biharmonischen Funktionen vollständiges System von Orthogonalfunktionen. Die Orthogonalitätsrelationen lauten hier

$$(2, 2) \quad \int_{\mathfrak{B}} B_m(z_1, z_2) B_n(z_1, z_2) d\omega = \delta_{mn}, \quad \delta_{mm} = 1 \\ \delta_{mn} = 0 \quad (m \neq n).$$

Hierbei ist  $d\omega$  das vierdimensionale Volumenelement, und unter  $\int_{\mathfrak{B}}$  soll, wie auch stets im folgenden,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}_m}$  verstanden werden, wo

$\mathfrak{B}_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) eine abzählbare Folge von ineinander geschachtelten Bereichen bedeutet, die  $\mathfrak{B}$  ausschöpfen. Die Existenz eines solchen vollständigen Systems kann leicht in derselben Weise wie in einem analogen Falle in einer früheren Arbeit<sup>11)</sup> dargetan werden. Um den dort auf S. 401–405 angegebenen Beweis auf unseren Fall zu übertragen, braucht nur der Satz herangezogen zu werden, daß die Grenzfunktion einer im Bereiche  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig konvergierenden Folge von biharmonischen Funktionen wieder biharmonisch ist. (Vgl. dazu auch die Ausführungen auf S. 333 der vorliegenden Arbeit.) Mit Hilfe der Theorie der Orthogonalfunktionen beweisen wir nunmehr den

**Hilfssatz 1.** *Zu jedem Bereich  $\mathfrak{B}$  existiert eine in jedem Punkte von  $\mathfrak{B}$  positive und stetige Funktion  $\chi(z_1, z_2)^{11)}$ , so daß für jede im Bereiche reguläre biharmonische Funktion  $G(z_1, z_2)$  mit endlichem  $\Gamma = \int_{\mathfrak{B}} G^2 d\omega$  die Abschätzung*

$$(2, 3) \quad |G(z_1, z_2)| \leq \sqrt{\Gamma \chi(z_1, z_2)}$$

*gilt.*

<sup>11)</sup> Zwei Sätze über F. v. 2 k. V., Math. Ann. 100 (1928), S. 399–410. Vgl. zum folgenden auch „Über unendliche Hermitesche Formen ...“, Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 641–677.



Beweis. Es sei  $P_0(z_1^0, z_2^0)$  ein Punkt von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}_0$  ein ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  gelegener Bizylinder mit dem Mittelpunkt in  $P_0$  und mit den Radien  $\varrho_1 > 0$  und  $\varrho_2 > 0$ . Wir wollen zeigen, daß für jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre biharmonische Funktion  $H(z_1, z_2)$

$$(2, 4) \quad \int_{\mathfrak{B}_0} H^2 d\omega \geq \pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 H_0^2$$

gilt, wobei zur Abkürzung  $H(z_1^0, z_2^0) = H_0$  gesetzt wurde.

Führt man für den Augenblick vermittle  $r_k e^{i\varphi_k} = z_k - z_k^0$  ( $k = 1, 2$ ) neue Koordinaten  $r_k, \varphi_k$  ein, so läßt sich jede Funktion in  $\mathfrak{B}_0$  in der Form

$$(2, 5) \quad \begin{aligned} H &= H_0 + \sum_m \sum_n r_1^m r_2^n [a_{mn} \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + b_{mn} \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)] \\ &= H_0 + \operatorname{Re} \left[ \sum_m \sum_n (a_{mn} - i b_{mn}) r_1^m r_2^n e^{i(m\varphi_1 + n\varphi_2)} \right]^{11a)} \end{aligned}$$

darstellen. Wir schließen dann in üblicher Weise

$$(2, 6) \quad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}_0} H^2 d\omega &\geq \int_{\mathfrak{B}_0} H^2 d\omega = \pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 H_0^2 + \pi^2 \sum_m \sum_n (a_{mn}^2 + b_{mn}^2) \frac{\varrho_1^{2(m+1)} \varrho_2^{2(n+1)}}{(m+1)(n+1)} \\ &\geq \pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 H_0^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$(2, 7) \quad M_n(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) = \frac{\sum_{k=1}^n B_k(z_1, z_2) B_k(z_1^0, z_2^0)}{\sum_{k=1}^n B_k^2(z_1^0, z_2^0)},$$

so erhält man:

$$(2, 8) \quad \int_{\mathfrak{B}_0} M_n^2(z_1, z_2; z_1^0, z_2^0) d\omega = \frac{1}{\sum_{k=1}^n B_k^2(z_1^0, z_2^0)}.$$

Da  $M_n(z_1^0, z_2^0; z_1^0, z_2^0) = 1$  ist und  $n$  beliebig groß genommen werden kann, so folgt nach (2, 4) für den Kern<sup>12)</sup>  $\chi(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} [B_k(z_1, z_2)]^2$  die Ungleichung

$$(2, 9) \quad \chi(z_1, z_2) \leq \frac{1}{\pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2}.$$

<sup>11a)</sup> Die Kombination  $(m, n) = (0, 0)$  ist bei  $\sum_m \sum_n$  auszuschließen.

<sup>12)</sup> Zu einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  gibt es unendlich viele vollständige Orthogonalsysteme (die durch unendliche orthogonale Transformationen auseinander hervorgehen). Der Kern  $\chi(z_1, z_2)$  ist von der speziellen Wahl des vollständigen Orthogonalsystems unabhängig.

wobei  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Radien der beiden Faktorkreise eines Bizylinders bedeuten, der ganz in  $\mathfrak{B}$  liegt und dessen Mittelpunkt der Punkt  $z_1, z_2$  ist. Aus der Endlichkeit des Kernes, der Ungleichung (2, 4) und der Vollständigkeit des Systems  $B_m(z_1, z_2)$  folgert man, daß jede in  $\mathfrak{B}$  reguläre biharmonische Funktion  $G(z_1, z_2)$  mit  $\int_{\mathfrak{B}} G^2 d\omega = \Gamma < \infty$  sich in  $\mathfrak{B}$  in der

Form

$$(2, 10) \quad G(z_1, z_2) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(z_1, z_2) \int_{\mathfrak{B}} G B_m d\omega$$

darstellen läßt, woraus man mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung (2, 3) erschließt. Die Reihe (2, 10) konvergiert in jedem ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  gelegenen Teilbereich gleichmäßig und absolut. Die in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion

$$(2, 11) \quad W(z_1, z_2; t_1, t_2) = M_{\infty}(z_1, z_2; t_1, t_2) \sqrt{\chi(t_1, t_2)} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} B_m(z_1, z_2) B_m(t_1, t_2)}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2(t_1, t_2)}},$$

für die

$$(2, 12) \quad \int W^2(z_1, z_2; t_1, t_2) d\omega_z = 1, \quad |W(t_1, t_2; t_1, t_2)| = \sqrt{\chi(t_1, t_2)}$$

gilt, bezeichnen wir als die zu dem Punkt  $(t_1, t_2)$ ,  $[(t_1, t_2) \in \mathfrak{B}]$  gehörige (biharmonische) Minimalfunktion des Bereiches  $\mathfrak{B}$ .

Hilfssatz 2<sup>13)</sup>. Ist  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2$  endlich, so ist

$$(2, 13) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}} \left( \sum_{k=m}^{\infty} a_k B_k(z_1, z_2) \right)^2 d\omega = 0.$$

Um (2, 13) zu beweisen, setze man für ganzes  $n < m$

$$r_{nm}(z_1, z_2) = \sum_{k=n}^{k=m} a_k B_k(z_1, z_2), \quad r_n(z_1, z_2) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k B_k(z_1, z_2).$$

Es ist dann offenbar

$$\int_{\mathfrak{B}} r_{nm}^2 d\omega = \sum_{k=n}^{k=m} a_k^2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \text{ und } r_n(z_1, z_2) = r_{nm}(z_1, z_2) + r_m(z_1, z_2),$$

woraus  $r_n^2 = r_{nm}^2 + 2r_{nm}r_m + r_m^2$  folgt.

Für jeden ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  gelegenen Teilbereich  $\mathfrak{B}_p$  gilt also

$$\int_{\mathfrak{B}_p} r_n^2 d\omega = \int_{\mathfrak{B}_p} r_{nm}^2 d\omega + 2 \int_{\mathfrak{B}_p} r_{nm} r_m d\omega + \int_{\mathfrak{B}_p} r_m^2 d\omega$$

<sup>13)</sup> Der Hilfssatz 2 wurde bei einer anderen Gelegenheit von Herrn Hammerstein aufgestellt.

und mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung

$$(2, 14) \quad \int_{\mathfrak{B}_p} r_n^2 d\omega \leq \int_{\mathfrak{B}_p} r_{nm}^2 d\omega + \int_{\mathfrak{B}_p} r_m^2 d\omega + 2 \left\{ \int_{\mathfrak{B}_p} r_{nm}^2 d\omega \int_{\mathfrak{B}_p} r_m^2 d\omega \right\}^{1/2}.$$

Ist nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k(z_1, z_2)$  in  $\mathfrak{B}_p$  zu  $\varepsilon$  und  $\mathfrak{B}_p$  ein  $m_0$ , so daß für  $m > m_0$  und alle Punkte in  $\mathfrak{B}_p$

$$|r_m(z_1, z_2)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\text{Vol.}(\mathfrak{B})}$$

ausfällt, wobei Vol. ( $\mathfrak{B}$ ) das Volumen von  $\mathfrak{B}$  bedeutet. Dann ist aber für  $m > m_0$

$$\int_{\mathfrak{B}_p} r_m^2 d\omega \leq \varepsilon.$$

Diese Abschätzung ergibt, in (2, 14) eingetragen,

$$\int_{\mathfrak{B}_p} r_n^2 d\omega \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 + 2\sqrt{\varepsilon} \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} + \varepsilon,$$

und hieraus folgt für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\mathfrak{B}_p} r_n^2 d\omega \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2,$$

gültig für jeden inneren Teilbereich von  $\mathfrak{B}$ . Damit ist (mit Rücksicht auf die Definition von  $\int_{\mathfrak{B}}$ ) die quadratische Integrierbarkeit von  $r_n$  für jedes  $n$  erwiesen, und es gilt

$$\int_{\mathfrak{B}} r_n^2 d\omega \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2,$$

woraus nun, da  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  endlich ist, (2, 13) folgt.

Die Existenz der Orthogonalfunktionen  $B_m(z_1, z_2)$  ermöglicht es, einen für das Folgende erforderlichen Begriff einzuführen. Sei  $R(z_1, z_2)$  eine in  $\mathfrak{B}$  definierte (reelle, nicht notwendigerweise biharmonische) Funktion mit endlichem  $\int_{\mathfrak{B}} R^2 d\omega$ . Gilt nun

$$(2, 15) \quad \int_{\mathfrak{B}} R B_m d\omega = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots,$$

so folgt auf Grund des Hilfssatzes 2 und des Entwicklungssatzes, daß

$$(2, 16) \quad \int_{\mathfrak{B}} R G d\omega = 0$$

gilt, wenn  $G(z_1, z_2)$  eine beliebige in  $\mathfrak{B}$  biharmonische, quadratintegrierbare Funktion ist, und die Funktion  $R(z_1, z_2)$  ist somit „in bezug auf die Klasse der in  $\mathfrak{B}$  biharmonischen Funktionen orthogonal“.

Ist eine nicht orthogonale Funktion  $T(z_1, z_2)$  mit endlichem  $\int_{\mathfrak{B}} T^2 d\omega$  gegeben, so erhält man in

$$(2, 17) \quad \mathbf{T}(z_1, z_2) = T(z_1, z_2) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z_1, z_2) \int_{\mathfrak{B}} T B_k d\omega$$

die der Funktion  $T(z_1, z_2)$  entsprechende orthogonale Funktion.

$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(z_1, z_2) \int_{\mathfrak{B}} T B_k d\omega$  stellt eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre quadratintegrierbare biharmonische Funktion dar. Die Tatsache, daß  $\mathbf{T}(z_1, z_2)$  orthogonal ist, folgt auf Grund des Hilfssatzes 2 in üblicher Weise aus der Vollständigkeit des Systems  $B_m(z_1, z_2)$ .

Unter einer zu der biharmonischen Funktion  $B(z_1, z_2)$  konjugierten Funktion versteht man in Analogie zu der Theorie d. F. l k. V. eine biharmonische Funktion  $K(z_1, z_2)$ , die durch die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung mit  $B(z_1, z_2)$  verbunden ist, also für die

$$(2, 18) \quad \frac{\partial B}{\partial x_k} = \frac{\partial K}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial B}{\partial y_k} = -\frac{\partial K}{\partial x_k} \quad (z_k = x_k + i y_k, \quad k = 1, 2)$$

gilt. Die zu  $B(z_1, z_2)$  konjugierte Funktion läßt sich offenbar in der Form

$$(2, 19) \quad K = \int_{a_1, b_1, a_2, b_2}^{x_1, y_1, x_2, y_2} \left( -\frac{\partial B}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial B}{\partial x_1} dy_1 - \frac{\partial B}{\partial y_2} dx_2 + \frac{\partial B}{\partial x_2} dy_2 \right) + \text{const.}$$

darstellen, und es ist  $B + iK = g(z_1, z_2)$ , wo  $g(z_1, z_2)$  eine in allen Regularitätsstellen von  $B$  und  $K$  reguläre F. v. 2 k. V. ist<sup>14)</sup>.

Die Einführung der konjugierten Funktion erlaubt u. a. zu zeigen, daß die Grenzfunktion einer in einem Bereiche  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig konvergierenden Folge von biharmonischen Funktionen in einem ganz im Innern von  $\mathfrak{B}$  gelegenen Teilbereich  $\mathfrak{B}'$  wieder biharmonisch ist. Wir können offenbar bei dem Beweise annehmen, daß  $\mathfrak{B}$  ein Bizylinder mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt ist.  $B^{(n)}(z_1, z_2)$  sei die Folge der biharmonischen Funktionen,  $B(z_1, z_2)$  ihre Grenzfunktion,  $K^{(n)}(z_1, z_2)$  die zu  $B^{(n)}(z_1, z_2)$  konjugierte. Aus der Entwicklung von  $B^{(n)}(z_1, z_2)$  in  $\mathfrak{B}$ :

$$B^{(n)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = \sum_{k,l} [a_{kl}^{(n)} r_1^k r_2^l \cos(k\varphi_1 + l\varphi_2) + c_{kl}^{(n)} r_1^k r_2^l \sin(k\varphi_1 + l\varphi_2)]$$

<sup>14)</sup> Vgl. dazu Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II. Bd. (Leipzig und Berlin, 1924), S. 19, ferner F. Severi, „Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse“, Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano 5 (1931), S. 1–59.

folgt man leicht, daß  $\int B^{(n)^2} d\omega = \int K^{(n)^2} d\omega$  gilt, woraus man dann weiter erschließt, daß  $g_n(z_1, z_2) = B^{(n)} + iK^{(n)}$  in  $\mathfrak{B}'$  gegen  $g(z_1, z_2) = B + iK$  gleichmäßig konvergiert, und  $B$  somit in  $\mathfrak{B}'$  biharmonisch ist.

Es sei nun  $n(z_1, z_2)$  eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre F. v. 2 k. V. mit endlichem

$$J(n) \equiv \int_{\mathfrak{B}} [\log |n(z_1, z_2)|]^2 d\omega.$$

Wir bilden die dem  $\log |n(z_1, z_2)|$  entsprechende orthogonale Funktion

$$(2, 20) \quad \log |n(z_1, z_2)| - \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z_1, z_2) \int_{\mathfrak{B}} B_k(z_1, z_2) \log |n(z_1, z_2)| d\omega.$$

Da  $J(n)$  endlich ist, ist

$$B(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z_1, z_2) \int_{\mathfrak{B}} B_k(z_1, z_2) \log |n(z_1, z_2)| d\omega$$

eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre biharmonische Funktion. Bezeichnet man dann mit  $K(z_1, z_2)$  die zu ihr konjugierte, so erhält man in

$$(2, 21) \quad v(z_1, z_2) = \frac{n(z_1, z_2)}{e^{B(z_1, z_2) + iK(z_1, z_2)}} \text{ bzw. } \pi(z_1, z_2) = \frac{p(z_1, z_2)}{e^{B^*(z_1, z_2) + K^*(z_1, z_2)}}$$

eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre F. v. 2 k. V. Wir werden solche Funktionen, die nach der soeben angegebenen Vorschrift aus Funktionen  $n(z_1, z_2)$  mit endlichem  $J(n)$  entstanden sind, und bei denen der Logarithmus des Betrages somit orthogonal ist, *normierte Funktionen* nennen und in diesem Paragraphen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen.

**Satz.** Ist  $f(z_1, z_2)$  eine in  $\mathfrak{B}$  meromorphe Funktion mit  $J(f) = F < \infty$ , deren sämtliche (normierte) Null- bzw. Polfunktionen in  $\mathfrak{B}$  durch die Funktionen  $v_k(z_1, z_2)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) bzw.  $\pi_k(z_1, z_2)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) gegeben sind, so gilt für  $f(z_1, z_2)$  in  $\mathfrak{B}$  die Abschätzung

$$(2, 22) \quad \left| \frac{1}{H(z_1, z_2)} \right|^{\sqrt{F-S}} \left| \frac{\prod_{k=1}^{k=l} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} \pi_k(z_1, z_2)} \right| \leq |f(z_1, z_2)|$$

$$\leq [H(z_1, z_2)]^{\sqrt{F-S}} \left| \frac{\prod_{k=1}^{k=l} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} \pi_k(z_1, z_2)} \right|,$$

wo  $H(z_1, z_2) = e^{\sqrt{\chi(z_1, z_2)}}$  eine nur von  $\mathfrak{B}$  abhängige Funktion, und

$$S = J \left[ \frac{\prod_{k=1}^{k=l} \pi_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} v_k(z_1, z_2)} \right]$$

ist.

Beweis. Es sei

$$(2, 23) \quad t(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2) \prod_{k=1}^{k=l} \pi_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=r} v_k(z_1, z_2)}.$$

$\log |t(z_1, z_2)|$  ist eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre biharmonische Funktion; man kann sie also nach (2, 10) in der Form

$$(2, 24) \quad \log |t(z_1, z_2)| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k(z_1, z_2), \quad a_k = \int_{\mathfrak{B}} B_k(z_1, z_2) \cdot \log |t(z_1, z_2)| d\omega$$

darstellen. Die Anwendung des Hilfssatzes I ergibt

$$(2, 25) \quad |\log |t(z_1, z_2)|| \leq \sqrt{\chi(z_1, z_2) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}.$$

Wir brauchen somit nur noch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  abzuschätzen. Dies kann unter Benutzung der Orthogonalität der Funktionen  $\log |\pi_k|$  und  $\log |v_k|$  leicht geschehen. Es ist nämlich

$$\log |t(z_1, z_2)| - \sum_{k=1}^{k=l} \log |\pi_k(z_1, z_2)| + \sum_{k=1}^{k=r} \log |v_k(z_1, z_2)| = \log |f(z_1, z_2)|.$$

Da  $\log |t(z_1, z_2)|$  eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre biharmonische Funktion ist, und  $\log |v_k(z_1, z_2)|$  bzw.  $\log |\pi_k(z_1, z_2)|$  in bezug auf die Gesamtheit dieser Funktionen orthogonal sind, so folgt weiter

$$(2, 26) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \int_{\mathfrak{B}} \left( \sum_{k=1}^{k=l} \log |\pi_k(z_1, z_2)| - \sum_{k=1}^{k=r} \log |v_k(z_1, z_2)| \right)^2 d\omega = F,$$

und daraus nach (2, 25):

$$(2, 27) \quad |\log |t(z_1, z_2)|| \leq \sqrt{F - S} \sqrt{\chi(z_1, z_2)}.$$

Aus (2, 27) ergibt sich nunmehr (2, 22), w. z. b. w.

Wir wollen nun noch zeigen, daß die in (2, 22) auf der linken und rechten Seite angegebenen Ausdrücke das Minimum und Maximum aller meromorphen Funktionen  $f(z_1, z_2)$  mit festen  $J(f) = F$  und den angegebenen Pol- und Nullfunktionen darstellen.

Es sei  $t_1, t_2$  ein Punkt von  $\mathfrak{B}$ . Ferner sei  $V(z_1, z_2; t_1, t_2)$  die zu der Minimalfunktion  $W(z_1, z_2; t_1, t_2)$  (vgl. (2, 11)) konjugierte Funktion und

$$m(z_1, z_2; t_1, t_2) = W(z_1, z_2; t_1, t_2) + i V(z_1, z_2; t_1, t_2).$$

Die Funktionen

$$(2, 28) \quad f_1 = \exp. [\pm \sqrt{F-S} \cdot m(z_1, z_2; t_1, t_2)] \cdot \frac{\prod_{k=1}^{k=r} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=i} \pi_k(z_1, z_2)}, \quad \exp. [A] \equiv e^A$$

besitzen die vorgegebenen normierten Null- und Polfunktionen, sind sonst in  $\mathfrak{B}$  regulär und überall von Null verschieden. Es gilt ferner nach (2, 12)

$$(2, 29) \quad J(f_1) = (F-S) \int_{\mathfrak{B}} [W(z_1, z_2; t_1, t_2)]^2 d\omega + J \left( \frac{\prod_{k=1}^{k=r} v_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=i} \pi_k(z_1, z_2)} \right) = F.$$

Andererseits ist ebenfalls nach (2, 12) im Punkte  $t_1, t_2$

$$(2, 30) \quad |f_1(t_1, t_2)| = \exp. [\pm \sqrt{F-S} \sqrt{\chi(t_1, t_2)}] \cdot \left| \frac{\prod_{k=1}^{k=r} v_k(t_1, t_2)}{\prod_{k=1}^{k=i} \pi_k(t_1, t_2)} \right|,$$

d. h.  $|f_1(z_1, z_2)|$  nimmt in  $t_1, t_2$  den auf der rechten,  $|f_2(z_1, z_2)|$  den auf der linken Seite von (2, 22) stehenden Wert an.

### § 3.

#### Abschätzung der meromorphen Funktionen in Bereichen mit Bestimmungsfläche.

Wir knüpfen an die im § 1 gegebene Definition der Bereiche mit Bestimmungsfläche an. Der Einheitsbizzylinder  $\mathfrak{E}: |z_1| < 1, |z_2| < 1$  ist ein Bereich dieser Art. Seine Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}$  ist durch  $|z_1| = 1, |z_2| = 1$  gegeben. Die Nebenbedingung  $N$  (vgl. 2, S. 327), der eine reelle auf  $\mathfrak{G}$  gegebene Funktion  $u$  genügt und genügen muß, falls sie mit den Randwerten einer in  $\mathfrak{E}$  regulären, in  $\mathfrak{E} + \epsilon$  stetigen biharmonischen Funktion übereinstimmt, lautet in diesem Falle:

$$(3, 1) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi_1, \varphi_2) \cos(m\varphi_1 - n\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi_1, \varphi_2) \sin(m\varphi_1 - n\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix},$$

wenn  $\varphi_k = \arg \bar{z}_k$  gesetzt wird.

Wie im § 1 erwähnt wurde, existiert neben dem Bizzylinder  $\mathfrak{E}$  eine größere Klasse von Bereichen mit einer Bestimmungsfläche (Bereiche  $\mathfrak{A}$ ), die in der Arbeit A näher studiert wurden. Es soll nunmehr eine präzise



Definition dieser Bereiche gegeben werden und es sollen einige Ergebnisse der Arbeit A, die wir im folgenden benötigen, zusammengestellt werden.

Es sei die Fläche

$$[31]^{15)} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}(\bar{z}_2)$$

gegeben, so daß  $\mathfrak{b}(\bar{z}_2)$  für jedes  $\bar{z}_2$  die Berandung eines zweidimensionalen Bereiches  $\mathfrak{B}(\bar{z}_2)$  in der  $z_1$ -Ebene bildet, während  $\bar{z}_2$  die Berandung  $\mathfrak{f}^{16)}$  des Einheitskreises  $\mathfrak{K}$  durchläuft. Wir setzen

$$z_1 = R e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = S e^{i\varphi_2}, \quad \bar{z}_2 = e^{i\varphi_2}$$

und machen über die Bereiche  $\mathfrak{B}(e^{i\varphi_2})$  folgende Voraussetzungen:

1.  $\mathfrak{B}(e^{i\varphi_2})$  ist für jedes  $\varphi_2$  ein Sternbereich, dessen Berandung durch die Gleichung

$$R = P(\varphi_1; e^{i\varphi_2})$$

gegeben ist.

2. Es ist

$$[32] \quad 0 < \varrho \leq P(\varphi_1; e^{i\varphi_2}) \leq 1,$$

wo  $\varrho$  eine (von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  unabhängige) Konstante ist; d. h. die sämtlichen Bereiche  $\mathfrak{B}(\bar{z}_2)$  enthalten einen festen Kreis um den Koordinatenanfangspunkt vom Radius  $\varrho$ .

3. Die Funktion  $P$  von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  erfüllt die Lipschitzbedingung:

$$[33] \quad |P(\varphi'_1, e^{i\varphi'_2}) - P(\varphi_1, e^{i\varphi_2})| \leq K |\varphi'_1 - \varphi_1| + L |\varphi'_2 - \varphi_2|$$

( $K$  und  $L$  sind absolute Konstanten).

Es gilt dann der

Satz. Zu jeder Fläche  $\mathfrak{F}$  mit den oben angegebenen Eigenschaften gehört ein vierdimensionaler Bereich

$$[34] \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{M}(\bar{z}_2),$$

<sup>15)</sup> Die Formeln der Arbeit A werden durch eckige Klammern gekennzeichnet.

<sup>16)</sup> Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, daß wir die Kurve  $\mathfrak{f}$  als Kreisperipherie voraussetzen, da der allgemeine Fall vermittels Abbildung durch eine Funktion einer komplexen Veränderlichen auf den speziellen zurückgeführt werden kann.

Die Produktoperation hat die Bedeutung, daß zu jedem Punkt  $\bar{z}_2$  von  $\mathfrak{f}$  die Kurve  $\mathfrak{b}(\bar{z}_2)$  in die Ebene  $z_1 = \bar{z}_2$  (unter Erhaltung der  $z_1$ -Koordinaten) verlegt wird, und die Vereinigungsmenge der so verlegten  $\mathfrak{b}(\bar{z}_2)$  für sämtliche  $\bar{z}_2$  (aus  $\mathfrak{f}$ ) gebildet wird. Eine analoge Bedeutung hat die Produktoperation bei den weiteren Formeln dieser Art.

In der von Hausdorff, Mengenlehre (Berlin 1927) benutzten Bezeichnungsweise, die wir aus drucktechnischen Gründen nicht verwenden, schreibt sich  $\mathfrak{F} = \sum_{\bar{z}_2}^{\mathfrak{f}} \mathfrak{b}(\bar{z}_2)$ .

Wegen der Veranschaulichung der Flächen  $\mathfrak{F}$  und der Gebiete  $\mathfrak{M}$  vgl. die in der Fußnote <sup>5)</sup> zitierte Arbeit V.

wo  $\mathfrak{A}(z_2)$  für jedes  $z_2$  aus  $\mathfrak{R}$  in der  $z_1$ -Ebene liegt und die Berandungskurve  $\alpha(z_2)$  besitzt, so daß:

$$\text{I.} \quad \lim_{S \rightarrow 1} \alpha(S e^{i\varphi_2}) = b(e^{i\varphi_2})$$

ist,

II.  $\alpha(z_2)$  stetig von  $z_2$  abhängt,

III. die zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}$  die Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{A}$  ist; d. h. zu der auf  $\mathfrak{F}$  vorgeschriebenen stetigen Funktion  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , die dort den Bedingungen  $N$  genügt, gibt es eine und nur eine in  $\mathfrak{A}$  biharmonische Funktion  $U(z_1, z_2)$ , die auf  $\mathfrak{F}$  die vorgeschriebenen Werte annimmt.

Der angegebene Satz gibt die Möglichkeit, eine Reihe von Bereichen mit einer Bestimmungsfläche zu erzeugen. Es entsteht natürlich die Frage, wann sich zwei solche Bereiche  $\mathfrak{A}$  aufeinander abbilden lassen und wann ein (allgemeiner) Bereich  $\mathfrak{A}$  sich auf einen Bereich, dessen Bestimmungsfläche durch  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 1$  gegeben ist, abbilden läßt. Auf diese Fragen soll an einer anderen Stelle näher eingegangen werden.

Bezugnehmend auf das im § 1 Gesagte beginnen wir damit, in den Bereichen  $\mathfrak{A}$  eine funktionale Operation ( $\mathbf{P}$ -Operation) zu definieren, die jeder auf  $\mathfrak{F}$  beschränkten und abteilungsweise stetigen Funktion  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  eine Funktion  $U(z_1, z_2) = \mathbf{P}[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}]$  zuordnet, von der wir zeigen werden, daß sie alle diejenigen Eigenschaften besitzt, die man bei der Verallgemeinerung des im § 1 zitierten Ostrowskischen Satzes benötigt.

Es sei der Bereich

$$(34) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{A}(z_2)$$

von der angegebenen Art mit der Berandung

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \mathfrak{F} = \mathfrak{I} \times \mathfrak{B}(\bar{z}_2) + \mathfrak{R} \times \alpha(z_2) + \mathfrak{F}$$

und der Bestimmungsfläche

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{I} \times b(\bar{z}_2)$$

gegeben<sup>17)</sup>.

Die Operation  $\mathbf{P}$  soll nun die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. Sie ist linear, d. h. es gilt

$$(3, 2) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2) + u_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}] = \\ = \mathbf{P}[z_1, z_2; u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}] + \mathbf{P}[z_1, z_2; u_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}].$$

2. Sie ist positiv definit, d. h.

a) aus

$$(3, 3) \quad u(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \geq 0 \text{ auf } \mathfrak{F}$$

folgt:

$$(3, 4) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{A}] \geq 0.$$

<sup>17)</sup> Wir werden im folgenden mit  $z_1, \bar{z}_2$  die Punkte von  $\mathfrak{A}$  bezeichnen, mit  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  die Punkte von  $\mathfrak{F}$ .

b) bezeichnet man mit  $\mathfrak{I}(\varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})$  einen Teilbereich von  $\mathfrak{F}$ , der alle Punkte

$$\bar{z}_1 = P(\varphi_1, e^{i\varphi_2}) e^{i\varphi_1}, \quad \bar{z}_2 = e^{i\varphi_2}, \\ \varphi_x^{(1)} \leq \varphi_x \leq \varphi_x^{(2)}, \quad \varphi_x^{(1)} < \varphi_x^{(2)}, \quad x = 1, 2$$

enthält, so soll aus

$$(3, 5) \quad u(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \geq \delta > 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{I}(\varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})$$

in Verbindung mit (3, 3)

$$(3, 6) \quad P[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{U}] > 0$$

folgen.

3. Befriedigt  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  die Nebenbedingung  $N^{18}$ , so ist

$$P[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{U}]$$

diejenige in  $\mathfrak{U}$  reguläre biharmonische Funktion, die bei der Annäherung an  $\mathfrak{F}$  gegen die Werte  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  konvergiert. (Da jede Konstante die Bedingung  $N$  befriedigt, folgt aus 3.:

$$(3, 7) \quad P[z_1, z_2; c; \mathfrak{U}] = c.)$$

Wie wir im folgenden zeigen werden, lassen sich unter Heranziehung einer Operation, die die Forderungen 1., 2., 3. erfüllt, einige Analoga der Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas beweisen. Wir müssen zunächst den Existenznachweis führen, daß man zu einem Bereich  $\mathfrak{U}$  stets eine solche Operation  $P$  angeben kann. Hierbei gehen wir schrittweise vor. Wir definieren  $P$  zunächst in dem einfachsten Falle, nämlich dem eines Bizylinders  $\mathfrak{E}$  bzw. Produktbereiches  $(P_1)$ , verallgemeinern dann auf den Fall eines Bereiches  $\mathfrak{E}'$ , der aus  $\mathfrak{E}$  durch eine in  $\mathfrak{E}$  analytische, in  $\mathfrak{E} + \epsilon$  eindeutige und stetige Abbildung von der Form  $z'_1 = z_1 T(z_2)$ ,  $z'_2 = z_2$  entstanden ist  $(P_2)$ , und führen schließlich mit Hilfe von  $P_2$  die Operation  $P_3$  für einen allgemeinen Bereich  $\mathfrak{U}$  ein<sup>19</sup>).

Wie bereits erwähnt wurde, wird die Funktionenfunktion  $P$  für beschränkte und abteilungsweise stetige Funktionen  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  erklärt. Dabei sollen als Unstetigkeitsstellen nur Kurven auftreten, die auf  $\mathfrak{F}$  liegen und die Eigenschaft haben, daß sie höchstens für endlich viele  $\varphi_s$ , etwa  $\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \dots, \varphi_s^{(m)}$ , je einen Bogen  $b_1(e^{i\varphi_s^{(s)}})$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , mit  $b(e^{i\varphi_s^{(s)}})$  gemeinsam besitzen, dagegen für alle anderen  $\varphi_s$  höchstens endlich viele, etwa höchstens  $l (< \infty)$  isolierte Punkte mit  $b(e^{i\varphi_s})$  gemein haben. Solche Kurven werden im folgenden mit  $f_k$  bezeichnet.

Für unsere weiteren Zwecke genügt es zu zeigen, daß die eingeführte  $P$ -Operation die drei angegebenen Eigenschaften in dem Falle besitzt,

<sup>18</sup> D. h. falls  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  auf  $\mathfrak{F}$  stetig ist, und eine in  $\mathfrak{U}$  reguläre biharmonische Funktion  $u(z_1, z_2)$  existiert, die auf  $\mathfrak{F}$  die vorgegebenen Werte  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  annimmt.

<sup>19</sup> Ist  $\mathfrak{U}$  der Bereich  $\mathfrak{E}$  bzw. ein Bereich  $\mathfrak{E}'$ , der zugleich ein  $\mathfrak{U}$ -Bereich ist, so ist  $P_3$  mit  $P_1$  bzw.  $P_2$  identisch.

wenn  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  stetig ist, während in dem allgemeinen Falle, wo  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  beschränkt und abteilungsweise stetig ist, nur das Erfülltsein von 1. und von 2. bewiesen zu werden braucht.

**P<sub>1</sub>.** Als **P<sub>1</sub>** definieren wir diejenige Operation, die zu der auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  vorgegebenen Funktion diejenige *doppelharmonische* Funktion ergibt, die bei der Annäherung an  $\tilde{\mathfrak{F}}$  gegen die vorgegebenen Werte konvergiert.

Führt man vermittle  $z_x = r_x e^{i\varphi_x}$ ,  $x = 1, 2$ , Polarkoordinaten ein, so wird **P<sub>1</sub>** (die **P**-Operation für  $\mathfrak{E}$ ) somit durch das Poissonsche Integral (1, 3) [vgl. S. 328] gegeben.

Für einen Produktbereich  $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$  ist **P<sub>1</sub>** entsprechend durch

$$(3, 8) \quad \mathbf{P}_1[z_1, z_2; u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{P}] = \int_{\mathfrak{C}_1} \int_{\mathfrak{C}_2} u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) dH_1 dH_2$$

gegeben, wo  $H_x$  ( $x = 1, 2$ ) die zur Greenschen Funktion von  $\mathfrak{C}_x$  konjugierte Potentialfunktion bedeutet.

**P<sub>1</sub>.** Ist  $\mathfrak{E}'$  ein Bereich, der durch eine in  $\mathfrak{E} + \epsilon$  eindeutige und stetige, in  $\mathfrak{E}$  analytische Transformation

$$(3, 9) \quad z'_1 = z_1 T(z_2) \quad z'_2 = z_2$$

aus  $\mathfrak{E}$  entstanden ist, so wird **P<sub>2</sub>** in  $\mathfrak{E}'$  folgendermaßen definiert:

Bezeichnet  $u'(\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2)$  die auf  $\tilde{\mathfrak{F}}'$  (dem Bilde von  $\tilde{\mathfrak{F}}$ ) vorgegebene Funktion, so ordne man jedem Punkte  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$  von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  denjenigen Wert  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = u'[\tilde{z}'_1(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2), \tilde{z}'_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)]$  zu, den  $u'$  in dem entsprechenden Punkt von  $\tilde{\mathfrak{F}}'$  annimmt. Mit der so auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  definierten Funktion bilde man vermittle (3, 8) die Funktion  $\mathbf{P}_1[z_1, z_2; u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{E}]$  in  $\mathfrak{E}$ , die vermöge (3, 9) zurück nach  $\mathfrak{E}'$  verpflanzt wird. Eine derartige Erzeugung einer neuen Funktion aus  $u'(\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2)$  soll als **P<sub>2</sub>**-Operation bezeichnet werden. Es gilt also:

$$(3, 10) \quad \mathbf{P}_2[z'_1, z'_2; u'(\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2); \mathfrak{E}'] = \mathbf{P}_1[z_1, z_2; u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{E}].$$

Daß **P<sub>1</sub>** die Eigenschaften 1., 2.<sup>20)</sup> und im Falle, wenn  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  stetig ist, 3. hat, ist klar, und ebenso, daß 1. und 2. durch **P<sub>2</sub>** erfüllt werden<sup>21)</sup>.

<sup>20)</sup> Insbesondere folgt das Erfülltsein von 2 b) im Falle des Bizzylinders daraus, daß der in (1, 3) auftretende Ausdruck  $P(r, t)$  für  $r < 1$  stets positiv ist: bei der Operation **P<sub>2</sub>** folgt außerdem aus der Stetigkeit und Eineindeutigkeit der Abbildung in  $\mathfrak{E}' + \epsilon'$ , daß dem Teilbereich  $\mathfrak{T}'(\varphi_x^{(1)'}, \varphi_x^{(2)'})$  von  $\tilde{\mathfrak{F}}'$  wieder ein Teilbereich  $\mathfrak{T}(\varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})$  derselben Art von  $\tilde{\mathfrak{F}}$  entspricht.

<sup>21)</sup> Es läßt sich leicht zeigen, daß die dort unter *N* mitaufgeführte Einschränkung der Stetigkeit des vorgegebenen  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$ , auf die Forderung „beschränkt und abteilungsweise stetig“ abgeschwächt werden kann. Vgl. dazu auch H. Geiringer, „Trigonometrische Doppelreihen“, Monatshefte f. Math. u. Phys. 29 (1918), S. 65–144, insbes. IV. Teil, § 53–55.

Auch lassen sich die hier weiter durchgeführten Betrachtungen auf den Fall von auf  $\tilde{\mathfrak{F}}$  beschränkten und abteilungsweise stetigen Funktionen  $f(z_1, z_2)$  verallgemeinern. Wir verzichten aber auf näheres Eingehen auf diese Fragen, da (wie bereits erwähnt) dieser Fall für unsere Zwecke ohne Interesse ist.

Beweis der Eigenschaft 3. im Falle von  $\mathbf{P}_2$ . Befriedigt nun  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  auf  $\mathfrak{F}$  die Nebenbedingung  $N$ , so folgt daraus, wie in der Arbeit A gezeigt wurde (S. 613–616), daß die transformierte Funktion

$$u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = u'[\tilde{z}'_1(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2), \tilde{z}'_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)]$$

auf  $\mathfrak{F}$  ebenfalls die Nebenbedingung  $N$  erfüllt. Wie in der genannten Arbeit gezeigt wurde, liefert dann  $\mathbf{P}_1$  in  $\mathfrak{E}$  diejenige biharmonische Funktion, die auf  $\mathfrak{F}$  die Werte  $u(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  annimmt. Da aber durch eine analytische Transformation eine biharmonische Funktion wieder in eine biharmonische Funktion übergeht, so wird (3, 10) somit diejenige biharmonische Funktion liefern, die auf  $\mathfrak{F}'$  die vorgegebenen Werte  $u'(\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2)$  annimmt, womit gezeigt ist, daß  $\mathbf{P}_2$  die Eigenschaft 3. besitzt.

$\mathbf{P}_3$ . Um die Operation  $\mathbf{P}_3$  allgemein in  $\mathfrak{A}$  zu definieren, benutzen wir das folgende Ergebnis der Arbeit A:

Der Index  $k$  soll die Werte

$$(3, 11) \quad 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2^n}, \frac{3\pi}{2^n}, \frac{5\pi}{2^n}, \dots, \frac{(2^n - 1)\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^{n+1}}, \dots$$

in der in (3, 11) angegebenen Reihenfolge durchlaufen.

Der Bereich  $\mathfrak{A}$  läßt sich dann als die Vereinigungsmenge

$$[45]^{15)} \quad \mathfrak{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{E}'_k$$

darstellen, wobei  $\mathfrak{E}'_k$  der vermöge der Transformation

$$[38] \quad z'_1 = z_1 T(z_2; k), \quad z'_2 = z_2$$

aus  $\mathfrak{E}$  entstandene Bereich ist<sup>22)</sup>. Jeder der Bereiche  $\mathfrak{E}'_k$  hat die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}_k$

$$[40] \quad \mathfrak{G}_k = \mathfrak{I} \times \mathfrak{D}_k(\tilde{z}_2),$$

wobei

$$(3, 12) \quad \mathfrak{D}_k(e^{ik}) = \mathfrak{D}_k(e^{ik})$$

ist, und für  $s = \arg \tilde{z}_2 \neq k$

$$(3, 13) \quad \mathfrak{D}_k(\tilde{z}_2) \subset \mathfrak{B}(\tilde{z}_2)$$

gilt.

Bei der Darstellung [45] wird jeder Punkt  $z_1, z_2$  von  $\mathfrak{A}$  von unendlich vielen  $\mathfrak{E}'_k$  überdeckt. Definieren wir:

$$(3, 14) \quad \mathfrak{Q}_k = \mathfrak{E}'_k - \sum_{m=1}^{m=k-1} \mathfrak{E}'_m,$$

<sup>22)</sup>  $T(z_2; k)$  ist dabei diejenige in  $\mathfrak{R}$  reguläre Funktion, die  $\mathfrak{R}$  auf ein Dreieck  $ABC$  abbildet, wobei der Punkt  $e^{ik}$  in den Punkt  $A$  (mit den Koordinaten  $(1, 0)$ ) übergeht. (Vgl. dazu § 2 der Arbeit A.)

so gilt

$$(3, 15) \quad \mathfrak{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{Q}_k,$$

wobei jetzt jeder Punkt nur von einem einzigen  $\mathfrak{Q}_k$  überdeckt wird.

Jeder der Bereiche  $\mathfrak{Q}_k$  ist ein Teilbereich von  $\mathfrak{E}'_k$  und besitzt die (mit  $\mathfrak{E}'_k$  gemeinsame) Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}_k$ .

Aus der Tatsache, daß  $T(z_1; k)$  [gleichmäßig in  $k$ ] in  $\mathfrak{R} + \mathfrak{I}$  stetig ist, folgt, daß die Abbildung [38] eine in  $\mathfrak{E} + \mathfrak{e}$  stetige und eindeutige Abbildung vermittelt.

Um  $\mathbf{P}_3$  zu definieren, müssen wir noch eine Betrachtung einschalten: ist  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  auf  $\mathfrak{F}$  gegeben, so bilden wir für jedes feste  $z_2 = \bar{z}_2$  diejenige in  $\mathfrak{B}(\bar{z}_2)$  regulär harmonische Funktion  $U(Z_1, \bar{z}_2)$ , die auf  $b(\bar{z}_2)$  die Werte  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  annimmt, d. h. für die in jedem Punkte von  $\mathfrak{F}$

$$\lim_{z_1 \rightarrow \bar{z}_1} U(Z_1, \bar{z}_2) = u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

gilt. Bildet man für jedes  $\bar{z}_2 = e^{i\varphi_2}$ ,  $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ , die entsprechende harmonische Funktion, so wird auf diese Weise in  $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{I} \times \mathfrak{B}(\bar{z}_2)$  eine Funktion  $U(Z_1, \bar{z}_2)^{17)}$  definiert. Nun liegt nach dem früher Gesagten die Bestimmungsfläche

$$(3, 16) \quad \mathfrak{G}_k = \mathfrak{I} \times b_k(\bar{z}_2)$$

für jedes  $\mathfrak{E}'_k$  (also auch jedes  $\mathfrak{Q}_k \subset \mathfrak{E}'_k$ ) in  $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{F}$ . Sei  $z_1, z_2$  ein Punkt von  $\mathfrak{U}$ , der zugleich ein Punkt von etwa  $\mathfrak{Q}_k$  ist, so definieren wir  $\mathbf{P}_3$  durch

$$(3, 17) \quad \mathbf{P}_3[z_1, z_2; u(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{U}] \doteq \mathbf{P}_3[z_1, z_2; U(Z_1, \bar{z}_2); \mathfrak{Q}_k].$$

Die durch (3, 17) definierte Operation befriedigt offenbar 1. und ebenso 2. a).

Wir zeigen nunmehr, daß  $\mathbf{P}_3$  2. b) erfüllt. Es genügt dabei, den Beweis für den Fall, daß  $u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  stetig ist, durchzuführen. Ist dies von vornherein nicht der Fall, so ziehen wir eine stetige auf  $\mathfrak{F}$  definierte Funktion  $u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  heran, für die auf  $\mathfrak{F}$ :

$$0 \leq u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq u(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

gilt, und die in einem Teilbereich  $\mathfrak{I}(q_x^{(n)}, q_x^{(1)})$  von  $\mathfrak{F}$  gleich oder größer als eine feste positive Konstante ist. Nach 1. und 2. a) genügt es, (3, 6) für die Funktion  $u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  zu beweisen. Sei also  $u_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  stetig und es sei  $t_1, t_2$  ein Punkt von  $\mathfrak{U}$ ; es existiert dann ein  $k$ , so daß  $t_1, t_2 \subset \mathfrak{Q}_k$  ist. Nach (3, 17) und den Erörterungen über die Bereiche  $\mathfrak{E}'_k$  brauchen wir nur

zu zeigen, daß auf der Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}_k$  von  $\mathfrak{G}_k'$  ein Teilbereich  $\mathfrak{G}(\varphi_x^{(5)}, \varphi_x^{(6)})$  existiert, auf dem

$$(3, 18) \quad U_1(\mathbf{Z}_1, \tilde{z}_2) \geq \delta > 0$$

gilt. Nach (3, 13) existiert ein (abgeschlossenes) Intervall

$$|: \quad \varphi_3^{(5)} \leq \varphi_3 \leq \varphi_3^{(6)}, \quad \varphi_3^{(2)} < \varphi_3^{(5)} < \varphi_3^{(6)} < \varphi_3^{(4)},$$

so daß für jedes  $\varphi_3$  ( $\varphi_3 \in |$ ) gilt:  $\mathfrak{b}_k(e^{i\varphi_3}) \subset \mathfrak{B}(e^{i\varphi_3})$ . In jedem Punkte von  $\mathfrak{B}(e^{i\varphi_3})$ ,  $\varphi_3 \in |$ , ist die harmonische Funktion  $U_1(\mathbf{Z}_1, e^{i\varphi_3})$  positiv, außerdem nach den Ausführungen der Arbeit A, S. 631, ist in dem ganzen Gebiete

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{F} = [\mathfrak{I} \times \mathfrak{B}(\tilde{z}_2)] + \mathfrak{F},$$

$$U_1(\mathbf{Z}_1, \tilde{z}_2) \quad [\tilde{z}_2 = e^{i\varphi_2}] \text{ stetig.}$$

Da  $\mathfrak{I} \times \mathfrak{b}_k(e^{i\varphi_2})$  ein abgeschlossenes (zweidimensionales) Flächenstück bildet, die Funktion  $U_1(\mathbf{Z}_1, \tilde{z}_2)$  in ihm stetig und positiv ist, gilt in  $\mathfrak{I} \times \mathfrak{b}_k(e^{i\varphi_2})$  die Ungleichung (3, 18), womit unsere Behauptung bewiesen ist<sup>23)</sup>.

Damit ist der Existenzbeweis von  $\mathbf{P}$  in dem erforderlichen Umfang erbracht. Bevor wir jedoch zu der angekündigten Anwendung übergehen, schalten wir noch eine Bemerkung ein.

Mit  $l(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  bezeichnen wir eine in  $\mathfrak{F}$  beschränkte, in  $\mathfrak{F} - \mathfrak{f}_k$  stetige Funktion. (Wegen  $\mathfrak{f}_k$  vgl. S. 339.)  $\mathbf{P}[z_1, z_2; l(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{U}]$  ist nach den früheren Ausführungen in  $\mathfrak{U}$  erklärt und besitzt die Eigenschaften 1. und 2. Es gilt überdies der

Hilfssatz 3. Sei  $v^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ , eine Folge von in  $\mathfrak{F}$  stetigen und (gleichmäßig) beschränkten Funktionen, die gegen die in  $\mathfrak{F}$  beschränkte, in  $\mathfrak{F} - \mathfrak{f}_k$  stetige Funktion  $l(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  konvergieren, wobei  $\mathfrak{f}_k$  eine Mannigfaltigkeit der angegebenen Art ist. Dann gilt

$$(3, 19) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{P}[z_1, z_2; v^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{U}] = \mathbf{P}[z_1, z_2; l(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{U}].$$

Beweis. Im Falle des Bizylinders gilt bekanntlich

$$(3, 20) \quad |\mathbf{P}[z_1, z_2; l(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{G}] - \mathbf{P}[z_1, z_2; v^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{G}]| \\ \leq \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} \frac{1 + |z_2|}{1 - |z_2|} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |l - v^{(p)}| d\varphi_1 d\varphi_2.$$

<sup>23)</sup> Die Operation  $\mathbf{P}$  hängt natürlich noch von der Zerlegung (3, 15) ab und ergibt eine in  $\mathfrak{U}$  eventuell nicht stetige Funktion; es wäre leicht, beide Mängel durch geeignete Grenzübergänge zu beheben, etwa dadurch, daß man als Operatorfunktion  $\mathbf{P}$  in jedem Punkte das Maximum oder Minimum unter allen dort durch die Operationen unserer obigen Definition gelieferten Werte erklärt, doch erfordern unsere weiteren Schlüsse weder die Eindeutigkeit noch die Stetigkeit von  $\mathbf{P}$ .



Aus der vorausgesetzten Konvergenz folgt:

$$(3, 21) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |l - v^{(p)}| d\varphi_1 d\varphi_2 = 0,$$

woraus man nach (3, 20) die Limesrelation (3, 19) erschließt.

Im Falle von  $\mathbf{P}_2$  geht bei der zu (3, 9) reziproken Transformation eine Mannigfaltigkeit  $f_k$  wieder in eine Mannigfaltigkeit  $f_k$  derselben Art über, und der Beweis von (3, 19) wird somit auf den bereits erledigten Fall von  $\mathbf{P}_1$  zurückgeführt.

Fall von  $\mathbf{P}_3$ . Sei  $z_1, z_2$  ein Punkt von  $\Omega_k$ , dann existiert ein  $\mathfrak{G}'_k$ , dessen innerer Punkt  $z_1, z_2$  ist. Die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{G}_k$  von  $\mathfrak{G}'_k$  ist durch [40] gegeben. Nach den Sätzen der ebenen Potentialtheorie wird auf  $\mathfrak{G}_k = \mathfrak{I} \times \mathfrak{D}_k(e^{iq_2})$  für jedes  $\varphi_2$  mit Ausnahme von endlich vielen

$$\mathfrak{D}_k(\varphi_2^{(s)}), \text{ nämlich } \varphi_2 = \varphi_2^{(s)}, s = 1, 2, \dots, m,$$

die Funktion  $v^{(p)}(Z_1, e^{iq_2})$  gegen  $l(Z_1, e^{iq_2})$  konvergieren. Für die Ausnahmebögen  $\mathfrak{D}_k(e^{iq_2^{(s)}})$  ist sowohl  $v^{(p)}(Z_1, e^{iq_2})$  wie auch  $l(Z_1, e^{iq_2})$  beschränkt; nach den Erörterungen für den Fall  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  gilt somit für den (willkürlich gewählten) Punkt  $t_1, t_2$  die Relation (3, 19), w. z. b. w.

Wir gehen nunmehr zu der angekündigten Anwendung der  $\mathbf{P}$ -Operation über:

Die Bestimmungsfläche  $\mathfrak{F}$  zerfalle in  $m$  einfach zusammenhängende Teile  $\mathfrak{I}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ), von denen jeder von einer geschlossenen Kurve  $f_k$  der angegebenen Art berandet ist. Mit  $e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  bezeichnen wir die auf  $\mathfrak{F}$  definierte Funktion, die auf  $\mathfrak{I}_k$  den Wert eins hat, auf dem übrigen Teile von  $\mathfrak{F}$  dagegen verschwindet (mit anderen Worten, es gilt auf  $\mathfrak{I}_k$ :  $e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = 1$ , auf  $\mathfrak{F} - \mathfrak{I}_k$ :  $e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = 0$ ). Wir betrachten wieder die in  $\mathfrak{U} + \mathfrak{a}$  meromorphe Funktion  $f(z_1, z_2)$ , deren Pol- und Nullfunktionen die in  $\mathfrak{U} + \mathfrak{a}$  regulären Funktionen  $p_k(z_1, z_2)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, l$ ) bzw.  $n_k(z_1, z_2)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, r$ ) sind, für die auf  $\mathfrak{F}$

$$(3, 22) \quad \max_{\text{auf } \mathfrak{F}} |p_k(z_1, z_2)| = 1, \quad \min_{\text{auf } \mathfrak{F}} |n_k(z_1, z_2)| = 1$$

gilt.

Satz. Sei  $f(z_1, z_2)$  eine in  $\mathfrak{U} + \mathfrak{a}$  meromorphe, auf  $\mathfrak{F}$  stetige Funktion mit den angegebenen Pol- und Nullfunktionen, so daß also

$$(3, 23) \quad \frac{f(z_1, z_2) \prod_{k=1}^{k=r} p_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=l} n_k(z_1, z_2)}$$

in  $\mathfrak{U} + \mathfrak{a}$  regulär ist und nirgends verschwindet; gibt es  $m$  Konstanten  $M_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ), so daß

(3, 24) auf  $\mathfrak{X}_k$ :  $|f(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)| \leq M_k$   
 ausfällt, so gilt in  $\mathfrak{A}$  die Ungleichung:

$$(3, 25) \quad \log \frac{\prod_{k=1}^{k=r} p_k(z_1, z_2)}{\prod_{k=1}^{k=l} n_k(z_1, z_2)} \leq \log M_k \cdot \mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{A}].$$

Beweis. Wir bezeichnen (3, 23) mit  $t(z_1, z_2)$ .  $\log |t(z_1, z_2)|$  ist eine in  $\mathfrak{A}$  reguläre biharmonische, in  $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}$  stetige Funktion (deren Randwerte auf  $\mathfrak{F}$  daher die Bedingung  $N$  befriedigen).

Mit

$$v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2), \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

bezeichnen wir eine Folge von stetigen Funktionen, für die

$$(3, 26) \quad \text{auf } \mathfrak{X}_k: v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = 1, \quad \text{auf } \mathfrak{F}: 0 \leq v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \leq 1$$

gilt, wobei für die ganze Folge auf  $\mathfrak{F} - \mathfrak{f}_k$

$$(3, 27) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$$

ist.

Aus (3, 24) und (3, 22) folgt, daß auf  $\mathfrak{X}_k$

$$(3, 28) \quad \log |t(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)| \leq \log M_k + \sum_{k=1}^{k=r} \log |p_k(z_1, z_2)| \\ - \sum_{k=1}^{k=l} \log |n_k(z_1, z_2)| \leq \log M_k$$

ist. Die Funktion

$$\sum_{k=1}^{k=m} \log M_k \cdot v_k^{(p)}(z_1, z_2) - \log |t(z_1, z_2)|$$

ist somit überall auf  $\mathfrak{F}$  größer oder gleich 0. Nach 2. gilt somit

$$(3, 29) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; \left( \sum_{k=1}^{k=m} \log M_k \cdot v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) - \log |t(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)| \right); \mathfrak{A}] \geq 0.$$

Nach 1. schreiben wir weiter:

$$(3, 30) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; \log |t(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)|; \mathfrak{A}] \leq \mathbf{P}[z_1, z_2; \left( \sum_{k=1}^{k=m} \log M_k \cdot v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \right); \mathfrak{A}] \\ = \sum_{k=1}^{k=m} \log M_k \cdot \mathbf{P}[z_1, z_2; v_k^{(p)}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{A}],$$

und nach (3, 27) und Hilfssatz 3:

$$(3, 31) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; \log |t(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)|; \mathfrak{A}] \leq \sum_{k=1}^{k=m} \log M_k \cdot \mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2); \mathfrak{A}]$$

Da  $\log |t(\bar{z}_1, \bar{z}_2)|$  auf  $\mathfrak{F}$  die Bedingung  $N$  erfüllt, schließen wir weiter nach 3., daß

$$(3, 32) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; \log |t(z_1, z_2)|; \mathfrak{W}] = \log |t(z_1, z_2)|$$

ist, woraus in Verbindung mit (3, 31) die Ungleichung (3, 25) folgt<sup>24)</sup>.

<sup>24)</sup> Der durch [34], S. 337 gegebene Bereich  $\mathfrak{W}$  braucht natürlich im allgemeinen kein Existenzbereich zu sein. Ist dies der Fall, so existiert ein  $\mathfrak{W}$  als echten Teil enthaltender Bereich  $\mathfrak{H}$  (sogenannte Regularitätshülle von  $\mathfrak{W}$  oder auch zu  $\mathfrak{W}$  gehöriger Existenzbereich), so daß jede in  $\mathfrak{W}$  reguläre Funktion auch in  $\mathfrak{H}$  regulär ist. Da Funktionen  $g(z_2)$  existieren, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben, muß  $\mathfrak{H}$  in dem Bereich:  $|z_2| < 1$ ,  $z_1$  beliebig, liegen und  $\mathfrak{F}$  (das durch [31] gegeben ist) gehört also zum Rand von  $\mathfrak{H}$ . Da ferner in der Regularitätshülle  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{W}$  jede in  $\mathfrak{H}$  reguläre Funktion nur Werte aus  $\mathfrak{W}$  annehmen kann, und nach (2, 19) zu jeder regulären biharmonischen Funktion eine (im gleichen Gebiet reguläre) Konjugierte existiert, ist  $\mathfrak{F}$  ebenfalls eine Bestimmungsfläche von  $\mathfrak{H}$ .

Das hier durchgeführte Verfahren erlaubt die Funktionen  $\mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{W}]$  in  $(\mathfrak{H} - \mathfrak{W})$  zweckentsprechend so fortzusetzen, daß man zu einer in  $\mathfrak{H}$  gültigen Abschätzung von der Form (3, 25) für (3, 23) gelangt.

Diese Funktion, die wir im folgenden mit  $\mathbf{R}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{H}]$  bezeichnen werden (und die in  $\mathfrak{W}$  mit  $\mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{W}]$  übereinstimmt), kann z. B. folgendermaßen hergestellt werden:

Man kann zunächst leicht schließen, daß zu jedem  $\varepsilon_1 (> 0)$  ein genügend kleines  $\varepsilon_2 (> 0)$  existiert, so daß die aus  $\mathfrak{F}$  vermittels

$$\mathbf{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}: \quad z'_1 = (1 - \varepsilon_1) z_1, \quad z'_2 = (1 - \varepsilon_2) z_2$$

entstandene Fläche  $\mathfrak{F}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  in  $\mathfrak{W}$  liegt. Der Bereich  $\mathfrak{W}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ , der aus  $\mathfrak{W}$  vermittels  $\mathbf{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  entsteht, hat, wie man auf Grund der in der Arbeit A durchgeführten Betrachtungen einsieht,  $\mathfrak{F}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  zur Bestimmungsfläche und der vermittels  $\mathbf{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  aus  $\mathfrak{H}$  entstandene Bereich  $\mathfrak{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  ist die Regularitätshülle von  $\mathfrak{W}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ .

Nach [32] kann man nun ein  $a_1$  und ein zugehöriges  $a_2 \equiv a_2(a_1)$  so bestimmen, daß  $\mathfrak{H}_{a_1, a_2} \subset \mathfrak{W}$  gilt. Mit  $\mathfrak{h}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$  bezeichnen wir die Berandung von  $\mathfrak{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . Läßt man nun  $\varepsilon_1$  von  $a_1$  bis 0 stetig variieren und wählt man die zugehörigen  $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2(\varepsilon_1) > 0$  so, daß sie ebenfalls stetig von  $a_2$  bis 0 variieren, so gilt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{W} + \sum_{\varepsilon_1=a_1}^{\varepsilon_1=0} \mathfrak{h}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2(\varepsilon_1)}.$$

[In diesem Falle bedeutet  $\Sigma$  die Vereinigungsmenge einer einparametrischen Schar von Hyperflächen  $\mathfrak{h}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ .] Durch jeden Punkt von  $\mathfrak{H} - \mathfrak{W}$  geht also mindestens eine Hyperfläche  $\mathfrak{h}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . Die Funktion  $\mathbf{R}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{H}]$  kann nun dadurch gewonnen werden, daß man für den Punkt  $z_1^0, z_2^0 \in (\mathfrak{H} - \mathfrak{W})$ , der etwa in  $\mathfrak{h}_{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0}$  liegt,

$$\mathbf{R}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{H}] = \max_{z_1, z_2 \in \mathfrak{h}_{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0}} \mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(\bar{z}_1, \bar{z}_2); \mathfrak{W}]$$

festsetzt. Man beachte, daß infolge der Konvexität von  $\mathfrak{W}(\bar{z}_2) \equiv \mathfrak{B}(\bar{z}_2)$  man unter Benutzung der in der Arbeit A durchgeführten Betrachtungen zeigen kann, daß für jedes positive  $\varepsilon_1$ :  $\mathfrak{F}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2(\varepsilon_1)} \subset \mathfrak{W}$  gilt.

Bemerkung. Aus 2. b) folgt, daß in  $\mathfrak{U}$

$$(3, 33) \quad \mathbf{P}[z_1, z_2; e_k(z_1, z_2); \mathfrak{U}] > 0$$

ist.

Die Einführung der  $\mathbf{P}$ -Operation erlaubt in ähnlicher Weise, analoge Sätze (z. B. den Ostrowski-Nevanlinnaschen Satz)<sup>26)</sup> zu erschließen, worauf wir hier jedoch nicht eingehen wollen.

[Zusatz bei der Korrektur, September 1933.]

Dagegen soll eine andere Anwendung der  $\mathbf{P}$ -Operation gemacht werden, welche erlaubt, eine Abschätzung für eine in  $\mathfrak{U} + a$  reguläre Funktion zu gewinnen, über deren Verhalten auf  $a_1$  (s. S. 338) eine gewisse Aussage gemacht wird.

Sei

g:  $z_1 = \varrho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}, z_2 = e^{i\tau}, \quad \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2, \quad 0 \leq \varrho(\tau) < 1$   
eine in  $a_1$  liegende Kurve. Wir ordnen ihr zwei (für unsere Zwecke charakteristische) Konstanten zu, nämlich

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \text{und} \quad \chi = \max_{\alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2} |w[\varrho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}, e^{i\tau}]|,$$

wobei

$$w(z, e^{i\tau}), \quad \left[ w(0, e^{i\tau}) = 0, \quad \left( \frac{dw(z, e^{i\tau})}{dz} \right)_{z=0} > 0 \right]$$

diejenige Funktion bedeutet, die  $\mathfrak{B}(e^{i\tau})$  auf den Einheitskreis abbildet.

Mit  $\mathfrak{F}$  bezeichnen wir eine Fläche:

$z_1 = r(\tau, s) e^{i\phi(\tau, s)}, \quad z_2 = e^{i\tau},$   
 $0 \leq s \leq 1, \quad \alpha_1 \leq \tau \leq \alpha_2, \quad r(\tau, 0) e^{i\phi(\tau, 0)} = \varrho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}, \quad r(\tau, 1) = 1,$   
die in  $a_1 + \mathfrak{F}$  liegt und deren Rand in  $a_1 + \mathfrak{F}$  aus g, einer in  $\mathfrak{F}$  befindlichen und zwei in den Ebenen  $z = e^{i\alpha_x}, x = 1, 2$ , liegenden Kurven, besteht.

Unter Anwendung von Schlüssen, die mit dem Millouxschen Satz zusammenhängen, gelangt man zu dem folgenden Ergebnis:

Sei  $\delta < 1$ . Es existiert dann eine nur von  $\mathfrak{U}, \delta$  und den beiden für g charakteristischen Größen  $\alpha$  und  $\chi$  abhängige Funktion  $M(z_1, z_2)$ , für die in  $\mathfrak{U}: M(z_1, z_2) < 1$  gilt, so daß für jede in  $\mathfrak{U} + a$  reguläre Funktion  $f(z_1, z_2)$ , für die

$$(3, 34) \quad \text{auf } \mathfrak{F}: \quad |f| \leq 1, \quad \text{auf } \mathfrak{F}: \quad |f| \leq \delta$$

ausfällt,

$$(3, 35) \quad \text{in } \mathfrak{U}: \quad |f(z_1, z_2)| \leq M(z_1, z_2)$$

ist.

<sup>26)</sup> Vgl. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 2 (Leipzig und Berlin, 1927), S. 127.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß die im § 3 durchgeführten Betrachtungen sich auf den Fall der Gebiete  $\mathfrak{M}$  ausdehnen lassen, die von einer „Deckelhyperfläche“  $z_2 = e^{i\lambda_0}$  und endlich vielen weiteren Hyperflächen  $z_1 = h_k(z_2, \lambda_k)$ ,  $0 \leq \lambda_k \leq 2\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  berandet sind <sup>26)</sup>.

<sup>26)</sup> Bei der Aufstellung der  $\mathbf{P}$ -Operation geht man von der in den Gebieten  $\mathfrak{M}$  gültigen „verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel“

$$f(t_1, t_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_k \sum_s \iint_{\mathfrak{M}_{k,s}} \frac{f(\varphi_1, \varphi_2) B_{k,s}(t_2, \lambda_k, \lambda_s) d\lambda_k d\lambda_s}{[h_k(t_2, \lambda_k) - t_1][h_s(t_2, \lambda_s) - t_1]},$$

aus, wobei  $\sum_k \sum_s \mathfrak{G}_{k,s} = \mathfrak{G}$  die Maximumfläche von  $\mathfrak{M}$  bildet und  $\varphi_p \equiv \varphi_p(\lambda_k, \lambda_s)$ ,  $p = 1, 2$  bei Variation von  $\lambda_k, \lambda_s$  in  $\mathfrak{M}_{k,s}$  die Fläche  $\mathfrak{G}_{k,s}$  durchläuft.

Wegen näherer Beschreibung der Bereiche  $\mathfrak{M}$  sowie wegen dieser Integralformel vgl. die Arbeiten V [siehe Fußnote <sup>5)</sup>], IV. Kap., S. 250–252 und „Herstellung von vollständigen Funktionensystemen in 2 k. V.“. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 32 (1933), S. 76–77.

(Eingegangen am 2. 1. 1933.)

# Quadratic fields with and without Euclid's Algorithm<sup>1)</sup>.

Von

Alexander Oppenheim in Singapore.

Euclid's algorithm holds in the field  $R(\sqrt{m})$ , if to every rational point  $(a, b)$  there corresponds at least one lattice-point  $(x, y)$  such that

$$|(x + \lambda y - a)^2 - \mu^2 m (y - b)^2| < 1,$$

where

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu = \frac{1}{2}, & \text{if } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ \lambda &= 0, \mu = 1, & \text{if } m \not\equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

It is necessary to examine therefore whether rational points  $(a, b)$  can exist such that for every lattice-point  $(x, y)$  one of the inequalities

$$\begin{aligned} P(x, y): (x + \lambda y - a)^2 &\geq 1 + n(y - b)^2 \\ N(x, y): n(y - b)^2 &\geq 1 + (x + \lambda y - a)^2 \end{aligned} \quad (n = \mu^2 m)$$

is true. In this case the algorithm does not hold.

We may clearly suppose that

$$(1) \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq b \leq \frac{1}{2}.$$

The case of interest is  $m > 0$ .

Plainly  $P(0, 0)$  is false;  $N(0, 0)$  must hold.

$P(1, 0)$  is then false;  $N(1, 0)$  must hold.

$P(-1, 0)$  and  $N(1, 0)$  yield

$$\begin{aligned} (1 + a)^2 &\geq 1 + nb^2 \geq 2 + (1 - a)^2, \\ 4a &\geq 2, \quad a = \frac{1}{2}, \quad nb^2 = \frac{5}{4}, \quad n \geq 5, \quad b \text{ irrational.} \end{aligned}$$

Hence  $P(-1, 0)$  is false;  $N(-1, 0)$  must hold:

$$(2) \quad nb^2 \geq 1 + (1 + a)^2 \geq 2, \quad n \geq 8.$$

Hence Euclid's algorithm holds when  $n < 8$ , i. e. for

$$m = 2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 21, 29.$$

Case  $m = 11$ :  $\lambda = 0, \mu = 1, n = m$ .

<sup>1)</sup> Auszug aus einem Brief an Herrn Perron vom 8. Februar 1933 im Anschluß an dessen Note: Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. Math. Annalen 107, S. 489—495.

$N(-1, 0)$  holds as above.  $N(2, 0)$  contradicts  $b \leq \frac{1}{2}$ . Thus  $P(2, 0)$  holds.  $P(2, 0)$  and  $N(2, 1)$  give, by addition,  $9 \geq 22b$ , whereas by  $N(-1, 0)$ :  $(22b)^2 \geq 88$ .

Thus  $N(2, 1)$  is false;  $P(2, 1)$  must hold. From  $P(2, 1)$  and  $N(-1, 0)$  by addition:

$$(3) \quad 11b \geq 5 + 3a, \text{ hence } 11b \geq 5, \quad 1 \geq 6a.$$

If  $N(5, 2)$  is true, add to  $P(2, 1)$ . We find

$$5 + 3a \geq 11b,$$

so that by (3):  $5 + 3a = 11b$ ;  $P(2, 1)$ ,  $N(-1, 0)$ ,  $N(5, 2)$  are equalities. From  $N(-1, 0)$ :

$$2a^2 - 8a = 3, \quad a < 0 \quad \text{or} \quad a > \frac{1}{2}.$$

Hence  $N(5, 2)$  is false;  $P(5, 2)$  must hold. Add to  $N(-1, 0)$ ; then

$$44b \geq 22 + 12a, \quad b = \frac{1}{2}, \quad a = 0.$$

$P(5, 2)$  now asserts that

$$25 \geq 1 + \frac{99}{4}.$$

Hence Euclid's algorithm holds in  $R(\sqrt{11})$ .

Case  $m = 31$ . Euclid's algorithm is false in  $R(\sqrt{31})$  (although  $h = 1$ ).

Take the point  $a = 0$ ,  $b = \frac{13}{31}$ . I assert that

$$\left| x^2 - 31 \left( y - \frac{13}{31} \right)^2 \right| \geq 1,$$

i. e. that

$$|\xi| = |31x^2 - (31y - 13)^2| \geq 31$$

for all integers  $x$  and  $y$ . Clearly

$$\xi \equiv -169 \equiv -14 \pmod{31}.$$

It is sufficient therefore to show, that the Diophantine equations

$$31X^2 - Y^2 = -14 \quad \text{or} \quad 17$$

are not solvable in integers  $X, Y$ . They cannot be solvable since 31 is not a quadratic residue of 7 or of 17.

Case  $m = 23$ .

Take the point  $a = 0$ ,  $b = \frac{7}{23}$ .

$$23[(x-a)^2 - 23(y-b)^2] \equiv -49 \equiv -3 \pmod{23}.$$

But the equations

$$23X^2 - Y^2 = -3 \quad \text{or} \quad 20$$



are not solvable in integers  $X, Y$ , since 23 is not a quadratic residue of 3 or of 5.

Hence Euclid's algorithm cannot hold in  $R(\sqrt{23})$ .

Case  $m \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $4n = m$ ,  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ .

Euclid's algorithm holds for  $R(\sqrt{m})$  with

$$m = 33, 37, 41.$$

$N(-1, 0)$  holds as above:

$$nb^2 \geq 1 + (1+a)^2 \geq 2, \quad b \geq \sqrt{\frac{2}{n}} \geq \sqrt{\frac{8}{41}}.$$

Now  $N(-2, 1)$  implies

$$n(1-b)^2 \geq 1 + \left(\frac{3}{2} + a\right)^2 \geq \frac{13}{4},$$

$$1-b \geq \sqrt{\frac{13}{4n}} \geq \sqrt{\frac{13}{41}}, \quad b \leq 1 - \sqrt{\frac{13}{41}} < \sqrt{\frac{8}{41}}.$$

Hence  $N(-2, 1)$  is false;  $P(-2, 1)$  holds. Since  $P(1, 1)$  implies

$$\frac{9}{4} \geq \left(\frac{3}{2} - a\right)^2 \geq 1 + n(1-b)^2 \geq 1 + \frac{n}{4}, \quad 5 \geq n \geq \frac{33}{4},$$

$P(1, 1)$  is false;  $N(1, 1)$  holds. From  $N(1, 1)$  and  $P(-2, 1)$  by addition

$$6a \geq 2,$$

and so from  $N(-1, 0)$ :

$$\frac{1}{4}n \geq \frac{25}{9}, \quad \frac{100}{9} \leq n \leq \frac{41}{4}, \quad 400 \leq 369.$$

It follows, that Euclid's algorithm holds for  $m = 33, 37, 41$ .

<sup>2)</sup> Schon vor längerer Zeit hat mir Herr I. Schur mitgeteilt, daß für  $m = 47$  kein Euklidischer Algorithmus existiert, indem sich die Ungleichung

$$\left| \left(x - \frac{3}{7}\right)^2 - 47 \left(y - \frac{2}{7}\right)^2 \right| < 1$$

als unmöglich erweist. Die Oppenheimsche Methode ist hier ebenfalls anwendbar und führt schneller zum Ziel. Man erkennt mit ihr nämlich leicht die Unmöglichkeit der Ungleichung

$$\left| x^2 - 47 \left(y - \frac{10}{47}\right)^2 \right| < 1,$$

da diese analog wie im Text die folgende unmögliche Gleichung nach sich zieht:

$$47X^2 - Y^2 = -6 \quad \text{oder} \quad 41.$$

Perron.

Case  $m = 53$ . An example shows that the algorithm cannot hold.

Take  $a = 0$ ,  $b = \frac{24}{53}$ . Then

$$\left| \left( x + \frac{1}{2} y \right)^2 - \frac{53}{4} \left( y - \frac{24}{53} \right)^2 \right| \geq 1$$

for all integers  $x, y$ , if

$$|\xi| = |53X^2 - Y^2| \geq 212$$

for all integers  $X, Y$  such that

$$X \equiv Y \pmod{2}, \quad Y \equiv -24 \pmod{53}.$$

Now clearly

$$\xi \equiv -24^2 \equiv 7 \pmod{53},$$

$$\xi \equiv 0 \pmod{4}.$$

Hence we have to show that the equations

$$53X^2 - Y^2 = 60 \quad \text{or} \quad -152$$

cannot be satisfied by integers  $X, Y$ . And this is the case since 53 is not a quadratic residue of 3 or of 19.

(Eingegangen am 20. 5. 1933.)

## Über die rationale Dimension.

Von

Georg Nöbeling in Wien.

Die mengentheoretische Dimensionstheorie beruht auf folgender rekursiven Definition der Dimension: Ist bereits definiert, wann eine Teilmenge eines metrischen (und separablen) Raumes höchstens  $(n - 1)$ -dimensional heißt, so wird eine Menge  $M$  des Raumes höchstens  $n$ -dimensional genannt, wenn jeder Punkt von  $M$  in beliebig kleinen Umgebungen liegt, deren Begrenzungen mit  $M$  höchstens  $(n - 1)$ -dimensionale Durchschnitte haben<sup>1)</sup>. Von entscheidender Bedeutung für die Fruchtbarkeit eines auf einer solchen Rekursion beruhenden Dimensionsbegriffes ist der Anfang der Rekursion, d. h. die Definition der nulldimensionalen Mengen, die natürlich a priori willkürlich ist. Die Menger-Urysohnsche Theorie wählt als (höchstens) nulldimensionale Mengen diejenigen, deren Punkte in beliebig kleinen Umgebungen liegen, deren Begrenzungen mit der Menge leere Durchschnitte haben.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die höchstens abzählbaren Mengen zum Ausgang der Rekursion zu wählen. Die so entstehende Dimension nennt Menger rational<sup>2)</sup>. Rational nulldimensional (in jedem Punkte) heißt demnach jede nichtleere, höchstens abzählbare Menge; eine Menge  $M$  heißt im Punkte  $p$  höchstens rational  $n$ -dimensional, wenn  $p$  in beliebig kleinen Umgebungen liegt, deren Begrenzungen mit  $M$  höchstens rational  $(n - 1)$ -dimensionale Durchschnitte haben; höchstens rational  $n$ -dimensional ist eine Menge, wenn sie in jedem ihrer Punkte höchstens rational  $n$ -dimensional ist.

Es entsteht nun die Frage, wie weit und in welcher Form über die rationale Dimension Analoga gelten zu den Sätzen der Menger-Urysohnschen Theorie. Bereits bekannt sind die folgenden:

**Summensatz.** Die Summe  $S$  von endlich- oder abzählbarvielen, in  $S$  abgeschlossenen höchstens rational  $n$ -dimensionalen Mengen ist höchstens rational  $n$ -dimensional<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Bezüglich der Literaturangaben sei auf Menger, Dimensionstheorie (Teubner 1928), S. 83 f. verwiesen.

<sup>2)</sup> Menger, Wiener Akad. Anzeiger, 1928, Nr. 1.

<sup>3)</sup> Menger, Dimensionstheorie, S. 121.

**Zerlegungssatz.** Eine höchstens rational  $n$ -dimensionale Menge  $M$  kann bei beliebig gegebenem  $\varepsilon > 0$  dargestellt werden als Summe von endlichvielen in  $M$  abgeschlossenen Mengen mit Durchmessern  $< \varepsilon$ , die zu je  $k$  einen höchstens rational  $(n - k + 1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ). Kann umgekehrt eine kompakte Menge  $M$  für irgendein  $k \leq n + 1$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  in eine Summe von endlichvielen abgeschlossenen Teilmengen  $< \varepsilon$  zerlegt werden, die zu je  $k$  einen höchstens rational  $(n - k + 1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben, so ist die Menge  $M$  höchstens rational  $n$ -dimensional<sup>4)</sup>.

**Zerspaltungssatz.** Eine Menge ist genau dann höchstens rational  $n$ -dimensional, wenn sie dargestellt werden kann als Summe von  $n$  null-dimensionalen und einer höchstens abzählbaren Menge<sup>5)</sup>.

Neben diesen bereits bekannten Sätzen gelten noch drei weitere, für die wir im folgenden Beweise erbringen werden:

**Universalmengensatz.** Es existiert (sogar im cartesischen  $R_{n+1}$ ) eine höchstens rational  $n$ -dimensionale Menge  $U$ , die zu jeder höchstens rational  $n$ -dimensionalen Menge eine homöomorphe Teilmenge enthält.

**$\varepsilon$ -Deformationssatz.** Eine kompakte Teilmenge eines cartesischen Raumes ist genau dann höchstens rational  $n$ -dimensional, wenn sie sich für jedes  $\varepsilon > 0$  in<sup>6)</sup> einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K$  derart  $\varepsilon$ -deformieren läßt, daß die Menge aller Punkte von  $K$  mit höchstens abzählbarvielen Urbildern in  $K$  dicht liegt.

**Kompaktifikationssatz.** Zu einer höchstens rational  $n$ -dimensionalen Menge  $M$  existiert eine  $n$ -dimensionale kompakte Menge  $K$ , die eine zu  $M$  homöomorphe Teilmenge  $M'$  enthält und so als Summe von  $n + 1$  null-dimensionalen Mengen dargestellt werden kann, daß eine von ihnen mit  $M'$  einen höchstens abzählbaren Durchschnitt hat.

Der Universalmengensatz ist das Analogon zu dem Satz, daß es eine  $n$ -dimensionale Menge gibt, die zu jeder höchstens  $n$ -dimensionalen Menge eine homöomorphe Teilmenge enthält<sup>7)</sup>. Während es sogar kompakte

<sup>4)</sup> Menger, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1, S. 8. Vgl. hierzu Dimensionstheorie, S. 155 ff.

<sup>5)</sup> Menger, Dimensionstheorie, S. 120. Vgl. auch S. 113.

<sup>6)</sup> Unter einer Abbildung, Deformation usw. auf bzw. in eine Menge  $M$  verstehen wir mit v. d. Waerden eine Abbildung, bei welcher ganz  $M$  bzw. eine echte oder unechte Teilmenge von  $M$  durch Bildpunkte überdeckt wird.

<sup>7)</sup> Für  $n = 0$ : Sierpiński, Fund. Math. 2, S. 89; für  $n = 1$ : Menger, Proc. Acad. Amsterdam 29, S. 1125; für allgemeines  $n$ : Nöbeling, Math. Ann. 104, S. 71 und Lefschetz, Ann. of Math. 32, S. 529.

Mengen mit dieser Eigenschaft gibt, existieren nicht einmal rational  $n$ -dimensionale Universalmengen, welche  $G_\delta$  sind. Denn beispielsweise besitzt ein  $G_\delta$ , das eine zur Menge aller rationalen Punkte der Geraden homöomorphe Menge enthält, einen nichtleeren insichdichten Kern, ist also unabzählbar<sup>9)</sup> und daher nicht rational nulldimensional. Immerhin werden die von uns konstruierten Universalmengen Borelsche Mengen sein.

Der  $\varepsilon$ -Deformationssatz unterscheidet sich von dem analogen Satz, daß eine kompakte cartesische Menge genau dann höchstens  $n$ -dimensional ist, wenn sie sich für jedes  $\varepsilon > 0$  auf<sup>10)</sup> einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $\varepsilon$ -deformieren läßt<sup>9)</sup>, einerseits dadurch, daß bei uns nur von einer Deformation in<sup>11)</sup> einen Komplex  $K$ , also von einer Abbildung auf eine Teilmenge von  $K$  die Rede ist, andererseits dadurch, daß es sich bei uns um spezielle solche Deformationen handelt, um solche nämlich, bei welchen eine im Komplex dichte Menge mit höchstens abzählbarer Urbildmenge existiert. Wie Herr Menger bemerkt hat, kann man mit unseren Methoden auch den Satz nachweisen, daß jede kompakte  $n$ -dimensionale Menge eines cartesischen Raumes für jedes  $\varepsilon > 0$  in einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K$  derart  $\varepsilon$ -deformiert werden kann, daß eine im Komplex  $K$  dichte Menge mit höchstens nulldimensionaler Urbildmenge existiert.

Der Kompaktifikationssatz, der das Analogon ist zu dem Satz, daß jede höchstens  $n$ -dimensionale Menge homöomorph ist mit einer Teilmenge einer kompakten höchstens  $n$ -dimensionalen Menge<sup>10)</sup>, kann nicht zu der Behauptung verschärft werden, daß  $K$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist. Denn dann gäbe es auch eine kompakte höchstens rational  $n$ -dimensionale Universalmenge, entgegen unserer eben angestellten Überlegung.

Bevor wir an die Beweise schreiten, beweisen wir unter der Voraussetzung, daß  $Q$  eine konvexe, offene Teilmenge eines euklidischen Raumes oder des  $Q_n$ <sup>11)</sup> ist, daß weiter  $H$  ein kompakter, metrischer Raum und  $L$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $H$  ist, drei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Es sei  $\varphi(H)$  bzw.  $\varphi_0(L)$  ein eindeutiges, stetiges Bild von  $H$  bzw.  $L$  in<sup>12)</sup>  $\bar{Q}$ ; für jeden Punkt  $p$  von  $L$  sei der Abstand  $\delta(\varphi(p), \varphi_0(p)) \leq \eta$ . Dann existiert eine eindeutige, stetige Abbildung  $\psi(H)$

<sup>9)</sup> Satz von Cantor, s. z. B. Hausdorff, Mengenlehre (de Gruyter 1927), S. 135.

<sup>10)</sup> Alexandroff, Math. Annalen 98, S. 617; Ann. of Math. 30, S. 120.

<sup>11)</sup> Hurewicz, Proc. Acad. Amsterdam 30, S. 425; Monatsh. f. Math. u. Phys. 37, S. 199.

<sup>12)</sup> Der  $Q_n$  ist die durch die Beziehungen  $0 \leq x_i \leq \frac{1}{i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) definierte Teilmenge des Hilbertschen Raumes.  $Q_n$  ist kompakt und enthält zu jedem separablen Raum eine homöomorphe Teilmenge.

von  $H$  in  $\bar{Q}$ , so daß für jeden Punkt  $p$  aus  $L$  bzw.  $H$  gilt  $\psi(p) = \psi_0(p)$  bzw.  $\delta(\varphi(p), \psi(p)) \leq \eta$ .

Beweis. Ist  $p$  ein Punkt aus  $L$ ,  $x_\mu(p)$  die  $\mu$ -te Koordinate von  $\psi_0(p)$ , so ist  $x_\mu(p)$  eine eindeutige, stetige Funktion von  $p$ . Da  $L$  in  $H$  abgeschlossen ist, existiert eine auf ganz  $H$  definierte eindeutige, stetige Funktion  $x'_\mu(p)$ , so daß für jeden Punkt  $p$  aus  $L$  gilt  $x'_\mu(p) = x_\mu(p)$  (und, falls  $Q$  eine offene Teilmenge des  $Q_\infty$  ist, die Beziehung  $0 \leq x'_\mu(p) \leq \frac{1}{\mu}$  besteht). Wir bezeichnen für jeden Punkt aus  $H$  mit  $\psi'(p)$  den Punkt mit den Koordinaten  $x'_\mu(p)$ . Dann ist  $\psi'(p)$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $H$ , welche auf  $L$  mit  $\psi_0(p)$  identisch ist. Bedeutet nun  $p$  einen beliebigen Punkt aus  $H$ , so betrachten wir den Vektor mit dem Anfangspunkt  $\varphi(p)$  und dem Endpunkt  $\psi'(p)$ . Falls  $\delta(\varphi(p), \psi'(p)) > \eta$  ist, verkürzen wir den Vektor unter Festlassung seines Anfangspunktes auf einen Vektor mit der Länge  $\eta$ , und nennen seinen neuen Endpunkt  $\psi''(p)$ . Der Anfangspunkt  $\varphi(p)$  liegt nach Voraussetzung in  $\bar{Q}$ . Liegt nun  $\psi''(p)$  außerhalb von  $\bar{Q}$ , so verkürzen wir den Vektor mit dem Anfangspunkt  $\varphi(p)$  und dem Endpunkt  $\psi''(p)$  unter Festlassung seines Anfangspunktes so, daß sein neuer Endpunkt, den wir mit  $\psi(p)$  bezeichnen, auf der Begrenzung  $\bar{Q} - Q$  von  $Q$  liegt. Wegen der Konvexität von  $Q$  ist diese Operation eindeutig und stetig. Die Abbildung  $\psi(p)$  genügt offenbar den Forderungen des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. Es sei  $\psi(H)$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $H$  in  $\bar{Q}$ , bei welcher  $\psi(L) \subset \bar{Q} - Q$  ist;  $\eta$  sei eine positive Zahl. Dann gibt es eine eindeutige, stetige Abbildung  $\chi(p)$  von  $H$  in  $\bar{Q}$ , welche auf  $L$  mit  $\psi(L)$  identisch ist, die Menge  $H - L$  in  $Q$  abbildet und für jeden Punkt  $p$  aus  $H$  der Bedingung  $\delta(\psi(p), \chi(p)) \leq \eta$  genügt.

Beweis. Wir setzen  $H_0$  gleich der leeren Menge und  $H_i$  gleich der Menge aller Punkte aus  $H$ , die von  $L$  einen Abstand  $\geq \frac{1}{i}$  haben ( $i = 1, 2, \dots$ ). Dann ist jede Menge  $H_i$  kompakt, und es bestehen die Beziehungen  $H_{i-1} \subset H_i$  und  $H - L = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ . Es sei  $B = \bar{Q} - Q$  die Begrenzung von  $Q$ . Wir setzen identisch  $\psi(p) = \chi_0(p)$  und  $\varepsilon_0 = \eta$  und machen die Induktionsvoraussetzung, daß für irgendein  $j$  eine eindeutige, stetige Abbildung  $\chi_j$  von  $H$  in  $\bar{Q}$  und Zahlen  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_j$  vorliegen mit folgenden Eigenschaften<sup>13)</sup>:

$$(1_j) \text{ Es gilt } \delta(\chi_j(H_i), B) \geq \varepsilon_i \cdot \left(1 + \frac{1}{2^j}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, j).$$

<sup>13)</sup> Damit (1<sub>j</sub>) auch für leeres  $H_i$  einen Sinn hat, bezeichnen wir als Abstand der leeren Menge von  $B$  die Zahl  $\infty$ .

(2<sub>j</sub>)  $\chi_j$  ist auf  $L$  identisch mit  $\psi$ .

Wir wollen eine neue Abbildung  $\chi_{j+1}$  konstruieren, die neben den Bedingungen (1<sub>j+1</sub>) und (2<sub>j+1</sub>) der folgenden genügt:

(3<sub>j</sub>) Es ist  $\delta(\chi_j(p), \chi_{j+1}(p)) \leq \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$  für jeden Punkt  $p$  aus  $H$ .

Zu diesem Zwecke setzen wir  $\zeta = \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$ . Es sei nun  $m$  ein Punkt aus  $Q$  und  $h$  ein beliebiger Halbstrahl mit dem Anfangspunkt  $m$ . Ist  $q$  ein Punkt von  $h$ , der von  $m$  einen Abstand  $\delta \leq \zeta$  bzw.  $> \zeta$  hat, so bezeichnen wir mit  $\varrho(q)$  den Punkt  $m$  bzw. denjenigen Punkt von  $h$ , der von  $m$  den Abstand  $\delta - \zeta$  hat; dann ist also  $\varrho \chi_j(H_{j+1})$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $H_{j+1}$ , für welche wegen  $\chi_j(H_{j+1}) \subset \bar{Q}$  und der Konvexität von  $Q$  gilt  $\varrho \chi_j(H_{j+1}) \subset Q$ . Mithin ist  $\delta(\varrho \chi_j(H_{j+1}), B) = \xi > 0$ . Wir setzen  $\varrho \chi_j(H_{j+1}) = \chi_{j+1}(H_{j+1})$ . Da  $\xi > 0$  ist, können wir sofort eine Zahl  $\varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j$  so finden, daß (1<sub>j+1</sub>) gilt. Wir setzen nun  $\chi_{j+1}(p) = \psi(p)$  für jeden Punkt  $p$  aus  $L$ , so daß also (2<sub>j+1</sub>) gilt.

Nach Wahl von  $\zeta$  ist  $\delta(\chi_{j+1}(p), \chi_j(p)) \leq \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$  für jeden Punkt  $p$  aus  $H_{j+1} + L$ . Nach Hilfssatz 1 (angewandt auf  $H_{j+1} + L$  statt auf  $L$ ) kann man die Abbildung  $\chi_{j+1}$  auf ganz  $H$  fortsetzen, so daß  $\chi_{j+1}(H) \subset \bar{Q}$  und (3<sub>j</sub>) für jeden Punkt  $p$  aus  $H$  gilt. Damit haben wir die induktive Konstruktion von  $\chi_{j+1}$  und  $\varepsilon_{j+1}$  beendet.

Wegen (3<sub>j</sub>) und  $\varepsilon_j \leq \varepsilon_0$  konvergieren die  $\chi_j$  gegen eine eindeutige, stetige Abbildung  $\chi$  von  $H$  in  $\bar{Q}$ , die wegen (2<sub>j</sub>) auf  $L$  mit  $\psi = \chi_0$  identisch ist. Wegen (3<sub>j</sub>) ist außerdem  $\delta(\chi_0(p), \chi(p)) \leq \varepsilon_0$ , also, da  $\chi_0 = \psi$  und  $\varepsilon_0 = \eta$  gilt, ist  $\delta(\psi(p), \chi(p)) \leq \eta$ . Ist nun  $p$  ein Punkt aus  $H - L$ , so existiert ein  $i$ , so daß  $p \subset H_i$ . Dann hat wegen (1<sub>i</sub>) der Punkt  $\chi_i(p)$  von  $B$  einen Abstand  $\geq \varepsilon_i \cdot \left(1 + \frac{1}{2^i}\right)$ ; wegen (3<sub>j</sub>) und  $\varepsilon_j \leq \varepsilon_i$  für  $j > i$  hat daher  $\chi(p)$  von  $B$  einen Abstand  $\geq \varepsilon_i > 0$ . Also ist, da  $p \subset \bar{Q}$  gilt,  $p$  ein Punkt von  $Q$ ; mithin ist  $\chi(H - L) \subset Q$ . Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. Außer den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 gelte noch die folgende: Ist  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $H - L$ , so kann jedes stetige Bild von  $K$  in  $Q$  durch eine beliebig kleine Modifikation in ein topologisches Bild von  $K$  verwandelt werden. Dann kann man die Abbildung  $\chi$  so wählen, daß sie außer den Bedingungen des Hilfssatzes 2 noch der Forderung genügt, daß  $\chi$  auf  $H - L$  topologisch ist.

Beweis. Wir bringen am Beweise des Hilfssatzes 2 folgende Änderungen an. Da  $H_{j+1}$  kompakt ist, können wir die Abbildung  $\varrho \chi_j(H_{j+1})$



durch eine Modifikation  $< \xi$  und  $< \zeta$  in eine topologische Abbildung  $\chi_{j+1}(H_{j+1})$  überführen. Die Zahl  $\varepsilon_{j+1}$  können wir dann so klein wählen, daß außer  $(1_{j+1})$  noch gilt:

- (4<sub>j</sub>) Für je zwei Punkte  $p, p'$  aus  $H_{j+1}$  mit  $\delta(p, p') \geq \frac{1}{2^j}$  ist  

$$\delta(\chi_{j+1}(p), \chi_{j+1}(p')) \geq 2\varepsilon_{j+1}.$$

Sind dann  $p$  und  $p'$  zwei Punkte aus  $H - L$ , so existiert ein  $j$ , so daß  $p$  und  $p'$  in  $H_{j+1}$  liegen und einen Abstand  $\geq \frac{1}{2^j}$  haben. Dann ist wegen (3<sub>k</sub>) ( $k = j+1, j+2, \dots$ ) und (4<sub>j</sub>) offenbar  $\delta(\chi(p), \chi(p')) \geq \varepsilon_{j+1}$ , also  $\chi(p) \neq \chi(p')$ , d. h.  $\chi$  ist auf  $H - L$  eindeutig, also, da  $H$  kompakt und  $\chi$  auf  $H$  stetig ist, topologisch.

Wir beginnen jetzt den

#### Beweis des Satzes von der Universalmenge im $Q_\omega$ .

Es sei  $V^n$  die Menge aller Punkte des  $Q_\omega$ , die entweder höchstens  $n-1$  rationale Koordinaten oder ausschließlich rationale Koordinaten haben, die aber im letzteren Falle fast alle verschwinden. Wir behaupten, daß diese Menge  $V^n$  eine rational  $n$ -dimensionale Universalmenge ist, d. h. zu jeder höchstens rational  $n$ -dimensionalen Menge einen homöomorphen Teil enthält und selbst höchstens rational  $n$ -dimensional ist.

Zunächst haben wir zu zeigen, daß  $V^n$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist. Nun ist für jedes  $k \leq n-1$  die Menge  $M_k$  aller Punkte des  $Q_\omega$  mit genau  $k$  rationalen Koordinaten nulldimensional<sup>12a)</sup> und die Menge  $M_n$  aller Punkte des  $Q_\omega$ , deren Koordinaten alle rational und fast alle gleich Null sind, abzählbar. Also ist  $V^n$  Summe der  $n$  nulldimensionalen Mengen  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  und der abzählbaren Menge  $M_n$ . Mithin ist  $V^n$  nach dem Zerspaltungssatz höchstens rational  $n$ -dimensional, wie behauptet.

Da wir jede Menge des  $Q_\omega$  durch eine affine Transformation in eine Menge des  $Q_\omega$  überführen können, deren Punkte  $\{x_i\}$  den Bedingungen  $0 < x_i < \frac{1}{i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) genügen, und die Menge aller Punkte des  $Q_\omega$  mit  $0 < x_i < \frac{1}{i}$  in  $Q_\omega$  offen ist, so ist der Universalmengensatz (sogar in der verschärften Form, daß jede höchstens rational  $n$ -dimensionale Menge des  $Q_\omega$  durch eine Modifikation  $< \varepsilon$  in  $V^n$  eingebettet werden kann) offenbar eine Konsequenz aus folgendem

**Satz.** Sei  $O$  eine offene Menge des  $Q_\omega$ , deren sämtliche Punkte  $\{x_i\}$  den Bedingungen  $0 < x_i < \frac{1}{i}$  genügen ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $R$  sei eine Menge

<sup>12a)</sup> Vgl. hierzu Menger, Dimensionstheorie, S. 147.

des  $Q_\omega$ , deren Durchschnitt  $O \cdot R$  mit  $O$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist, und  $H$  eine abgeschlossene Teilmenge  $\supset R$  des  $Q_\omega$ . Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine topologische Abbildung von  $H$  auf eine Teilmenge des  $Q_\omega$ , die jeden Punkt von  $H - O \cdot H$  auf sich selbst und jeden Punkt  $p$  aus  $O \cdot R$  auf einen Punkt von  $O \cdot V^n$  abbildet, der von  $p$  einen Abstand  $< \varepsilon$  hat.

Beim Beweis dieses Satzes können wir uns auf den Fall beschränken, daß  $O$  ein offener Quader  $Q$  (d. h. eine Menge der Form  $0 \leq c_i < x_i < c'_i \leq \frac{1}{i}$ ) ist; denn man kann die Menge  $O$  durch endlich oder abzählbar unendlichviele offene Quader  $Q_j \subset O$  überdecken, so daß jedes  $Q_j$  mit höchstens endlichvielen anderen  $Q_k$  Punkte gemein hat; wenden wir dann den für Quader  $Q$  als richtig angenommenen Satz für jedes  $j$  auf  $Q_j$  statt  $O$  und  $\frac{\varepsilon}{2^j}$  statt  $\varepsilon$  an, so ergibt sich offenbar unser Satz. Im folgenden bedeute also  $Q = O$  ein für alle Mal einen offenen Quader des  $Q_\omega$ . Außerdem bedeutet es natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß  $H$  das Komplement  $Q_\omega - Q$  enthält; diese Annahme wollen wir für das Folgende treffen.

Der Beweis des Satzes geschieht durch vollständige Induktion nach  $n$ . Wir beginnen mit dem Fall

$n = 0$ . Die Menge  $Q \cdot R$  ist in diesem Falle höchstens abzählbar; wir bezeichnen ihre Punkte in irgendeiner Reihenfolge mit  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots$  eventuell ad inf.). Es sei nun  $f_0(H)$  die identische Abbildung von  $H$  auf sich. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß bereits eine topologische Abbildung  $f_j(H)$  von  $H$  vorliegt, welche  $H - Q \cdot H$  identisch auf sich und jeden Punkt  $p$  aus  $Q \cdot H$  auf einen Punkt  $f_j(p)$  von  $Q$  abbildet. Falls es einen Punkt  $p_{j+1}$  nicht mehr gibt, setzen wir  $f_{j+1}$  identisch gleich  $f_j$ . Andernfalls bezeichnen wir mit  $S$  eine offene Kugel mit dem Zentrum  $f_j(p_{j+1})$ , die  $\subset Q$  ist, keinen der Punkte  $f_j(p_1), f_j(p_2), \dots, f_j(p_j)$  enthält und einen Radius  $r < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$  hat. Da  $V^0$  im  $Q_\omega$  dicht ist, gibt es einen Punkt  $q$  von  $V^0$ , der in  $S$  liegt und vom Zentrum  $f_j(p_{j+1})$  einen Abstand  $< \frac{r}{2^{j+1}}$  hat. Wir bezeichnen nun mit  $\psi$  die Abbildung, die entsteht, wenn man jeden Punkt von  $Q_\omega - S$  auf sich selbst und jeden Radius von  $S$ , der das Zentrum mit einem Punkte  $q'$  der Oberfläche von  $S$  verbindet, ähnlich auf die Strecke  $qq'$  abbildet, so daß das Zentrum  $f_j(p_{j+1})$  in  $q$ , und  $q'$  in sich übergeht. Setzen wir  $f_{j+1} = \psi f_j$ , so ist die hierdurch definierte Abbildung  $f_{j+1}$  topologisch und besitzt folgende Eigenschaften: 1. für  $p \in H - Q \cdot H$  ist  $f_j(p) = f_{j+1}(p)$  und für

$p \subset Q \cdot H$  ist  $f_{j+1}(p) \subset Q$ ; 2. für  $p = p_1, p_2, \dots, p_j$  ist  $f_j(p) = f_{j+1}(p)$ ; 3.  $f_{j+1}(p_{j+1}) \subset Q \cdot V^n$ ; 4. haben für zwei Punkte  $p, p'$  die Bilder  $f_j(p), f_j(p')$  den Abstand  $\delta$ , so haben die Bilder  $f_{j+1}(p)$  und  $f_{j+1}(p')$  einen Abstand  $> \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right)$ ; 5. für jeden Punkt  $p$  aus  $H$  haben die beiden Bilder  $f_j(p)$

und  $f_{j+1}(p)$  einen Abstand  $< \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Wegen 1. genügt die Abbildung  $f_{j+1}$

der Induktionsvoraussetzung, so daß wir also, ausgehend von der identischen Abbildung  $f_0$ , für jedes  $j$  eine topologische Abbildung  $f_j$  von  $H$  mit den genannten fünf Eigenschaften konstruieren können. Wegen 5. konvergieren die Abbildungen  $f_j$  von  $H$  gegen eine eindeutige, stetige Abbildung  $f$  von  $H$ , die jeden Punkt  $p$  von  $H$  auf einen Punkt  $f(p)$  von einem Abstand  $< \varepsilon$  abbildet. Nach 1. ist  $f(p) = p$  für jeden Punkt  $p$  von  $H - Q \cdot H$ . Wegen 4. haben für zwei Punkte  $p$  und  $p'$  von einem Abstände  $> 0$  die Bilder  $f(p)$  und  $f(p')$  einen Abstand  $> 0$ , sind also verschieden; die Abbildung  $f$  ist also eineindeutig, also, da  $H$  kompakt ist, topologisch. Wegen 2. und 3. ist  $f(p_j) \subset Q \cdot V^n$  für jedes  $j$ . Die Abbildung  $f$  genügt also der Behauptung des Satzes für  $n = 0$ .

Wir nehmen jetzt den Satz für  $n - 1$  als bewiesen an und machen nun den

Schluß von  $n - 1$  auf  $n$ . Mit  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) bezeichnen wir in irgendeiner Reihenfolge die abzählbarvielen Hyperebenen der Form  $x_i = r$ , wo  $i$  alle natürlichen und  $r$  alle rationalen Zahlen mit  $0 < r < \frac{1}{i}$  durchläuft. Wir werden sukzessive für jedes  $i$  die Menge  $H$  so auf eine Menge  $f_i(H)$  abbilden, daß der Durchschnitt von  $f_i(R)$  mit  $Q \cdot E_i$  in  $V^n$  enthalten ist. Diese Abbildungen  $f_i$  werden gegen eine topologische Abbildung  $f(H)$  von  $H$  konvergieren, für welche  $Q \cdot E_i \cdot f(R) \subset V^n$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) ist. Da aber  $Q_n - (E_1 + \dots) \subset V^n$  ist, so folgt hieraus  $Q \cdot j(R) \subset V^n$ , womit unsere Behauptung im wesentlichen bewiesen sein wird.

Wir bezeichnen mit  $f_0$  die identische Abbildung von  $H$  auf sich und mit  $\varepsilon_0$  die kleinere der beiden Zahlen  $\varepsilon$  und  $\frac{1}{2}$ . Dann genügt  $f_0$  offenbar den beiden folgenden Forderungen, wenn man darin  $j = 0$  setzt:

(1<sub>j</sub>) für  $p \subset H - Q \cdot H$  bzw.  $p \subset Q \cdot H$  ist  $f_j(p) = p$  bzw.  $f_j(p) \subset Q$ ,

(2<sub>j</sub>) für  $p, p' \subset H$  mit  $\delta(p, p') \geq \frac{1}{2^j}$  ist  $\delta(f_j(p), f_j(p')) \geq \varepsilon_j \cdot \left(1 + \frac{1}{2^j}\right)$

( $i = 0, 1, \dots, j$ ).

Wir machen nun die Induktionsvoraussetzung, daß für irgendein  $j \geq 0$  bereits  $j + 1$  Zahlen  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_j > 0$  und  $j + 1$  topologische

Abbildungen  $f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, j$ ) von  $H$  auf Teilmengen  $f_i(H)$  von  $Q_\infty$  definiert sind, so daß für  $j \geq 1$  gilt:

$$(3_j) \quad f_j(R) \cdot E_j \cdot Q \subset V^n,$$

$$(4_j) \quad \text{für } p \subset H \text{ mit } \delta(f_i(p), E_i) \geq \frac{1}{2^j} \text{ ist } \delta(f_j(p), E_i) \geq \varepsilon_i \cdot \left(1 + \frac{1}{2^j}\right) \\ (i = 1, 2, \dots, j),$$

$$(5_j) \quad \text{für jeden Punkt } p \subset H \text{ mit } f_i(p) \subset E_i \text{ oder } f_j(p) \subset E_i \text{ ist} \\ f_i(p) = f_j(p) \quad (i = 1, \dots, j-1).$$

Wir wollen eine topologische Abbildung  $f_{j+1}$  von  $H$  auf eine Teilmenge von  $Q_\infty$  und ein  $\varepsilon_{j+1} > 0$  konstruieren, welche den Forderungen  $(1_{j+1}) - (5_{j+1})$  und überdies der folgenden genügen:

$$(6_{j+1}) \quad \text{für } p \subset H \text{ ist } \delta(f_j(p), f_{j+1}(p)) \leq \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}.$$

Um eine solche Abbildung  $f_{j+1}$  zu konstruieren, bezeichnen wir mit  $\eta$  eine positive Zahl  $< \frac{\varepsilon_j}{2^{j+1}}$  und betrachten die Hyperebene  $E_{j+1}$ . Ist sie zu  $Q$  fremd, so setzen wir identisch  $f_{j+1} = f_j$  und sind fertig. Andernfalls zerfällt die Menge  $E_{j+1} \cdot Q$  durch Tilgung ihrer Durchschnitte mit den Hyperebenen  $E_1, \dots, E_j$  in endlichviele, in  $E_{j+1}$  offene Quader  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ . Durch den Mittelpunkt  $m_\sigma$  von  $Q_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, s$ ) ziehen wir die Senkrechte zu  $E_{j+1}$  und wählen auf ihr zwei durch  $m_\sigma$  getrennte Punkte  $m'_\sigma$  und  $m''_\sigma$ , die von  $m_\sigma$  einen Abstand  $\leq \eta$  haben. Das Innere der durch  $Q_\sigma$  und die beiden Punkte  $m'_\sigma$  und  $m''_\sigma$  aufgespannten konvexen Menge wollen wir mit  $O_\sigma$  bezeichnen; diese Menge  $O_\sigma$  ist in  $Q_\infty$  offen und konvex; sie zerfällt durch Tilgung von  $Q_\sigma$  in zwei fremde offene, konvexe Mengen  $O'_\sigma$  und  $O''_\sigma$ , deren Punkte von  $Q_\sigma$  Abstände  $\leq \eta$  haben. Wählen wir die Punkte  $m'_\sigma$  und  $m''_\sigma$  hinreichend nahe bei  $m_\sigma$ , so sind die Mengen  $O_\sigma$  nicht nur paarweise, sondern auch zu den Hyperebenen  $E_1, \dots, E_j$  fremd. Für jeden Punkt  $p$  von  $H$ , für welchen  $f_j(p)$  nicht in  $O_1 + \dots + O_s$  liegt, setzen wir  $f_{j+1}(p) = f_j(p)$ . Für die übrigen Punkte  $H$  geschieht die Definition von  $f_{j+1}$  in zwei Schritten. Beim ersten wird  $f_{j+1}$  für diejenigen Punkte  $p$  definiert, für welche  $f_{j+1}(p)$  in  $Q_\sigma$ , beim zweiten für diejenigen, für welche  $f_{j+1}(p)$  in  $O'_\sigma + O''_\sigma$  liegen soll.

Erster Schritt. Da nach Voraussetzung unseres Satzes die Menge  $Q \cdot R$  höchstens rational  $n$ -dimensional und die Abbildung  $f_j$  topologisch ist, so folgt aus  $(1_j)$ , daß  $Q \cdot f_j(R)$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist. Also liegt jeder Punkt der Menge  $Q_\sigma$  in einer beliebig kleinen, insbesondere also in einer samt Begrenzung in  $O_\sigma \cdot S(Q_\sigma; \eta)$  enthaltenen Umgebung,

deren Begrenzung mit  $Q \cdot f_j(R)$  einen höchstens rational  $(n-1)$ -dimensionalen Durchschnitt hat. Da  $Q_\sigma$  ein offener Teilquader von  $E_{j+1}$ , also Summe von abzählbarvielen kompakten Mengen  $K_i$  ist, für welche  $\text{Lim } K_i = \bar{Q}_\sigma - Q_\sigma$  ist, so folgt durch Anwendung des Borelschen Satzes auf die Mengen  $K_i$  die Existenz einer Folge von Umgebungen  $U_i' \subseteq O_\sigma \cdot S(\bar{Q}_\sigma; \eta)^{13)}$ , die fast alle in jeder Umgebung von  $\bar{Q}_\sigma - Q_\sigma$  liegen und deren Begrenzungen mit  $Q \cdot f_j(R)$  einen höchstens rational  $(n-1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben. Die Summe  $U_\sigma$  dieser Umgebungen  $U_i'$  ist eine Umgebung  $\subset O_\sigma \cdot S(\bar{Q}_\sigma; \eta)$  von  $Q_\sigma$ , deren Begrenzung  $B_\sigma \subset \sum_i B(U_i') + (\bar{Q}_\sigma - Q_\sigma)$ , also  $\subset O_\sigma + (\bar{Q}_\sigma - Q_\sigma)$  ist, die Menge  $\bar{Q}_\sigma - Q_\sigma$  enthält und deren Durchschnitt mit  $O_\sigma \cdot f_j(R)$  höchstens rational  $(n-1)$ -dimensional ist. Wir bezeichnen nun mit  $R_\sigma$  bzw.  $H_\sigma$  die Urbildmenge von  $B_\sigma \cdot f_j(R)$  bzw.  $B_\sigma \cdot f_j(H)$  bezüglich der Abbildung  $f_j$ . Für die Menge  $H_\sigma$  wollen wir, das ist das Ziel des vorliegenden ersten Schrittes, die Abbildung  $f_{j+1}$  so definieren, daß  $f_{j+1}(H_\sigma) \subset \bar{Q}_\sigma$  ist. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit  $\psi$  die eindeutige Abbildung von  $H_\sigma$ , die entsteht, wenn man für  $p \in H_\sigma$  den Punkt  $f_j(p)$  auf  $\bar{Q}_\sigma$  projiziert und den Projektionspunkt mit  $\psi(p)$  bezeichnet. Da jeder Punkt aus  $\bar{O}_\sigma$  von  $\bar{Q}_\sigma$  einen Abstand  $\leq \eta$  hat und  $f_j(p) \in \bar{O}_\sigma$  gilt für  $p \in H_\sigma$ , so haben für jeden Punkt  $p$  aus  $H_\sigma$  die Punkte  $f_j(p)$  und  $\psi(p)$  einen Abstand  $\leq \eta$ ; für jeden Punkt  $p$  der Menge  $L_\sigma$ , bestehend aus allen Punkten  $p$  mit  $f_j(p) \in \bar{Q}_\sigma - Q_\sigma$ , ist  $f_j(p) = \psi(p)$ .

Nun können wir den Hilfssatz 3 auf den in  $E_{j+1}$  offenen Quader  $Q_\sigma$  und die Mengen  $H_\sigma$  und  $L_\sigma$  anwenden; denn ist  $K$  eine kompakte Menge  $\subset Q_\sigma$  und  $g(K)$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $K$  in  $E_{j+1}$ , so läßt sich  $g$  folgendermaßen durch eine Modifikation  $\leq \vartheta$  in eine topologische Abbildung verwandeln: die Menge  $E_{j+1}$  ist nach Definition die Menge aller Punkte des  $Q_\sigma$ , für welche die  $i_1$ -te Koordinate eine feste (rationale) Zahl

ist; wir wählen ein  $i_0 > i_1$  so groß, daß  $\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \vartheta^2$  ist; sei nun  $p$  ein

Punkt von  $K$  mit den Koordinaten  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ); sein Bildpunkt  $g(p)$  habe die Koordinaten  $x_k''$ ; dann bezeichnen wir mit  $h(p)$  den Punkt mit den Koordinaten  $x_i = x_i''$  für  $i = 1, 2, \dots, i_0$  und  $x_{i_0+k} = \frac{k}{i_0+k} x_k''$  für  $k = 1, 2, \dots$ ; dann ist  $h$  eine topologische Abbildung von  $K$  in  $E_{j+1}$  und  $\delta(g(p), h(p)) \leq \vartheta$  für jeden Punkt  $p$  von  $K$ .

Der Hilfssatz 3 liefert nun, da  $\psi$  auf  $L_\sigma$  mit  $f_j$  identisch, also auf  $L_\sigma$  topologisch ist, eine aus  $\psi$  durch eine Modifikation  $\leq \eta$  hervorgehende

<sup>13)</sup>  $A \subset B$  heißt  $\bar{A} \subset B$ .

topologische Abbildung  $\chi(H_\sigma)$  mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt  $p$  der Menge  $L_\sigma$  gilt  $\psi(p) = \chi(p)$ , und  $\chi(H_\sigma - L_\sigma) \subset Q_\sigma$  ist. Da  $\chi$  eine topologische Abbildung ist, also  $\chi f_j^{-1}$  die Menge  $O_\sigma \cdot f_j(H_\sigma)$  bzw.  $O_\sigma \cdot f_j(R_\sigma)$  topologisch auf  $Q_\sigma \cdot \chi(H_\sigma)$  bzw.  $Q_\sigma \cdot \chi(R_\sigma)$  abbildet, so ist  $Q_\sigma \cdot \chi(R_\sigma)$  höchstens rational  $(n-1)$ -dimensional. Wir wenden nun den nach Induktionsvoraussetzung für  $n-1$  richtigen Satz an, und zwar statt auf  $Q, R, H$  und  $V^n$  auf  $Q_\sigma, \chi(R_\sigma), \chi(H_\sigma)$  und die Menge  $E_{j+1} \cdot V^n$ , die alle Punkte von  $E_{j+1}$  enthält, die (außer der allen Punkten von  $E_{j+1}$  gemeinsamen festen rationalen Koordinate) entweder höchstens  $n-2$  rationale Koordinaten oder nur rationale Koordinaten besitzen, die aber dann fast alle verschwinden. Er liefert eine topologische Abbildung  $\varphi$  von  $H_\sigma$ , so daß die topologische Abbildung  $f_{j+1} = \varphi \chi$  von  $H_\sigma$  folgende Eigenschaften besitzt: für jeden Punkt  $p$  von  $L_\sigma$  ist  $f_{j+1}(p) = \chi(p)$  und jeder Punkt  $p$  von  $H_\sigma - L_\sigma$  wird auf einen Punkt  $f_{j+1}(p)$  von  $Q_\sigma \cdot V^n$  mit einem Abstand  $\leq \eta$  von  $\chi(p)$  abgebildet. Da für  $p \in L_\sigma$  gilt  $\chi(p) = \psi(p)$  und  $\psi(p) = f_j(p)$ , so ist  $f_j(p) = f_{j+1}(p)$  für  $p \in L_\sigma$ , und da  $\psi$  aus  $f_j$  und  $\chi$  aus  $\psi$  durch eine Modifikation  $\leq \eta$  hervorging, ist  $\delta(f_j(p), f_{j+1}(p)) \leq 3\eta$  für jeden Punkt  $p$  aus  $H_\sigma$ . Damit ist der erste Schritt beendet.

Wir haben bisher folgendes erreicht: die topologische Abbildung  $f_{j+1}$  ist bereits definiert für jeden Punkt  $p$  von  $H$ , für welchen

- $f_j(p) \in Q_\sigma - (O_1 + \dots + O_s)$  ist, und zwar ist dann  $f_{j+1}(p) = f_j(p)$ ,
- $f_j(p) \in B_\sigma$  ist, und zwar ist dann  $f_{j+1}(p)$  ein Punkt aus  $Q_\sigma \cdot V^n$ , der von  $f_j(p)$  einen Abstand  $\leq 3\eta$  hat.

Zweiter Schritt. Für jeden Punkt  $p$ , der nicht unter a) oder b) vorkommt, für welchen also  $f_{j+1}(p)$  noch nicht definiert ist, liegt  $f_j(p)$  in einer der offenen Mengen  $W_\sigma = O_\sigma - B_\sigma \cdot O_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, s$ ). Nun zerfällt die offene, konvexe Menge  $O_\sigma$  durch Tilgung ihres Durchschnittes  $Q_\sigma$  mit der Hyperebene  $E_{j+1}$  in zwei ebenfalls offene und konvexe Teilmengen  $O'_\sigma$  und  $O''_\sigma$ , deren Begrenzungen, vermindert um ihren Durchschnitt  $\bar{Q}_\sigma$  mit  $E_{j+1}$ , wir mit  $B'_\sigma$  und  $B''_\sigma$  bezeichnen. Die Menge  $B_\sigma$  war definiert als Begrenzung einer Umgebung  $U_\sigma \subset O_\sigma$  von  $Q_\sigma$ , und es gilt  $B_\sigma \subset O_\sigma + (\bar{Q}_\sigma - Q_\sigma)$ . Hieraus folgt, daß  $W_\sigma$  Summe der beiden fremden, offenen Mengen  $W'_\sigma = O'_\sigma - \bar{U}_\sigma \cdot O'_\sigma$  und  $W''_\sigma = O''_\sigma + U_\sigma$  ist, deren Begrenzungen  $= B'_\sigma + B_\sigma$  bzw.  $= B''_\sigma + B_\sigma$  sind. Die kompakte Menge aller Punkte  $p$ , deren Bild  $f_j(p)$  in  $\bar{W}'_\sigma$  bzw.  $\bar{W}''_\sigma$  bzw.  $B'_\sigma + B_\sigma$  bzw.  $B''_\sigma + B_\sigma$  liegt, nennen wir  $H'_\sigma$  bzw.  $H''_\sigma$  bzw.  $L'_\sigma$  bzw.  $L''_\sigma$ . Für die Punkte  $p$  von  $L'_\sigma$  und  $L''_\sigma$  ist  $f_{j+1}(p)$  bereits definiert, und zwar ist, wie aus a) und b) folgt,  $f_{j+1}(p) \in B'_\sigma + \bar{Q}_\sigma$  bzw.  $B''_\sigma + \bar{Q}_\sigma$ , d. h. in der Begrenzung der offenen und konvexen Menge  $O'_\sigma$  bzw.  $O''_\sigma$  enthalten und hat von  $f_j(p)$

einen Abstand  $\leq 3\eta$ . Also existiert nach Hilfssatz 1, angewandt  $Q'_\alpha, H'_\alpha, L'_\alpha$  bzw.  $Q''_\alpha, H''_\alpha, L''_\alpha$ ,  $f_j(p)$ ,  $f_{j+1}(p)$  und  $3\eta$  statt  $Q, H, L, \varphi, \psi$  und  $\eta$ , eine eindeutige, stetige Abbildung  $\psi'_\alpha(p)$  bzw.  $\psi''_\alpha(p)$  von  $H'_\alpha$  bzw.  $H''_\alpha$  auf eine Teilmenge von  $\bar{O}'_\alpha$  bzw.  $\bar{O}''_\alpha$ , derart, daß für jedes  $p$  aus  $L'_\alpha$  bzw.  $L''_\alpha$  gilt  $\psi'_\alpha(p) = f_{j+1}(p)$  bzw.  $\psi''_\alpha(p) = f_{j+1}(p)$ , und für jedes  $p$  aus  $H'_\alpha$  bzw.  $H''_\alpha$  die Punkte  $f_j(p)$  und  $\psi'_\alpha(p)$  bzw.  $\psi''_\alpha(p)$  einen Abstand  $\leq 3\eta$  haben. Nun gibt es nach Hilfssatz 3, dessen Anwendbarkeit genau wie oben zu beweisen ist, eine topologische Abbildung  $\chi'_\alpha$  bzw.  $\chi''_\alpha$  von  $H'_\alpha$  bzw.  $H''_\alpha$  auf eine Teilmenge von  $\bar{O}'_\alpha$  bzw.  $\bar{O}''_\alpha$ , bei welcher erstens für jeden Punkt  $p$  aus  $L'_\alpha$  bzw.  $L''_\alpha$  gilt  $\chi'_\alpha(p) = \psi'_\alpha(p)$  bzw.  $\chi''_\alpha(p) = \psi''_\alpha(p)$ , zweitens  $\chi'_\alpha(H'_\alpha - L'_\alpha) \subset Q'_\alpha$  bzw.  $\chi''_\alpha(H''_\alpha - L''_\alpha) \subset Q''_\alpha$  gilt, und drittens für jeden Punkt  $p$  die Bilder  $\psi'_\alpha(p)$  und  $\chi'_\alpha(p)$  bzw.  $\psi''_\alpha(p)$  und  $\chi''_\alpha(p)$  einen Abstand  $\leq \eta$  haben. Für jeden Punkt  $p$  aus  $L'_\alpha$  bzw.  $L''_\alpha$  haben wir also  $f_{j+1}(p) = \psi'_\alpha(p) = \chi'_\alpha(p)$  bzw.  $f_{j+1}(p) = \psi''_\alpha(p) = \chi''_\alpha(p)$ . Für jeden Punkt  $p$  aus  $H'_\alpha - L'_\alpha$  bzw.  $H''_\alpha - L''_\alpha$  haben die Punkte  $f_j(p)$  und  $\chi'_\alpha(p)$  bzw.  $\chi''_\alpha(p)$  einen Abstand  $\leq 3\eta + \eta = 4\eta$ . Nun kann aber kein Punkt  $p$  gleichzeitig in  $H'_\alpha - L'_\alpha$  und  $H''_\alpha - L''_\alpha$  liegen, da diese beiden Mengen per definitionem durch die eindeutige Abbildung  $f_j$  in die beiden fremden Mengen  $W'_\alpha$  und  $W''_\alpha$  abgebildet werden. Also können wir für jeden Punkt  $p$  aus  $H'_\alpha - L'_\alpha$  bzw.  $H''_\alpha - L''_\alpha$  setzen  $\chi'_\alpha(p) = f_{j+1}(p)$  bzw.  $\chi''_\alpha(p) = f_{j+1}(p)$  und erhalten damit eine eindeutige, also topologische Abbildung, so daß gilt

- c) für jeden nicht unter a) oder b) fallenden Punkt  $p$  von  $H$  ist  $f_{j+1}(p)$  ein Punkt von  $\sum_{\alpha=1}^j O_\alpha - Q_\alpha$ , der von  $f_j(p)$  einen Abstand  $\leq 4\eta$  hat.

Damit ist der zweite Schritt beendet.

Die so definierte topologische Abbildung  $f_{j+1}$  von  $H$  genügt den Bedingungen  $(5_{j+1})$  und  $(6_{j+1})$ :

$(5_{j+1})$  folgt daraus, daß nach a) für  $f_j(p) \subset Q_\alpha - (O_1 + \dots + O_j)$  gilt  $f_{j+1}(p) = f_j(p)$ , nach b) und c) aus  $f_j(p) \subset O_1 + \dots + O_j$  folgt  $f_{j+1}(p) \subset O_1 + \dots + O_j$  und die Mengen  $O_1, \dots, O_j$  nach ihrer Definition zu  $E_1 + \dots + E_j$  fremd sind.

$(6_{j+1})$  folgt unmittelbar aus a), b), c) und  $\eta < \frac{\varepsilon_j}{2^{j+5}}$ .

Wir bezeichnen mit  $\varepsilon_{j+1}$  eine so kleine Zahl  $> 0$ , daß erstens  $\varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j$ , zweitens  $(2_{j+1})$  mit  $i = j+1$  gilt, was wegen der Kompaktheit von  $H$  möglich ist, und drittens  $(4_{j+1})$  gilt, was möglich ist, da für jedes  $i = 1, 2, \dots, j+1$  die Menge aller Punkte  $p$  von  $H$  mit  $\delta(f_i(p), E_i) \geq \frac{1}{2^{j+1}}$  kompakt ist, also ihr  $f_{j+1}$ -Bild, das wegen  $(5_{j+1})$  zu  $E_i$  fremd ist, von  $E_i$  einen positiven Abstand hat.



Wir haben jetzt die Relationen  $(1_{j+1}) - (4_{j+1})$  zu beweisen, und zwar unter der Induktionsvoraussetzung, daß  $(1_j) - (5_j)$  und  $(6_{j+1})$  gelten.

$(1_{j+1})$  folgt daraus, daß  $(1_j)$  gilt, und nach a) aus  $f_j(p) \subset Q_\omega - (O_1 + \dots + O_s)$  folgt  $f_{j+1}(p) = f_j(p)$ , und nach b) und c) aus  $f_j(p) \subset O_1 + \dots + O_s$  folgt  $f_{j+1}(p) \subset O_1 + \dots + O_s$ .

$(2_{j+1})$  folgt für  $i = j+1$  aus der Definition von  $\varepsilon_{j+1}$ , für  $i = 0, 1, \dots, j$  aus  $\varepsilon_{j+1} \leq \varepsilon_j$ ,  $(2_j)$  und  $(6_{j+1})$ .

$(3_{j+1})$ . Es ist  $E_{j+1} \cdot Q = E_{j+1} \cdot Q \cdot (E_1 + \dots + E_j) + (Q_1 + \dots + Q_s)$ . Da der erste Summand  $\subset Q_\omega - (O_1 + \dots + O_s)$  ist, folgt aus a) und  $(3_j)$ , daß für einen Punkt  $p$ , dessen Bild  $f_j(p)$  im ersten Summanden liegt, das Bild  $f_{j+1}(p)$  in  $V^n$  enthalten ist. Liegt der Punkt  $f_j(p)$  im zweiten Summanden, also in  $O_1 + \dots + O_s$ , so entweder in einem  $B_\sigma$  oder nicht. Im ersten Falle ist dann wegen b)  $f_{j+1}(p) \subset V^n$ , im zweiten Falle wegen c)  $f_{j+1}(p) \subset \sum_{\sigma=1}^s O_\sigma - Q_\sigma$ , also, da  $Q_\sigma = E_{j+1} \cdot O_\sigma$  ist,  $f_{j+1}(p)$  nicht Punkt von  $E_{j+1}$ .

$(4_{j+1})$  folgt für  $i = j+1$  aus der Definition von  $\varepsilon_{i+1}$ .

Damit haben wir aus den Abbildungen  $f_j$  und den Zahlen  $\varepsilon_i$  ( $i \leq j$ ), die den Bedingungen  $(1_j) - (5_j)$  genügen, eine neue Abbildung  $f_{j+1}$  und eine Zahl  $\varepsilon_{j+1}$  hergeleitet, so daß  $(1_{j+1}) - (6_{j+1})$  gilt. Wir können also eine Folge von topologischen Abbildungen  $f_j$  (wobei  $f_0$  die identische ist) der Menge  $H$  in  $Q_\omega$  und eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen  $\varepsilon_j \leq \varepsilon$  als gegeben annehmen, derart, daß die Relationen  $(1_j) - (5_j)$  und  $(6_{j+1})$  für jedes  $j$  bestehen.

Wegen  $(6_{j+1})$  und  $\varepsilon_j \leq \varepsilon$  konvergieren die Abbildungen  $f_j$  gegen eine eindeutige, stetige Abbildung  $f(p)$  von  $H$  in  $Q_\omega$ , für welche jeder Punkt  $p$  von seinem Bilde einen Abstand  $< \varepsilon$  hat. Zu je zwei Punkten  $p, p'$  von  $H$  existiert ein  $i$ , so daß  $\delta(p, p') \geq \frac{1}{2^i}$  ist. Dann

haben nach  $(2_j)$  für jedes  $j \geq i$  die Bilder  $f_j(p)$  und  $f_j(p')$ , also auch die Bilder  $f(p)$  und  $f(p')$  einen Abstand  $\geq \varepsilon_i > 0$ ; die Abbildung  $f(p)$  ist also eineindeutig. Da  $H$  kompakt ist, so ist  $f(p)$  eine topologische Abbildung. Nach  $(1_j)$  stimmt  $f$  auf  $H - Q \cdot H$  mit der identischen Abbildung überein. Es sei nun  $p$  ein Punkt von  $Q \cdot R$ . Wir behaupten, daß  $f(p)$  in  $Q \cdot V^n$  liegt. Zunächst ist  $f_j(p)$  und  $f(p)$  Punkt von  $Q$ , da wir vorausgesetzt haben, daß  $H$  das Komplement von  $Q$  enthält, und  $f_j$  und  $f$  dieses Komplement identisch auf sich abbildet. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: entweder es gibt ein  $i$ , so daß  $f_i(p)$  auf  $E_i$  liegt, oder es gibt kein solches  $i$ . Im ersten Falle ist  $f_i(p)$  nach  $(3_i)$  ein Punkt von  $V^n$  und nach  $(5_j)$  ( $j = i+1, i+2, \dots$ ) ist  $f_i(p) = f_{i+1}(p) = \dots$ , also  $f(p)$  Punkt

von  $V^n$ . Im zweiten Fall gibt es zu jedem  $i$  ein  $j_i \geq i$ , so daß  $f_i(p)$  von  $E_i$  einen Abstand  $\geq \frac{1}{2^{j_i}}$  hat. Dann hat nach  $(4_{j_i})$ ,  $(6_{j_i+1})$  und  $\varepsilon_j \leq \varepsilon_{j_i}$  ( $j = j_i, j_i + 1, \dots$ ) der Punkt  $f_j(p)$  für jedes  $j \geq j_i$ , also auch der Punkt  $f(p)$  von  $E_i$  einen Abstand  $\geq \varepsilon_{j_i}$ , d. h.  $f(p)$  liegt nicht auf  $E_i$ . Da dies für jedes  $i$  gilt, liegt also  $f(p)$  auf keiner Hyperebene  $E_i$ . Da aber  $Q_\infty - (E_1 + \dots) \subset V^n$  gilt, ist  $f(p)$  Punkt von  $V^n$ . Die Abbildung  $f(p)$  besitzt also alle im Satz geforderten Eigenschaften. Damit ist auch der Universalmengensatz bewiesen.

### Beweis des Satzes von den Universalmenge n der cartesischen Räume.

Auf Grund des später zu beweisenden Kompaktifikationssatzes kann man sogar in jedem mindestens  $(2n+1)$ -dimensionalen cartesischen Raum  $E$  eine rational  $n$ -dimensionale Universalmenge  $U^n$  angeben. Es sei nämlich  $U^n$  die Menge aller Punkte von  $E$ , die entweder höchstens  $n-1$  oder nur rationale Koordinaten haben. Analog wie für die Menge  $V^n$  auf S. 358 zeigt man, daß  $U^n$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist. Wir behaupten:

*Die Menge  $U^n$  enthält zu jedem höchstens rational  $n$ -dimensionalen Raum  $R$  eine homöomorphe Teilmenge.*

Nennen wir einen  $R$  enthaltenden höchstens  $n$ -dimensionalen Raum eine ausgezeichnete höchstens  $n$ -dimensionale Hülle von  $R$ , wenn er sich so als Summe von  $n+1$  nulldimensionalen Mengen darstellen läßt, daß eine von ihnen mit  $R$  einen höchstens abzählbaren Durchschnitt hat, so ergibt der Kompaktifikationssatz, daß wir den in  $U^n$  einzubettenden höchstens rational  $n$ -dimensionalen Raum  $R$  als Teilmenge einer kompakten, ausgezeichneten höchstens  $n$ -dimensionalen Hülle  $K$  annehmen dürfen. Da  $K$  höchstens  $n$ -dimensional ist, enthält  $E$  eine zu  $K$  homöomorphe Teilmenge. Mithin genügt es, den folgenden Satz zu beweisen:

*Sei  $O$  eine offene Menge von  $E$ ; sei  $R$  eine Menge von  $E$ , deren Durchschnitt  $O \cdot R$  mit  $O$  höchstens rational  $n$ -dimensional ist, und  $H$  eine kompakte Menge  $\supset R$  von  $E$ , so daß  $O \cdot H$  eine ausgezeichnete höchstens  $n$ -dimensionale Hülle von  $O \cdot R$  ist. Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine topologische Abbildung von  $H$  auf eine Teilmenge von  $E$ , die jeden Punkt von  $H - O \cdot H$  auf sich selbst und jeden Punkt  $p$  aus  $O \cdot R$  auf einen Punkt von  $O \cdot U^n$  abbildet, der von  $p$  einen Abstand  $< \varepsilon$  hat.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz analog zum Beweis des Satzes auf S. 358 ff. bis auf einige Modifikationen. Die Umgebungen  $U_\alpha^1$  von S. 362 hat man folgendermaßen zu wählen: da  $f_j(O \cdot H)$  eine ausgezeichnete höchstens  $n$ -dimensionale Hülle von  $f_j(O \cdot R)$  ist, kann  $f_j(O \cdot H)$  als Summe von  $n+1$

nulldimensionalen Mengen  $N_0, N_1, \dots, N_n$  dargestellt werden, so daß  $N_0 \cdot f_j(O \cdot R)$  höchstens abzählbar ist. Dann wählt man die Umgebungen  $U_\sigma^i$  so, daß sie außer den auf S. 362 genannten Eigenschaften noch die weitere besitzen, daß ihre Begrenzungen  $B_\sigma^i$  zu  $N_n$  fremd sind. Dann ist  $B_\sigma^i \cdot f_j(O \cdot H)$  und daher auch  $B_\sigma \cdot f_j(O \cdot H)$  eine ausgezeichnete höchstens  $(n-1)$ -dimensionale Hülle der höchstens rational  $(n-1)$ -dimensionalen Menge  $B_\sigma^i \cdot f_j(O \cdot R)$  bzw.  $B_\sigma \cdot f_j(O \cdot R)$ . Daher ist  $O \cdot H_\sigma$  eine ausgezeichnete höchstens  $(n-1)$ -dimensionale Hülle der höchstens rational  $(n-1)$ -dimensionalen Menge  $O \cdot R_\sigma$ . Dies ermöglicht die Anwendung der Induktionsvoraussetzung.

Die erste Anwendung (S. 362) des Hilfssatzes 3 ist aus folgendem Grunde möglich: Jede kompakte Menge  $K \subset H_\sigma - L_\sigma$  ist in  $O \cdot H_\sigma$  enthalten, also höchstens  $(n-1)$ -dimensional. Daher kann jede stetige Abbildung von  $K$  in die mindestens  $2n$ -dimensionale Hyperebene  $E_{j+1}$  von  $E$  durch eine beliebig kleine Modifikation in eine topologische Abbildung von  $K$  in  $E_{j+1}$  übergeführt werden<sup>13a)</sup>. Die zweite Anwendung des Hilfssatzes 3 (S. 364) begründet man folgendermaßen: Jede kompakte Menge  $K \subset H'_\sigma - L'_\sigma$  bzw.  $\subset H''_\sigma - L''_\sigma$  ist als Teilmenge von  $O \cdot H$  höchstens  $n$ -dimensional; daher kann jede stetige Abbildung von  $K$  in den mindestens  $(2n+1)$ -dimensionalen cartesischen Raum  $E$  durch eine beliebig kleine Modifikation in eine topologische Abbildung von  $K$  in  $E$  übergeführt werden<sup>13a)</sup>.

Dem Beweise des  $\varepsilon$ -Deformationssatzes schicken wir einen Hilfssatz voraus.

**Hilfssatz.** Es sei  $f(M)$  eine eindeutige, stetige Abbildung der kompakten Menge  $M$  in eine  $n$ -dimensionale (abgeschlossene) Vollkugel  $V$ . Bedeutet  $I$  das Innere von  $V$ , so sei  $f^{-1}(I)$  höchstens rational  $n$ -dimensional ( $n \geq 1$ ). Dann existiert eine eindeutige, stetige Abbildung  $g$  von  $M$  in  $V$ , bei welcher das Zentrum von  $V$  höchstens abzählbar viele Urbildpunkte hat und für jeden Punkt  $q$  der Oberfläche  $V - I$  von  $V$  die Urbildmengen  $f^{-1}(q)$  und  $g^{-1}(q)$  identisch sind<sup>14)</sup>.

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  ist  $V$  ein Intervall und die Oberfläche  $V - I$  besteht aus den beiden Endpunkten  $q'$  und  $q''$  von  $V$ ; die beiden offenen Intervalle, in die  $V$  durch Tilgung der Endpunkte  $q'$  und  $q''$  und des Mittelpunktes  $m$  zerfällt, nennen wir  $Q'$  und  $Q''$ . Die beiden fremden, abgeschlossenen Teilmengen  $f^{-1}(q')$  und  $f^{-1}(q'')$  können durch eine höchstens abzählbare ab-

<sup>13a)</sup> Pontrjagin und Tolstowa, Math. Annalen 105, S. 734.

<sup>14)</sup> Ist  $f$  eine Abbildung der Menge  $A$  und  $B$  irgendeine zweite Menge [die nicht  $\subset f(A)$  zu sein braucht, sogar zu  $f(A)$  fremd sein darf], so bezeichnen wir mit  $f^{-1}(B)$  die Menge aller Punkte  $p$  von  $A$  mit  $f(p) \in B$ .

geschlossene Teilmenge  $A$  von  $M$  in  $M$  getrennt werden:  $M - A = B' + B''$ , wo  $B' \supset f^{-1}(q')$  und  $B'' \supset f^{-1}(q'')$  fremd und relativ abgeschlossen sind. Wir setzen  $A + B' = H'$ ,  $A + B'' = H''$ ,  $A + f^{-1}(q') = L'$ ,  $A + f^{-1}(q'') = L''$  und definieren die gesuchte Abbildung  $g$  zunächst auf  $L'$  und  $L''$  dadurch, daß wir jeden Punkt von  $A$  auf den Mittelpunkt  $m$  von  $V$  abbilden und für jeden Punkt  $p$  von  $f^{-1}(q')$  bzw.  $f^{-1}(q'')$  setzen  $g(p) = f(p) = q'$  bzw.  $g(p) = f(p) = q''$ . Wir wenden nun zweimal den Hilfssatz 2 an. und zwar auf  $Q', H', L'$  und  $g$ , bzw.  $Q'', H'', L''$  und  $g$  statt  $Q, H, L$  und  $\varphi$ . Er liefert uns zwei auf  $L'$  bzw.  $L''$  mit  $g$  identische Abbildungen  $g'$  und  $g''$  von  $H'$  bzw.  $H''$  mit der Eigenschaft, daß  $g'(H' - L') \subset Q'$  und  $g''(H'' - L'') \subset Q''$  gilt. Da  $H' \cdot H'' = L' \cdot L'' = A$  gilt und  $g'$  und  $g''$  auf  $L'$  bzw.  $L''$  mit  $g$  identisch sind, entsteht eine eindeutige und stetige Abbildung, wenn wir setzen  $g(p) = g'(p)$  für  $p \in H'$  und  $g(p) = g''(p)$  für  $p \in H''$ . Man bestätigt sofort, daß diese Abbildung  $g(p)$  die in unserem Hilfssatz für den Fall  $n = 1$  verlangten Eigenschaften hat.

Der Hilfssatz sei nun für  $n - 1$  bewiesen, und es seien die Voraussetzungen des Hilfssatzes für den Fall  $n$  erfüllt. Dann sei  $E$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Hyperebene durch den Mittelpunkt  $m$  von  $V$ , und  $Q$  der Durchschnitt  $I \cdot E$ . Jeder Punkt der Menge  $f^{-1}(Q)$  liegt in einer Umgebung, deren abgeschlossene Hülle zu  $f^{-1}(V - I)$  fremd ist und deren Begrenzung mit  $M$  einen höchstens rational  $(n - 1)$ -dimensionalen Durchschnitt hat. Durch Addition von abzählbarvielen solchen Umgebungen läßt sich eine Umgebung  $U$  von  $f^{-1}(Q)$  konstruieren, für deren Begrenzung  $B$  erstens die Beziehung  $M \cdot B \subset f^{-1}(I) + f^{-1}(\bar{Q} - Q)$  gilt und zweitens  $B \cdot f^{-1}(I)$  höchstens rational  $(n - 1)$ -dimensional ist. Wir betrachten nun die kompakte Menge  $M \cdot B$  und die eindeutige, stetige Abbildung  $\psi(M \cdot B)$ , die entsteht, wenn wir den Punkt  $f(p)$  auf  $\bar{Q}$  projizieren. Diese Abbildung erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes für  $n - 1$ , wenn man darin  $M \cdot B$ ,  $\bar{Q}$  und  $\psi$  statt  $M$ ,  $V$  und  $f$  liest. Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine eindeutige, stetige Abbildung  $g$  von  $B \cdot M$  in  $\bar{Q}$ , bei welcher das Zentrum  $m$  höchstens abzählbarviele Urbilder hat und für jeden Punkt  $p$  von  $B \cdot M$ , für welchen  $\psi(p)$  in  $\bar{Q} - Q$  liegt, die Gleichung  $g(p) = \psi(p)$ , also die Gleichung  $g(p) = f(p)$  besteht.

Nachdem wir hiermit die Abbildung  $g$  bereits für  $M \cdot B$  definiert haben, setzen wir weiter  $g(p) = f(p)$  für jeden Punkt von  $M$ , für welchen  $f(p)$  Punkt des Randes  $V - I$  von  $V$  ist. Es handelt sich jetzt also nur noch darum, jedem Punkt von  $M$ , für welchen  $g(p)$  noch nicht definiert ist, einen Punkt  $g(p)$  von  $I$  zuzuordnen, welcher von  $m$  verschieden ist. Hierzu bedenken wir zunächst, daß die offene Kugel  $I$  durch Tilgung von  $Q$  in zwei fremde offene Halbkugeln  $I'$  und  $I''$  zerfällt, deren Begrenzungen, vermindert um ihre Durchschnitte mit  $\bar{Q}$ , wir

mit  $B'$  und  $B''$  bezeichnen. Nun ist die Menge  $U$  eine Umgebung der Menge  $f^{-1}(Q)$ . Also zerfällt  $M = f^{-1}(\bar{I}') + f^{-1}(\bar{I}'')$  in die beiden kompakten Mengen  $H' = f^{-1}(\bar{I}') - M \cdot U$  und  $H'' = f^{-1}(\bar{I}'') + M \cdot \bar{U}$ , deren Durchschnitt  $\subset M \cdot B$  ist. Bezeichnen wir also mit  $L'$  bzw.  $L''$  die Menge aller Punkte von  $H'$  bzw.  $H''$ , für welche  $g(p)$  bereits definiert ist, so bestehen wegen  $g(M \cdot B) \subset \bar{Q}$  die Beziehungen  $g(L') \subset B' + \bar{Q}$  und  $g(L'') \subset B'' + \bar{Q}$ . Wenden wir den Hilfssatz 2 auf  $g, H', L'$  und  $I'$  bzw.  $g, H'', L''$  und  $I''$  statt  $\psi, H, L$  und  $Q$  an, so ergibt dieser zwei Abbildungen  $g'$  und  $g''$  von  $H'$  bzw.  $H''$ , welche auf  $L'$  und  $L''$  mit  $g(p)$  identisch sind und die Mengen  $H' - L'$  bzw.  $H'' - L''$  in  $I'$  bzw.  $I''$  abbilden. Setzen wir also  $g(p) = g'(p)$  und  $g(p) = g''(p)$  für jeden Punkt aus  $H'$  bzw.  $H''$ , so entsteht eine eindeutige und stetige Abbildung  $g$  von ganz  $M$  in  $V$ , welche die in unserem Hilfssatz verlangten Eigenschaften hat. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir beginnen jetzt den

### Beweis des $\epsilon$ -Deformationssatzes.

Es sei also  $M$  eine kompakte, höchstens rational  $n$ -dimensionale Menge. Da  $M$  höchstens  $n$ -dimensional ist, existiert eine  $\frac{\epsilon}{2}$ -Deformation  $f_0$  von  $M$  in einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K^0$ . Diesen Komplex  $K$  denken wir uns irgendwie simplizial zerlegt. Indem wir nötigenfalls endliche  $n$ -dimensionale Simplexe zu  $K$  hinzufügen, dürfen wir sofort annehmen, daß jeder Punkt von  $K$  in einem  $n$ -dimensionalen Simplex der Zerlegung enthalten ist. Dann aber existiert eine in  $K$  dichte Folge von Punkten  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), von denen jeder im Innern eines  $n$ -dimensionalen Simplexes von  $K$  liegt. Wir machen nun die (für  $j = 1$  durch die Abbildung  $f_0$  verifizierte) Induktionsvoraussetzung, daß bereits eine eindeutige, stetige Abbildung  $f_{j-1}$  von  $M$  in  $K$  vorliegt. Wir schlagen um den Punkt  $p_j$  in dem ihn im Innern enthaltenden Simplex von  $K$  eine  $n$ -dimensionale Kugel  $V_j$ , deren Durchmesser kleiner als  $\frac{\epsilon}{2^j}$  und kleiner als das  $\frac{1}{2^{j+1}}$ -fache des Abstandes der Kugel  $V_j$  von der Summe der Punkte  $p_1, p_2, \dots, p_{j-1}$  ist. Der Hilfssatz ergibt nun eine auf  $f_{j-1}(K - V_j)$  mit  $f_{j-1}$  identische Abbildung  $f_j$  von  $M$  in  $K$  derart, daß 1.  $f_j^{-1}(p_j)$  höchstens abzählbar ist; 2.  $\delta(f_{j-1}(p), f_j(p)) < \frac{\epsilon}{2^{j-1}}$  ist für jeden Punkt  $p$  aus  $M$ , und 3.  $\delta(f_j(p), p_i) \geq \left(1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right) \cdot \delta(f_{j-1}(p), p_i)$  für jedes  $i < j$  und jedes  $p$  aus  $M$ . (2. und 3. folgen aus der Wahl des Durchmessers von  $V_j$  und daraus, daß aus  $f_{j-1}(p) \in V_j$  folgt  $f_j(p) \in V_j$  und

aus  $f_{j-1}(p) \notin V_j$  folgt  $f_j(p) = f_{j-1}(p)$ . Nun folgt aus 2., daß die Abbildungen  $f_j$  gegen eine eindeutige, stetige Abbildung  $f(p)$  von  $M$  in  $K$  konvergieren, für welche  $\delta(f_0(p), f(p)) < \varepsilon$  ist, so daß also  $f$  eine  $\varepsilon$ -Deformation von  $M$  in  $K$  ist. Sei nun  $p$  ein Punkt von  $M$ , für welchen  $f_i(p) \neq p_i$  ist. Dann folgt aus 3. ( $j = i+1, i+2, \dots$ ), daß auch  $f(p)$  von  $p_i$  verschieden ist. Es ist also  $f^{-1}(p_i) = f_i^{-1}(p_i)$ , also  $f^{-1}(p_i)$  nach 1. höchstens abzählbar. Damit ist eine  $\varepsilon$ -Deformation konstruiert, die die im  $\varepsilon$ -Deformationssatz verlangten Eigenschaften hat.

Sei nun umgekehrt  $M$  eine kompakte Menge eines euklidischen Raumes, die für jedes  $\varepsilon > 0$  in einen  $n$ -dimensionalen Komplex  $K$  so  $\varepsilon$ -deformiert werden kann, daß die Menge aller Punkte von  $K$  mit höchstens abzählbarvielen Urbildern in  $K$  dicht ist. Diese in  $K$  dichte Menge enthält eine in  $K$  dichte, abzählbare Teilmenge  $N$ . Da jede  $n$ -dimensionale Teilmenge von  $K$  eine in  $K$  offene Menge enthält<sup>15</sup>), ist  $K - N$   $(n-1)$ -dimensional, also Summe von endlichvielen, in  $K - N$  abgeschlossenen Teilmengen  $N_1, N_2, \dots, N_s$  mit Durchmessern  $< \varepsilon$ , die zu je  $n+1$  einen leeren Durchschnitt haben. Da  $N_i$  in  $K - N$  abgeschlossen ist, gilt  $\bar{N}_i \subset N_i + N$ . Also ist die in  $K$  offene Menge  $K - \sum_{i=1}^s \bar{N}_i$  als Teilmenge von  $N$  höchstens abzählbar und daher, weil  $K$  ein Komplex ist, eine endliche Menge, deren Punkte  $\bar{N}_{s+1}, \dots, \bar{N}_t$  in  $K$  isoliert sind. Der Komplex  $K$  ist also Summe der endlichvielen abgeschlossenen Teilmengen  $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_t$ , deren Durchmesser  $< \varepsilon$  sind und deren Durchschnitte zu je  $n+1$  in  $N$  enthalten sind. Bezeichnen wir nun mit  $M_i$  die Urbildmenge von  $\bar{N}_i$ , so ist  $M = \sum_{i=1}^t M_i$ , die Mengen  $M_i$  sind abgeschlossen, haben Durchmesser  $< 3\varepsilon$  und ihre Durchschnitte zu je  $n+1$  sind Teilmengen der Urbildmenge von  $N$ , also höchstens abzählbar. Da für jedes  $\varepsilon > 0$  eine solche Zerlegung von  $M$  existiert, ist also  $M$  nach dem Zerlegungssatz höchstens rational  $(n-1)$ -dimensional.

### Der Beweis<sup>16</sup>) des Kompaktifikationssatzes,

den wir jetzt beginnen, geht so vor sich, daß wir die gegebene höchstens rational  $n$ -dimensionale Menge  $M$  als einen metrischen, total beschränkten Raum annehmen<sup>17</sup>) und durch sukzessive, unendlich oftmalige Ummetrier-

<sup>15</sup>) Menger, Dimensionstheorie, S. 258.

<sup>16</sup>) Dieser Beweis ist eine Modifikation des zweiten unter <sup>10</sup>) zitierten Beweises von Hurewicz.

<sup>17</sup>) Dies ist keine Einschränkung, da jeder separable Raum mit einer Teilmenge des  $Q_\omega$  homöomorph ist, also so metrisiert werden kann, daß sie total beschränkt ist, d. h. daß sie für jedes  $\varepsilon > 0$  als Summe endlichvieler Teilmengen mit Durchmessern  $< \varepsilon$  dargestellt werden kann.



sierung in einen zu  $M$  homöomorphen Raum  $M'$  überführen, der durch Hinzufügung neuer „idealer“ Punkte zu einem kompakten Raum mit den verlangten Eigenschaften erweitert wird. Ist  $\mathfrak{S}$  ein System von endlichvielen, abgeschlossenen Teilmengen des gegebenen Raumes  $M$ , der metrisch und total beschränkt ist, so läßt sich nach Hurewicz<sup>19)</sup> in  $M$  eine zur gegebenen Metrik  $\delta'$  äquivalente Metrik  $\delta''$  finden, bezüglich deren  $M$  wiederum total beschränkt ist und so daß jedes Teilsystem  $M_1, M_2, \dots, M_k$  von  $\mathfrak{S}$  mit leerem Durchschnitt  $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_k$   $\delta''$ -getrennt ist, d. h. daß in  $M$  keine (bezüglich  $\delta''$ ) Cauchysche Folge existiert, die mit jeder Menge  $M_1, M_2, \dots, M_k$  unendlichviele Punkte gemein hat. Diese Metrik  $\delta''$  kann man überdies bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  noch so wählen, daß für je zwei Punkte  $p$  und  $q$  von  $M$  gilt  $\delta'(p, q) \leq \delta''(p, q) \leq \delta'(p, q) + \varepsilon$ .

Wir beginnen nun unseren Beweis. Gegeben sei also ein höchstens rational  $n$ -dimensionaler Raum  $M$ ; er sei metrisch, und bezüglich seiner Metrik, sie heiße  $\delta_0$ , total beschränkt. Nach dem Zerspaltungssatz ist  $M$  Summe einer höchstens abzählbaren Menge  $A$  und einer höchstens  $(n-1)$ -dimensionalen Menge  $T$ . Dabei können wir annehmen, daß  $A$  keine in  $M$  offene Teilmenge enthält; denn andernfalls sei  $O$  der in  $M$  offene Kern von  $A$  und  $O_k$  die Menge aller Punkte von  $O$ , die von  $M-O$  einen Abstand  $\geq \frac{1}{k}$  haben; dann ist  $O = \sum_{k=1}^{\infty} O_k$  und die Mengen  $T$  und  $O_k$  sind in ihrer Summe abgeschlossen, also, da  $T$  höchstens  $(n-1)$ -dimensional und  $O_k$  höchstens abzählbar,  $O+T$  höchstens  $(n-1)$ -dimensional; dann ist  $M = (A-O) + (O+T)$ , wo  $A-O$  keine in  $M$  offene Teilmenge enthält; wir können also in der Tat von vornherein annehmen, daß  $A$  keine in  $M$  offene Teilmenge enthält.

Es seien  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$  positive Zahlen mit endlicher  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ . Mit  $\mathfrak{I}_1$  bezeichnen wir das aus der Menge  $T$  bestehende System. Wir machen nun die folgende Induktionsvoraussetzung: es liege für jede der Zahlen  $k = 0, 1, \dots, j-1$  erstens eine Metrik  $\delta_k$  von  $M$  vor, bezüglich deren  $M$  total beschränkt ist und so daß für je zwei Punkte  $p$  und  $q$  von  $M$  gilt

$$(1) \quad \delta_k(p, q) \leq \delta_{k+1}(p, q) \leq \delta_k(p, q) + \varepsilon_{k+1};$$

zweitens ein System von endlichvielen in  $T$  abgeschlossenen Mengen  $T_{i_1 \dots i_k}$  mit der Summe  $T$ , die zu je  $r$  einen höchstens  $(n-r)$ -dimensionalen Durchschnitt haben; für  $k=0$  ist dabei  $T_{i_1 \dots i_k} = T$  zu setzen.

Da  $M$  bezüglich der Metrik  $\delta_{j-1}$  total beschränkt ist, kann man  $T$  in eine Summe von endlichvielen, in  $T$  abgeschlossenen Mengen  $T_{i_1 \dots i_{j-1}}$  mit  $\delta_{j-1}$ -Durchmessern  $< \varepsilon_j$  zerlegen<sup>19)</sup>, die zu je  $r$  einen höchstens  $(n-r)$ -

<sup>19)</sup> Hurewicz, Ann. of Math. 31, S. 177.



dimensionalen Durchschnitt haben<sup>19)</sup> und so daß für jedes  $(j-1)$ -Tupel  $i_1 \dots i_{j-1}$  ( $j \geq 1$ ) gilt

$$T_{i_1 \dots i_{j-1}} = \sum_{i_j} T_{i_1 \dots i_{j-1} i_j}.$$

Um eine neue Metrik  $\delta_j$  zu definieren, bezeichnen wir mit  $M_{i_1 \dots i_k}$  die in  $M$  abgeschlossene Hülle von  $T_{i_1 \dots i_k}$  (da  $T$  in  $M$  dicht ist, ist  $M_{i_1 \dots i_k} = M$  für  $k = 0$ ). Dann gilt für jedes  $(j-1)$ -Tupel  $i_1 \dots i_{j-1}$  ( $j \geq 1$ )

$$(2) \quad M_{i_1 \dots i_{j-1}} = \sum_{i_j} M_{i_1 \dots i_{j-1} i_j},$$

$$(3_j) \quad M_{i_1 \dots i_j} \text{ hat einen } \delta_{j-1}\text{-Durchmesser} < \varepsilon_j.$$

Da  $A + T = M$ , also  $M_{i_1 \dots i_k} \subset A + T_{i_1 \dots i_k}$  und  $A$  höchstens abzählbar ist, so ist der Durchschnitt von je  $n+1$  Mengen  $M_{i_1 \dots i_k}$  höchstens abzählbar<sup>19)</sup>. Also gilt:

(4) Für jedes  $k$  hat jedes  $(n+1)$ -Tupel  $L$  von Mengen  $M_{i_1 \dots i_k}$  einen höchstens abzählbaren Durchschnitt  $D_k^{L,19)}$ .

Wir bezeichnen nun mit  $\mathfrak{S}_j$  ein System von Mengen  $D_k^{L,j}$  und  $M_{i_1 \dots i_k}^{L,j}$  mit folgenden Eigenschaften:

(5\_j)  $D_{k_1}^{L,j}, D_{k_2}^{L,j}, \dots$  sind endlichviele abgeschlossene, paarweise fremde,  $D_k^L$  überdeckende Teilmengen von  $D_k^L$  mit  $\delta_{j-1}$ -Durchmessern  $< \varepsilon_j$ .

(6\_j)  $M_{i_1 \dots i_k}^{L,j}$  ist die abgeschlossene Menge aller Punkte von  $M_{i_1 \dots i_k}^{L,j}$ , die von  $D_k^L$  einen  $\delta_{j-1}$ -Abstand  $\geq \varepsilon_j$  haben.

Nun sei  $\delta_j$  eine Metrik von  $M$ , die der Bedingung (1) für  $k = j-1$  genügt, bezüglich deren  $M$  total beschränkt ist und so daß gilt:

(7\_j) je  $r$  ( $= 2, 3, \dots$ ) Mengen des Systems  $\mathfrak{S}_j$  mit leerem Durchschnitt sind  $\delta_j$ -getrennt.

Damit ist die induktive Definition der Systeme  $\mathfrak{I}_j$  und der Metriken  $\delta_j$  abgeschlossen. Sie hat uns gleichzeitig für jedes  $k$  das System  $\mathfrak{S}_k$  und die Mengen  $M_{i_1 \dots i_k}$  und für jedes  $(n+1)$ -Tupel  $L$  von ihnen den Durchschnitt  $D_k^L$  geliefert.

Die Metriken  $\delta_k$  konvergieren wegen (1) und der Endlichkeit der Summe  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$  gegen eine zur gegebenen Metrik  $\delta_0$  äquivalente Metrik  $\delta$ ,

<sup>19)</sup> Es werden zwei Mengen, die dieselben Punkte enthalten, aber verschieden bezeichnet sind (verschiedene Indizesysteme haben), als verschiedene Mengen gerechnet.

bezüglich deren der Raum  $M$  ebenfalls total beschränkt ist. Aus (3<sub>j</sub>), (5<sub>j</sub>), (6<sub>j</sub>) und (7<sub>j</sub>) folgen auf Grund von (1) die Beziehungen:

- (3)  $M_{i_1 \dots i_j}$  hat einen  $\delta$ -Durchmesser  $< \sum_{h=j}^{\infty} \varepsilon_h$ ,
- (5)  $D_{k1}^{Lj}, D_{k2}^{Lj}, \dots$  sind endlichviele abgeschlossene, paarweise fremde,  $D_k^L$  überdeckende Teilmengen von  $D_k^L$  mit  $\delta$ -Durchmessern  $< \sum_{h=j}^{\infty} \varepsilon_h$ ,
- (6)  $M_{i_1 \dots i_k}^{Lj}$  hat von  $D_k^L$  einen positiven  $\delta$ -Abstand und enthält die Menge aller Punkte von  $M_{i_1 \dots i_k}$ , die von  $D_k^L$  einen  $\delta$ -Abstand  $\geq \sum_{h=j}^{\infty} \varepsilon_h$  haben,
- (7) je  $r$  ( $= 2, 3, \dots$ ) Mengen des Systems  $\mathfrak{S}_j$  mit leerem Durchschnitt sind  $\delta$ -getrennt.

Nun sei  $K$  die Menge aller bezüglich der Metrik  $\delta$  Cauchyschen Punktfolgen aus  $M$ . Sind  $\{p_i\}$  und  $\{q_i\}$  zwei Elemente aus  $K$ , so ordnen wir ihnen die Zahl  $\lim_{i=\infty} \delta(p_i, q_i)$  als Abstand  $\delta$  zu. Auf diese Weise wird  $K$  zu einem metrischen Raum, der wegen der totalen Beschränktheit von  $M$  bezüglich der Metrik  $\delta$  kompakt ist. Identifizieren wir jeden Punkt von  $M$  mit dem Element  $\{p, p, \dots\}$  von  $K$ , so ist  $M$  einschließlich seiner Metrik  $\delta$  eine Teilmenge des Raumes  $K$ . Wir behaupten nun, daß der Raum  $K$  höchstens  $n$ -dimensional ist und so in eine Summe von  $n+1$  nulldimensionalen Mengen zerspalten werden kann, daß eine von ihnen mit  $M$  einen höchstens abzählbaren Durchschnitt hat. Damit wird offenbar der Kompaktifikationssatz bewiesen sein, da der Raum  $M$  in der Metrik  $\delta$  homöomorph ist zum Raum  $M$  in der Metrik  $\delta_0$ .

Für jede beliebige Teilmenge  $A$  von  $M$  wollen wir im folgenden mit  $\bar{A}$  stets die in  $K$  abgeschlossene Hülle von  $A$  bezeichnen. Da  $M$  in  $K$  offenbar dicht ist, und wegen (2) die Gleichung  $\Sigma M_{i_1 \dots i_k} = M$  für jedes  $k$  gilt, wo über alle  $k$ -Tupel  $i_1 \dots i_k$  summiert wird, so ist  $\Sigma \bar{M}_{i_1 \dots i_k} = K$ . Wir behaupten, daß, wenn  $D_k^L$  der Durchschnitt der  $n+1$  Mengen  $M_{i_1 \dots i_k}^h$  ( $h = 0, 1, \dots, n$ ) ist, der Durchschnitt der Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}^h$ , der offenbar  $\supset \bar{D}_k^L$  ist, mit der Menge  $\bar{D}_k^L$  identisch ist. Nehmen wir an, dies wäre falsch. Dann existiert ein nicht in  $\bar{D}_k^L$  gelegener Punkt  $p$  und eine gegen  $p$  konvergente Folge von Punkten  $p_i$  aus  $\Sigma_{h=0}^n \bar{M}_{i_1 \dots i_k}^h$ , die mit jeder der  $n+1$  Mengen  $M_{i_1 \dots i_k}^h$  unendlichviele Punkte gemein hat. Da  $\bar{D}_k^L$  kompakt ist, hat  $p$  von  $\bar{D}_k^L$  einen positiven

Abstand. Wählen wir  $j$  so groß, daß  $\sum_{\lambda=j}^{\infty} \varepsilon_{\lambda}$  kleiner als dieser Abstand ist, so folgt einerseits aus (6), daß fast alle Punkte  $p_i$  in  $\sum_{\lambda=0}^n M_{i_1^{\lambda} \dots i_k^{\lambda}}^{L_j}$  enthalten sind, und jede Menge  $M_{i_1^{\lambda} \dots i_k^{\lambda}}^{L_j}$  unendlichviele Punkte  $p_i$  enthält. Andererseits ist, da  $D_k^L$  der Durchschnitt der Mengen  $M_{i_1^{\lambda} \dots i_k^{\lambda}}^{L_j}$  ist,  $M_{i_1^{\lambda} \dots i_k^{\lambda}}^{L_j}$  nach (6) zu  $D_k^L$  fremd; also haben die Mengen  $M_{i_1^{\lambda} \dots i_k^{\lambda}}^{L_j}$  einen leeren Durchschnitt, sind also nach (7)  $\delta$ -getrennt. Dies ist ein Widerspruch, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Analog folgt aus der Annahme, daß zwei Mengen  $\bar{D}_{km}^{L_j}$  und  $\bar{D}_{km'}^{L_j}$  einen Punkt  $p$  gemein haben, auf Grund der aus (5) folgenden Fremdheit der Mengen  $D_{km}^{L_j}$  und  $D_{km'}^{L_j}$  und (7) ein Widerspruch. Ist also  $\varepsilon$  eine beliebige positive Zahl, so bilden für hinreichend großes  $j$  nach (5) die Mengen  $\bar{D}_{k1}^{L_j}, \bar{D}_{k2}^{L_j}, \dots$  eine Zerlegung von  $\bar{D}_k^L$  in endlichviele paarweise fremde, abgeschlossene Mengen  $< \varepsilon$ . Mithin ist  $\bar{D}_k^L$  nulldimensional.

Damit haben wir bewiesen: die Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  haben zu je  $n+1$  einen höchstens nulldimensionalen Durchschnitt. Also ist  $K$  höchstens  $n$ -dimensional.

Es sei nun  $K^j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) die Menge aller Punkte  $p$  von  $K$ , die für jedes hinreichend große  $k = k(p)$  in genau  $j$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  enthalten sind<sup>19)</sup>. Wir behaupten,  $K^j$  ist nulldimensional. Ist  $L_k$  ein  $j$ -Tupel  $\bar{M}_{i_1^1 \dots i_k^1}, \dots, \bar{M}_{i_1^j \dots i_k^j}$  von Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  mit  $k$  unteren Indizes, so bezeichnen wir mit  $F(L_k)$  die Menge aller Punkte von  $K$ , die in allen Mengen des  $j$ -Tupels  $L_k$ , aber in keiner weiteren Menge  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  liegen. Dann ist offenbar jeder Punkt von  $K^j$  für ein geeignetes  $k$  in einer der endlichvielen Mengen  $F(L_k)$  enthalten: also ist  $K^j$  Summe aller Mengen  $K^j \cdot F(L_k)$ . Weiter ist die Menge  $K^j \cdot F(L_k)$  in  $K^j$  abgeschlossen; denn ist  $p$  ein Häufungspunkt dieser Menge, der nicht in ihr enthalten ist, so liegt  $p$  als Häufungspunkt von  $F(L_k)$  sicher in allen Mengen des  $j$ -Tupels  $L_k$ ; ist nun  $p$  in  $K^j$  enthalten, so kann  $p$  nur in den im  $j$ -Tupel  $L_k$  vorkommenden Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  mit  $k$  Indizes enthalten sein, da er andernfalls wegen (2) für jedes  $k' > k$  in mindestens  $j+1$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_{k'}}$ , also nicht in  $K^j$  liegen würde. Da die Menge aller  $j$ -Tupel von Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) abzählbar ist, genügt also zum Beweis der Nulldimensionalität von  $K^j$  der Nachweis der Nulldimensionalität von  $K^j \cdot F(L_k)$ . Nun ist  $K^j \cdot F(L_k)$  für  $l > k$  in der Summe  $\sum_{\lambda} F(L_{i_l}^{\lambda})$ , wo über die endlichvielen  $j$ -Tupel  $L_{i_l}^{\lambda}, L_{i_l}^{\lambda'}, \dots$  von Mengen

$\bar{M}_{i_1 \dots i_l}$  summiert wird, enthalten; denn jeder Punkt  $p$  von  $K^j \cdot F(L_k)$  liegt als Punkt von  $F(L_k)$  für jedes  $l > k$  nach (2) in mindestens  $j$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_l}$ ; läge nun  $p$  für ein  $l_0 > k$  in mindestens  $j+1$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_{l_0}}$ , so läge er wegen (2) auch für jedes  $l \geq l_0$  in mindestens  $j+1$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_l}$ , also nicht in  $K^j$ . Die Menge  $K^j \cdot F(L_k)$  ist also in der Menge  $\sum F(L_i^h)$  enthalten. Da aber diese Mengen  $F(L_i^h)$  paarweise fremd sind, wie aus der Definition der Mengen  $F$  unmittelbar folgt, und bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  für hinreichend großes  $l$  als Teilmengen von Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_l}$  wegen (3) Durchmesser  $< \varepsilon$  haben, so kann also  $K^j \cdot F(L_k)$  für jedes  $\varepsilon$  in endlichviele paarweise fremde Summanden  $K^j \cdot F(L_k) \cdot F(L_i^h)$  zerlegt werden, die als Durchschnitte der beiden in  $K^j$  abgeschlossenen Mengen  $K^j \cdot F(L_k)$  und  $K^j \cdot F(L_i^h)$  in  $K^j \cdot F(L_k)$  abgeschlossen sind. Mithin ist  $K^j \cdot F(L_k)$  und daher  $K^j$  nulldimensional.

Betrachten wir nun die Menge  $K^{n+1} = K - \sum_{j=1}^n K^j$ . Ist  $p$  ein Punkt dieser Menge, und bezeichnen wir mit  $z_k$  die Anzahl aller ihn enthaltenden Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$  mit  $k$  Indizes, so folgt aus (2), daß  $z_k \leq z_{k+1}$  ist für jedes  $k$ . Also muß, da  $p$  in keiner der Mengen  $K^1, \dots, K^n$  liegt, für hinreichend großes  $k$  die Ungleichung  $z_k \geq n+1$  gelten, also  $p$  im Durchschnitt von  $n+1$  Mengen  $\bar{M}_{i_1 \dots i_k}$ , d. h. nach dem oben Bewiesenen in einer Menge  $\bar{D}_k^L$  enthalten sein. Es ist also  $K^{n+1} = \sum_{k,L} \bar{D}_k^L$  und also, da  $\bar{D}_k^L$  bereits als nulldimensional nachgewiesen wurde,  $K^{n+1}$  nulldimensional.

Der Raum  $K$  ist also die Summe der  $n+1$  nulldimensionalen Mengen  $K^1, K^2, \dots, K^{n+1}$ . Jede Menge  $\bar{D}_k^L$  ist die in  $K$  abgeschlossene Hülle der in  $M$  abgeschlossenen Menge  $D_k^L$ . Also ist  $\bar{D}_k^L \cdot M = D_k^L$  und daher  $K^{n+1} \cdot M = \sum_{k,L} D_k^L$ . Nun ist nach (4)  $D_k^L$  höchstens abzählbar. Also hat  $K^{n+1}$  mit  $M$  einen höchstens abzählbaren Durchschnitt. Damit ist der Kompaktifikationssatz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 21. 2. 1933.)

## Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbaren Räume.

Von

Karol Borsuk in Warschau.

Ein metrischer Raum  $M$  wird lokal zusammenziehbar genannt, wenn es für jede Umgebung  $U$  irgendeines Punktes  $p \in M$  eine Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $p$  gibt, die sich stetig in  $U$  auf einen einzigen Punkt zusammenziehen läßt<sup>1)</sup>.

Der Zweck dieser Note ist, folgenden Satz zu beweisen:

**Satz.** Für jeden metrischen, kompakten, endlichdimensionalen<sup>2)</sup> und lokal zusammenziehbaren Raum gibt es eine ganze Zahl  $m \geq 2$  derart, daß die Brouwer-Menger-Urysohnsche Dimension dieses Raumes mit seiner geometrischen Dimension modulo  $m$  (im Sinne von P. Alexandroff<sup>3)</sup>) übereinstimmt.

1. Es sei  $E$  eine Teilmenge des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R_n$ . Unter einem Simplex in  $E$  verstehen wir ein orientiertes Simplex<sup>4)</sup>, dessen Eckpunkte die Eckpunkte eines geometrischen<sup>5)</sup> in  $E$  enthaltenen Simplexes sind. Ist  $m$  eine ganze Zahl  $\geq 2$ , so verstehen wir unter einem  $k$ -dimensionalen Komplex in  $E \bmod m$  einen algebraischen<sup>6)</sup> homogen  $k$ -dimensionalen Komplex mit Simplexen in  $E$  und Koeffizienten, welche Restklassen  $\bmod m$  sind. Ist  $C$  ein  $k$ -dimensionaler Komplex in  $E \bmod m$ , so bezeichnet  $\bar{C}$  den Rand<sup>4)</sup> von  $C$ , und  $\bar{\bar{C}}$  die Vereinigungsmenge aller geometrischen Simplexe, welche den mit nicht verschwindenden Koeffizienten in  $C$  auftretenden Simplexen entsprechen.  $\bar{\bar{C}}$  ist somit ein in  $E$  liegendes Polyeder. — Ein  $k$ -dimensionaler Komplex in  $E \bmod m$  mit verschwindendem  $(\bmod m)$  Rande heißt ein  $k$ -dimensionaler Zyklus in  $E \bmod m$ . Zwei  $k$ -dimensionale

<sup>1)</sup> D. h. es gibt eine stetige Funktion  $\varphi(x, t)$  derart, daß  $\varphi(x, 0) = x$ ,  $\varphi(x, t) \in U$  und  $\varphi(x, 1) = \text{const}$  für jedes  $x \in U_0$  und  $0 \leq t \leq 1$  gilt.

<sup>2)</sup> Im Brouwer-Menger-Urysohnschen Sinne.

<sup>3)</sup> Siehe P. Alexandroff, Math. Annalen 106 (1932), S. 194.

<sup>4)</sup> Die Benennungen: „orientiertes Simplex“, „algebraischer Komplex“, „Rand eines algebraischen Komplexes“ usw. werden hier in dem in dem Buche von P. Alexandroff, „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ (Berlin, Springer, 1932), festgelegten Sinne gebraucht.

<sup>5)</sup> Das geometrische Simplex mit den Eckpunkten  $a_0, a_1, \dots, a_k \in R_n$  ist die kleinste konvexe Teilmenge von  $R_n$ , die alle Punkte  $a_0, a_1, \dots, a_k$  enthält.

Zyklen in  $E \bmod m$ ,  $Z_1$  und  $Z_2$ , werden in  $E$  homolog genannt (Bezeichnung:  $Z_1 \sim Z_2$  in  $E$ ), falls  $Z_1 - Z_2$  der Rand eines  $(k+1)$ -dimensionalen Komplexes in  $E \bmod m$  ist.

Es sei  $C$  ein  $k$ -dimensionaler Komplex in  $E \bmod m$  und  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  eines seiner Simplexe. Wir ordnen jeder Permutation  $i_0, i_1, \dots, i_k$  der Zahlen  $0, 1, \dots, k$  das Simplex  $\pm (b_{i_0}, b_{i_0 i_1}, \dots, b_{i_0 i_1 \dots i_k})$  zu, wobei  $b_{i_0 i_1 \dots i_k}$  den Schwerpunkt der Punkte  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  bezeichnet und das Zeichen „+“ im Falle der geraden und „-“ im Falle der ungeraden Permutation gewählt wird. Wenn wir im Komplex  $C$  jedes  $k$ -dimensionale Simplex  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  durch die auf alle Permutationen  $i_0, i_1, \dots, i_k$  erstreckte Summe  $\Sigma \pm (b_{i_0}, b_{i_0 i_1}, \dots, b_{i_0 i_1 \dots i_k})$  ersetzen, so erhalten wir einen  $k$ -dimensionalen Komplex in  $E \bmod m$ , welcher die *baryzentrische Unterteilung* von  $C$  heißt. Jeden Komplex, welcher aus  $C$  durch endliche Iterierung der Operation der Ersetzung eines Komplexes durch seine baryzentrische Unterteilung entsteht, nennen wir eine *Unterteilung* (schlechthin) von  $C$ . Es ist klar, daß jeder Komplex  $C$  in  $E$  beliebig feine Unterteilungen hat. Es ist ferner bekannt<sup>6)</sup>, daß jeder Zyklus  $Z$  in  $E \bmod m$  in  $\bar{Z}$ , also erst recht in  $E$ , mit jeder seiner Unterteilungen homolog ist.

2. Es sei nun  $A$  ein metrischer, kompakter und endlichdimensionaler<sup>7)</sup> Raum. Man kann annehmen<sup>7)</sup>, daß  $A$  eine Teilmenge des Raumes  $R_n$  ist. Die Alexandroffsche geometrische Dimension  $\Delta(A)$  von  $A$  (bzw. die geometrische Dimension modulo  $m$ ,  $\Delta_m(A)$ ) läßt sich dann definieren als die größte ganze Zahl  $k$ , welche folgende Bedingung erfüllt:

Bedingung  $\mathfrak{A}$  (bzw. Bedingung  $\mathfrak{A}_m$ ): Es existiere eine abgeschlossene Teilmenge  $B$  von  $A$  und eine Umgebung<sup>8)</sup>  $W$  von  $B$  derart, daß es für jede Umgebung  $U$  von  $A$  und jede Umgebung  $V$  von  $B$  einen  $k$ -dimensionalen Komplex  $C$  in  $U \bmod \mu$  gibt — wo  $\mu$  eine beliebige ganze Zahl  $\geq 2$ <sup>9)</sup> (bzw.  $\mu = m$ ) ist —, für welchen  $\bar{C} \subset V$  und  $\bar{C}$  nicht  $\sim 0$  in  $W$  gilt.

<sup>6)</sup> Siehe z. B. das zitierte Buch von P. Alexandroff, S. 29.

<sup>7)</sup> Nach dem bekannten Einbettungssatz von K. Menger und G. Nöbeling. Siehe z. B. K. Menger, „Dimensionstheorie“ (Leipzig und Berlin, Teubner, 1928), S. 296.

<sup>8)</sup> Die Menge  $U$  wird eine Umgebung von  $E \subset R_n$  genannt, wenn  $U \subset R_n$  gilt, und  $E$  im Innern von  $U$  enthalten ist, d. h. wenn die abgeschlossene Hülle von  $R_n - U$  mit  $E$  punktfremd ist.

<sup>9)</sup> In der Definition der „geometrischen Dimension“, welche sich in der in Fußnote <sup>3)</sup> zitierten Arbeit von P. Alexandroff befindet — und welche sich übrigens von der hier angegebenen formal unterscheidet —, sind zur Konkurrenz auch die Zyklen mod 0 zugelassen, was aber, wie l. c. S. 196 gezeigt ist, keine wesentliche Rolle spielt.

Nach der durch P. Alexandroff<sup>10)</sup> bewiesenen Äquivalenz der geometrischen und der Brouwer-Menger-Urysohn'schen Dimension ist die Bedingung  $\mathfrak{A}$  für  $k = \dim A$  erfüllt und für jedes  $k > \dim A$  nicht erfüllt. Infolgedessen gilt die Bedingung  $\mathfrak{A}_m$  für jedes  $k > \dim A$  und jedes  $m \geq 2$  ebenfalls nicht. Um unseren Satz zu beweisen, ist also nur zu zeigen, daß im Falle der lokalen Zusammenziehbarkeit von  $A$  für jedes der Bedingung  $\mathfrak{A}$  genügende  $k$  eine ganze Zahl  $m \geq 2$  existiert, derart, daß  $k$  auch die Bedingung  $\mathfrak{A}_m$  erfüllt.

3. Es sei  $k$  eine ganze Zahl, welche die Bedingung  $\mathfrak{A}$  bei der Einsetzung  $B = B_0$  und  $W = W_0$  erfüllt. Da  $A$  lokal zusammenziehbar ist, gibt es<sup>11)</sup> eine Umgebung  $G$  von  $A$  und eine  $G$  auf  $A$  retrahierende Funktion, d. h. eine stetige Funktion, welche  $G$  auf  $A$  abbildet und für jedes  $x \in A$  die Bedingung  $f(x) = x$  erfüllt. In  $G$  können wir eine in sich kompakte Umgebung  $G_0 \subset G$  von  $A$  finden von der Art, daß

$$(1) \quad \varrho(f(x), x) < \frac{1}{3} \varrho(B_0, R_n - W_0) \quad \text{für jedes } x \in G_0$$

gilt. Es gibt ferner eine Umgebung  $V_0$  von  $B_0$  so, daß

$$(2) \quad \varrho(x, B_0) < \frac{1}{3} \varrho(B_0, R_n - W_0) \quad \text{für jedes } x \in V_0$$

gilt. Auf Grund von  $\mathfrak{A}$  gibt es eine ganze Zahl  $\mu_0 \geq 2$  und einen  $k$ -dimensionalen Komplex  $C$  in  $G_0 \bmod \mu_0$  derart, daß

$$(3) \quad \bar{C} \subset V_0; \quad \dot{C} \text{ nicht } \sim 0 \text{ in } W_0$$

ist. Daraus und aus der Inklusion  $\bar{C} \subset \bar{C} \subset G_0$  folgt:

$$(4) \quad \bar{C} \subset G_0 \cdot V_0.$$

Wir setzen nun

$$(5) \quad B_1 = f(\bar{C}) \subset A.$$

Aus (4), (2) und (1) folgt, daß für jedes  $x \in f(\bar{C})$  die Ungleichung  $\varrho(x, B_0) < \frac{1}{3} \varrho(B_0, R_n - W_0)$  gilt und somit  $W_0$  eine Umgebung von  $B_1$  bildet.

Wir werden nun zeigen, daß die Zahl  $k$  die Bedingung  $\mathfrak{A}_m$  bei der Einsetzung  $B = B_1$ ,  $W = W_0$ ,  $m = \mu_0$  erfüllt, womit unser Satz bewiesen sein wird.

4. Es sei  $U$  eine beliebige Umgebung von  $A$ ,  $V$  eine beliebige Umgebung von  $B_1$ . Wir setzen:

$$(6) \quad \lambda = \varrho(A, R_n - U), \quad \lambda' = \varrho(B_1, R_n - V).$$

<sup>10)</sup> l. c. S. 195, Hauptsatz 2.

<sup>11)</sup> Siehe meine Note, Fund. Math. 19 (1932), S. 240.



Da  $W_0$  eine Umgebung von  $B_1$  bildet und die Funktion  $f$  stetig und  $G_0$  in sich kompakt ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  derart, daß

$$(7) \quad \varepsilon < \frac{1}{3} (B_1, R_n - W_0),$$

$$(8) \quad \text{aus } \varrho(x, y) < \varepsilon \text{ folgt } \varrho(f(x), f(y)) < \text{Min}(\lambda, \lambda')$$

für je zwei Punkte  $x$  und  $y$  aus  $G_0$ .

Es sei  $C'$  eine so feine Unterteilung von  $C$ , daß jedem Simplex von  $C'$  ein Durchmesser  $< \varepsilon$  zukommt. Nach bekannten Sätzen<sup>12)</sup> ist der Rand  $\dot{C}'$  von  $C'$  mit der entsprechenden Unterteilung des Randes von  $C$  identisch, wobei

$$(9) \quad \dot{C} \sim \dot{C}' \text{ in } \bar{C}$$

gilt. Aus (4) und (2) folgt ferner

$$(10) \quad \bar{C} \subset V_0 \subset W_0.$$

Da  $\bar{C}' = \bar{C} \subset G_0$  gilt, ist die Funktion  $f$  im Polyeder  $\bar{C}'$  definiert. Wir ordnen jedem Eckpunkte  $a$  von  $C'$  den Punkt  $f(a) \in A$  zu. Dadurch ist auch eine simpliziale Abbildung des Komplexes  $C'$  auf einen Komplex  $C'_f \bmod m$  definiert, wobei sämtliche Eckpunkte von  $C'_f$  in  $A$  liegen und nach (8) jedes Simplex von  $C'_f$  den Durchmesser  $< \text{Min}(\lambda, \lambda')$  hat. Daraus und aus (6) ergibt sich, daß  $C'_f$  ein Komplex in  $U$  ist. Es bleiben also, damit unser Beweis vollendet werde, nur folgende zwei Formeln zu beweisen:

$$(11) \quad \bar{C}'_f \subset V,$$

$$(12) \quad \dot{C}'_f \text{ nicht } \sim 0 \text{ in } W_0.$$

5. Auf Grund von (5) liegen sämtliche Eckpunkte von  $\dot{C}'_f$  in  $B_1$ , wobei nach (6) und (8) der Durchmesser jedes Simplexes von  $\dot{C}'_f$  kleiner als  $\varrho(B_1, R_n - V)$  ist. Die Formel (11) ist somit bewiesen.

Um nun (12) zu beweisen, braucht man nach (3), (9) und (10) nur folgendes zu zeigen:

$$(13) \quad \dot{C}'_f \sim \dot{C}' \text{ in } W_0.$$

Es sei  $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  ein Simplex von  $\dot{C}'$ . Nach (2) und (4) gibt es einen Punkt  $b \in B_0$  derart, daß  $\varrho(a_0, b) < \frac{1}{3} \varrho(B_0, R_n - W_0)$  ist. Daraus und aus (7) folgt:

$$(14) \quad \varrho(b, a_i) \leq \varrho(b, a_0) + \varrho(a_0, a_i) < \frac{2}{3} \varrho(B_0, R_n - W_0) \\ \text{für } i = 0, 1, \dots, k-1.$$

<sup>12)</sup> Siehe z. B. das zitierte Buch von P. Alexandroff, S. 29.

Mit Rücksicht auf (14), (4) und (1) ergibt sich:

$$(15) \quad \varrho(b, f(a_i)) \leq \varrho(b, a_i) + \varrho(a_i, f(a_i)) < \varrho(B_0, R_n - W_0) \\ \text{für } i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Infolge der Ungleichungen (14) und (15) befinden sich alle Punkte  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_{k-1})$  in einer offenen euklidischen Vollkugel  $Q(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  mit dem Mittelpunkt  $b$  und der Radiuslänge  $\varrho(B_0, R_n - W_0)$ . Da  $b \in B_0$  gilt, ist  $Q(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  eine Teilmenge von  $W_0$ .

Für jeden Eckpunkt  $a$  von  $\dot{C}'$  und für jedes  $0 \leq t \leq 1$  setzen wir nun  $f_t(a)$  gleich dem Punkte, der die Strecke  $[a, f(a)]$  im Verhältnisse  $t:1-t$  teilt. Die Funktionenschar  $\{f_t\}$  leistet dann eine stetige Überführung von  $\dot{C}'$  in  $\dot{C}'$ . Für ein beliebiges Simplex  $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  von  $\dot{C}'$  und für jedes  $0 \leq t \leq 1$  liegt dabei — der Konvexität von  $Q(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  halber — das Simplex  $(f_t(a_0), f_t(a_1), \dots, f_t(a_{k-1}))$  in  $Q(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$  und somit auch in  $W_0$ . Die Komplexe  $\dot{C}'$  und  $\dot{C}'_t$  sind somit in  $W_0$  homotop<sup>13)</sup>, also erst recht homolog<sup>14)</sup>. Somit ist (13) bewiesen und unser Beweis vollendet.

<sup>13)</sup> Was die Definition der Homotopie anbetrifft, siehe z. B. S. Lefschetz, „Topology“ (New York, 1930), S. 77.

<sup>14)</sup> l. c. S. 79.

(Eingegangen am 16. 6. 1933.)

# Über die Vollständigkeit der Relationen von Morse für die Anzahlen kritischer Punkte.

Von

Fritz John in Göttingen.

## Einleitung.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bezeichne eine zweimal stetig differenzierbare Funktion; in jedem kritischen Punkte sei  $D = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| \neq 0$ . Ein „kritischer“ Punkt von  $f$  ist ein solcher, in dem alle ersten Ableitungen von  $f$  verschwinden. Ein kritischer Punkt  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  heißt „von der  $\mu$ -ten Art“, wenn die quadratische Form  $\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k$  (die  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$  an der Stelle  $(x_1, \dots, x_n)$  genommen) durch eine reelle lineare Transformation auf die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n-\mu} y_i^2 - \sum_{k=n-\mu+1}^n y_k^2$$

gebracht werden kann ( $\mu = 0, 1, \dots, n$ ). Die Bedingung  $D \neq 0$  garantiert, daß die kritischen Punkte sich nicht häufen und die zugehörigen quadratischen Formen nicht ausarten. Kritische Punkte 0-ter Art sind Minima, solche  $n$ -ter Art Maxima; die anderen Arten repräsentieren die verschiedenen möglichen Typen von Sattelpunkten.

Herr Morse hat nun in seinen grundlegenden Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den Anzahlen kritischer Punkte in einem Gebiet und den Zusammenhangszahlen des Gebietes den folgenden Satz bewiesen<sup>1)</sup>:

**Voraussetzung:**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sei in einem abgeschlossenen Gebiet  $\Gamma$  des  $x_1 x_2 \dots x_n$ -Raumes mit den Bettischen Zahlen  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}, B_n = 0$  erklärt.  $f$  sei 3-mal stetig differenzierbar und es sei in jedem kritischen Punkte  $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| \neq 0$ . Auf dem Rande von  $\Gamma$  sei

<sup>1)</sup> „Relations between the critical points of a real function of  $n$  independent variables“. Trans. Amer. Math. Soc. 27, S. 345–396.



Alle Gegenstände lassen sich auf (elementenfremde) Paare verteilen, wobei ein Paar entweder aus einem kritischen Punkt  $i$ -ter und einem  $(i+1)$ -ter Art oder aus einem kritischen Punkt  $i$ -ter und einem Zykel  $i$ -ter. Art besteht ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Beweis: Ein Paar vom ersten Typ werde mit  $[i]$ , eines vom zweiten Typ mit  $\{i\}$  bezeichnet. Liegt nun ein System von Gegenständen vor, das (1) erfüllt, so braucht man nur  $L_i$  Paare  $[i]$  und  $B_i$  Paare  $\{i\}$  zu nehmen ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), um die vorgegebenen Anzahlen  $M_i$  bzw.  $B_i$  von jeder Art zu haben [ $L_i$  die in (1) definierten Ausdrücke in den  $M_i$  und  $B_i$ ]. Denn in diesen Paaren sind zusammen an kritischen Punkten der  $i$ -ten Art

$$L_i + L_{i-1} + B_i = M_i$$

und an Zykeln der  $i$ -ten Art  $B_i$  vorhanden, wie es sein muß. — Liegt andererseits ein System von Gegenständen vor, die sich auf solche Paare verteilen lassen, so erfüllen die Anzahlen der Gegenstände der verschiedenen Arten die Relationen (1). Denn für ein einzelnes Paar  $\{i\}$  ist (1) erfüllt, weil dann sogar jeder der eingeklammerten Terme für sich verschwindet; für ein Paar  $[i]$  ist dagegen  $B_i = 0$ ,  $M_i = M_{i+1} = 1$ ,  $M_r = 0$  für  $r \neq i, i+1$  und damit ebenfalls (1) erfüllt; da nun jedes Paar die homogenen Relationen (1) erfüllt, so auch eine beliebige Anzahl von solchen Paaren.

Diese Fassung legt es nahe, eine Funktion zu vorgegebenen  $B_i$  und  $M_i$ , die (1) erfüllen, aus Funktionen zusammenzusetzen, die entweder in einem Gebiet vom Typ der Kugel erklärt sind und dort zwei kritische Punkte von aufeinanderfolgenden Arten haben, oder in einem Gebiet mit einem einzigen nicht-berandenden  $i$ -dimensionalen Zykel erklärt sind ( $i > 0$ ) und dort nur einen kritischen Punkt  $i$ -ter Art haben.

Es lassen sich nun, den Paaren vom ersten Typ entsprechend, Funktionen  $F_\mu^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit folgenden Eigenschaften angeben:

1.  $F_\mu^{(n)}$  ist überall 3-mal stetig differenzierbar.
2.  $F_\mu^{(n)}$  ist linear  $= \alpha x_1$  ( $\alpha > 0$ ) außerhalb und auf dem Rande des Würfels

$$|x_i| \leq 1 + \frac{4}{\alpha} \quad (i = 1, \dots, n);$$

im Innern des Würfels gilt  $F_\mu^{(n)} > \alpha x_1$ .

3.  $F_\mu^{(n)}$  hat genau zwei kritische Punkte, einen von der  $(\mu-1)$ -ten Art und einen von der  $\mu$ -ten Art; der kritische Wert zum ersten Punkt ist negativ, der zum zweiten ist positiv.



Man kann daraus schon mit Hilfe der Morseschen Relationen in der S. 383 gegebenen Fassung die Bettischen Zahlen  $B_i$  von  $\Gamma$  bestimmen. Da hier  $M_0 = M_{\mu-1} = 1$ ,  $M_i = 0$  für  $i \neq 0, \mu-1$  ist, können keine Paare vom ersten Typ gebildet werden; es kann nur die Paare  $\{0\}$  und  $\{\mu-1\}$  geben. Also muß

$$B_0 = 1, B_{\mu-1} = 1, B_i = 0 \quad \text{für } i \neq 0, \mu-1$$

sein.

$W_r$  sei der Durchschnitt von  $W$  und  $\Gamma$ ,  $W'_r$  der von  $W'$  und  $\Gamma$ . Wegen  $F_\mu^{(n)} \geq \alpha x_1$  ist  $\Gamma$  ganz im Halbraum  $x_1 \leq 0$  enthalten.

$\Gamma$  hat dieselben Bettischen Zahlen wie  $W_r$ . Dazu zeigen wir, daß sich  $\Gamma$  umkehrbar eindeutig und stetig auf  $W_r$  abbilden läßt. Da  $\varphi$  außerhalb  $W'$  mit  $\Phi$  übereinstimmt, ist  $\Gamma - W'_r$  identisch mit der Menge der Punkte außerhalb  $W'$ , für die  $\Phi \leq 0$  gilt. Nun ist nach 4'. auch die Menge der Punkte mit  $\Phi \leq 0$  konvex (ihr Rand ist der Schnitt der Fläche  $y = \Phi$  mit der Ebene  $y = 0$ ). Da  $\Phi$  in  $\gamma$  mit  $\alpha x_1$  übereinstimmt, wird diese Punktmenge auf einer Seite von der Ebene  $x_1 = 0$  begrenzt. Danach hat ein nach dem Halbraum  $x_1 \leq 0$  gerichteter Strahl durch den Punkt  $O = (0, \nu, 0, \dots, 0)$  mit  $\Gamma - W'_r$  nur eine Strecke  $RQ'$  gemeinsam, wo  $Q'$  der Schnittpunkt des Strahles mit  $W'$  ist. Ordnet man einem Punkte  $P$  aus  $\Gamma - W'_r$  als Bildpunkt den Punkt  $P'$  der Strecke  $OP$  zu, für den

$$\frac{RP}{PQ'} = \frac{QP'}{P'Q'}$$

ist ( $R, Q'$  die Schnittpunkte des Strahles mit dem Rand von  $\Gamma - W'_r$ ,  $Q$  der mit  $W$ , vgl. Fig. 1), so wird durch diese Abbildung  $\Gamma - W'_r$  umkehrbar eindeutig und stetig auf  $W_r - W'_r$  abgebildet. Erweitern wir diese Abbildung durch die Vorschrift, daß die Punkte von  $W'_r$  festbleiben sollen, so ist eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung von  $\Gamma$  auf  $W_r$  erreicht. Damit ist auch nachgewiesen, daß  $W_r$  die Bettischen Zahlen

$$B_0 = B_{\mu-1} = 1, B_i = 0 \quad \text{für } i \neq 0, \mu-1$$

hat. Danach ist eine Funktion konstruiert, die in einem Gebiet  $W_r$  mit einem einzigen (unabhängigen) Zykel (außer dem 0-dimensionalen) einen einzigen kritischen Punkt, der von derselben Art ist, besitzt. Wir setzen jetzt die nötige Anzahl von solchen Paaren zusammen.

Wir denken in  $\gamma$  (was genügend groß gewählt gedacht wird, um alle Würfel zu enthalten) statt eines mehrere aneinanderstoßende Würfel der Kantenlänge  $2\left(2 + \frac{4}{\alpha}\right)$  auf der  $x_1$ -Achse aufgereiht, genauer die durch

$$|x_1 - \nu| \leq 2 + \frac{4}{\alpha},$$

$$|x_k| \leq 2 + \frac{4}{\alpha} \quad \text{für } k = 1, 3, \dots, n$$

gegebenen, wobei  $\nu = 0, \pm 2\left(2 + \frac{4}{\alpha}\right), \pm 4\left(2 + \frac{4}{\alpha}\right), \dots$



$\Phi$  war in ganz  $\gamma$  linear  $= \alpha x_i$  erklärt; wir ersetzen jetzt in  $B_1$  von diesen Würfeln  $\Phi$  durch  $F_3^{(n)}(x_1, x_2 - \nu, x_3, \dots, x_n)$ , in  $B_2$  anderen durch  $F_3^{(n)}(x_1, x_2 - \nu, x_3, \dots, x_n)$ , in  $B_3$  anderen durch  $F_4^{(n)}(x_1, x_2 - \nu, x_3, \dots, x_n)$  usw., wobei  $(0, \nu, 0, \dots, 0)$  das Zentrum des jeweiligen Würfels bedeutet und  $B_1, B_2, \dots, B_n$  die vorgegebenen Zahlen sind. Es entsteht so eine wieder in  $G$  erklärte 3-mal stetig differenzierbare Funktion  $\varphi$ . Sei jetzt  $\Gamma$  das Gebiet, in dem  $\varphi \leq 0$  ist, so liegen in  $\Gamma$  genau ein Minimum,  $B_1$  kritische Punkte 1-ter Art,  $B_2$  kritische Punkte 2-ter Art,  $\dots$ ,  $B_n = 0$  kritische Punkte  $n$ -ter Art nach 3. Der Teil  $W_\Gamma$  von  $\Gamma$ , der in einem der Würfel  $W$  liegt, hat die Zusammenhangszahlen  $B_k = 0$  für  $k \neq 0, i$  und  $B_0 = B_i = 1$ , wenn in  $W_\Gamma$  ein kritischer Punkt der  $i$ -ten Art liegt.

Wir wollen ableiten, daß  $\Gamma$  die vorgegebenen Zusammenhangszahlen  $B_i$  hat, daß sich also entsprechende Zusammenhangszahlen der einzelnen  $W_\Gamma$  einfach addieren (außer den 0-ten). Zunächst zeigen wir, daß die  $i$ -te Bettische Zahl von  $\Gamma$  größer oder gleich  $B_i$  ist. Es sind ja

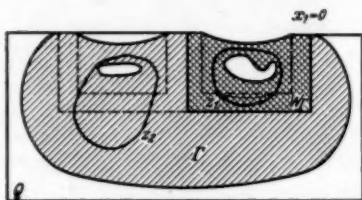


Fig. 2.

die Bettischen Zahlen gleich den Anzahlen linear unabhängiger Zyklen. Würde die  $i$ -te Bettische Zahl  $< B_i$  sein, so müßte eine Abhängigkeit zwischen den  $i$ -dimensionalen Zykeln der verschiedenen Würfel bestehen; d. h. es müßte einen nicht-verschwindenden  $\nu$ -dimensionalen Zykel  $z_1$  aus einem  $W_\Gamma$  geben und einen ebensolchen  $z_2$  aus  $\Gamma - W_\Gamma$ , so

daß  $z_1 - z_2$  innerhalb  $\Gamma$  berandet. Nun denken wir einen großen Quader, der ganz  $\Gamma$  enthält und der auf einer Seite von der Ebene  $x_1 = 0$  begrenzt wird;  $Q$  sei der Teil des Quaders, der außerhalb des Würfels  $W$  liegt.  $\Gamma - W_\Gamma$  ist offenbar in  $Q$  enthalten; dann muß  $z_1 - z_2$  a fortiori in  $Q + W_\Gamma$  beranden; nun berandet  $z_2$  in  $Q$ , da  $Q$  einer Kugel topologisch äquivalent ist; folglich würde  $z_2$  auch in  $Q + W_\Gamma$  beranden, also müßte auch  $z_1$  in  $Q + W_\Gamma$  beranden. Nun ist wieder  $Q + W_\Gamma$  topologisch so auf  $W_\Gamma$  abbildbar, daß  $W_\Gamma$  festbleibt (in derselben Weise wie S. 385  $\Gamma$  auf  $W_\Gamma$ ); bei dieser Abbildung würde  $z_1$  in einen in  $W_\Gamma$  berandenden Zykel  $z'_1$  übergehen;  $z'_1$  muß innerhalb  $W_\Gamma$  mit  $z_1$  übereinstimmen.  $z'_1 - z_1$  liegt in dem einer Kugel äquivalenten Gebiet  $W_\Gamma - W_\Gamma$ , berandet also in diesem und folglich auch in  $W_\Gamma$ . Da  $z'_1$  berandet, müßte dann auch  $z_1$  in  $W_\Gamma$  beranden entgegen der Voraussetzung. Folglich treten keine Abhängigkeiten zwischen den in verschiedenen Würfeln gelegenen Zykeln ein und es muß daher die  $\nu$ -te Bettische Zahl von  $\Gamma$  mindestens  $= B_\nu$  sein. Sie kann aber auch nicht größer als  $B_\nu$  sein, weil  $\Gamma$  ein Gebiet ist, in dem  $\varphi$

die Voraussetzungen des Morseschen Satzes erfüllt; es muß sich dann jedem der unabhängigen Zykel mindestens ein kritischer Punkt derselben Art zuordnen lassen, während es in  $\Gamma$  genau  $B_i$  kritische Punkte der  $i$ -ten Art gibt. Danach ist also  $\Gamma$  ein Gebiet mit den vorgegebenen Bettischen Zahlen (außer  $B_0$ ; da  $\Gamma$  nach Konstruktion zusammenhängend ist, ist seine 0-te Bettische Zahl 1). Fügt man noch  $B_0 - 1$  weitere nur mit einem Minimum versehene Flächen des  $x_1 \dots x_n y$ -Raumes vom Typus

$$y = \Phi(x_1, x_2 - b, x_3, \dots, x_n)$$

mit geeignet gewählten  $b$  hinzu, die in zu  $G$  ähnlichen Gebieten definiert sind, so bekommt man auch die richtige Zahl  $B_0$  heraus.

Um auch die richtigen Anzahlen kritischer Punkte in  $\Gamma$  zu bekommen, haben wir noch Paare [i] hinzuzufügen. Wir denken also noch in dem innerhalb von  $\Gamma$  gelegenen Teil von  $\gamma$  auf einer zur  $x_2$ -Achse parallelen Geraden weitere  $L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1}$  Würfel angenommen, nämlich die Würfel

$$\begin{aligned} |x_2 - v| &\leq 1 + \frac{4}{\alpha}, \\ \left| x_1 + 2 \left( 1 + \frac{4}{\alpha} \right) \right| &\leq 1 + \frac{4}{\alpha}, \\ |x_r| &\leq 1 + \frac{4}{\alpha} \quad (v = 3, \dots, n). \end{aligned}$$

In  $L_0$  von ihnen ersetzen wir die Funktion  $\Phi$ , die dort noch linear  $= \alpha x_1$  erklärt ist, durch

$$F_1^{(n)} \left( x_1 + 2 \left( 1 + \frac{4}{\alpha} \right), x_2 - v, x_3, \dots, x_n \right) - (2\alpha + 4),$$

in  $L_1$  anderen durch

$$F_2^{(n)} \left( x_1 + 2 \left( 1 + \frac{4}{\alpha} \right), x_2 - v, x_3, \dots, x_n \right) - (2\alpha + 4),$$

in  $L_2$  anderen durch

$$F_3^{(n)} - (2\alpha + 4), \text{ usw.}$$

Diese Funktionen sind eindeutig in den Würfeln erklärt und schließen sich am Rande mit stetigen dritten Ableitungen an  $\alpha x_1$  an. Dadurch entsteht eine in  $\Gamma$  erklärte 3-mal stetig differenzierbare Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , die genau die vorgegebenen Anzahlen  $M_0, M_1, \dots, M_n$  kritischer Punkte hat; denn vorher waren  $B_i$  kritische Punkte der  $i$ -ten Art vorhanden und es kommen genau  $L_{i-1} + L_i$  neue hinzu, so daß  $f$  im ganzen genau  $M_i$  solche hat.  $f$  erfüllt alle Voraussetzungen des Morseschen Satzes und stellt also eine Lösung unseres Konstruktionsproblems dar.

### Konstruktion der Hilfsfunktionen $F_\mu^{(n)}$ und $\Phi$ .

Es bleibt noch die Konstruktion der Funktionen  $F_\mu^{(n)}$  und  $\Phi$  nachzutragen. Wir erklären zunächst drei Funktionen einer Variablen.  $h(x)$  sei definiert durch

$$(2) \quad h(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^4 & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{„ } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$h(x)$  ist 3-mal stetig differenzierbar, auch in  $\pm 1$ . Im Intervall  $|x| < 1$  hat  $h$  keine 0-Stelle,  $h'$  im Punkte  $x = 0$  eine 0-Stelle,  $h''$  in den Punkten  $x = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$  0-Stellen.

$\alpha$  sei eine gewisse für alles Folgende fest gewählte positive Zahl  $< c = \left| h' \left( \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \right) \right| \sim 1,90$ . Wir setzen zur Abkürzung

$$g(x) = \alpha x - h(x).$$

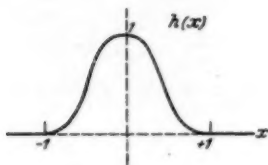


Fig. 3.

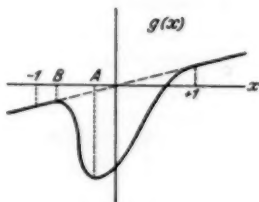


Fig. 4.

Die Funktion  $g(x)$  ist für  $|x| \geq 1$  linear  $= \alpha x$ , im Intervall  $|x| < 1$  hat sie genau zwei kritische Punkte: es ist nämlich  $\text{Max } |h'(x)| = c$ , so daß die Gleichung  $\alpha - h'(x) = 0$  genau zwei Lösungen  $A$  und  $B$  hat:

$$-1 < B < A < 0.$$

$g$  hat in  $A$  ein Minimum, in  $B$  ein Maximum. Es gilt:

$$-1 + \alpha A < g(A) < g(B) < 0;$$

$g$  ist überall 3-mal stetig differenzierbar.

Weiterhin sei

$$k(x) = \begin{cases} \left( 1 - h \left( \frac{\alpha \left( |x| - 1 - \frac{4}{\alpha} \right)}{4} \right) \right)^2 & \text{für } |x| \leq 1 + \frac{4}{\alpha}, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 + \frac{4}{\alpha}. \end{cases}$$

$k(x)$  ist dann ebenfalls 3-mal stetig differenzierbar [auch in  $1 + \frac{4}{\alpha}$ , denn  $h(x)$  hat in  $x = 0$  eine zweifache 1-Stelle, also hat  $(1 - h(\frac{\alpha|x| - \alpha}{4} - 1))^2$  für  $x = \pm(1 + \frac{4}{\alpha})$  eine vierfache 0-Stelle]. Es ist

$$k(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \geq 1 + \frac{4}{\alpha},$$

aber

$$k(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad |x| < 1 + \frac{4}{\alpha}.$$

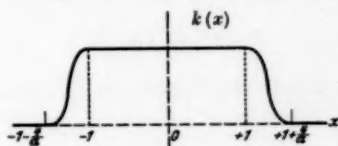


Fig. 5.

Weiterhin ist wegen  $|h'| \leq c < 2$

$$(3) \quad \begin{aligned} |k'(x)| &= \frac{\alpha}{2} (1 - h) \cdot |h'| \\ &\leq \frac{\alpha}{2} |h'| \leq \frac{\alpha}{2} \cdot c < \alpha. \end{aligned}$$

Dann erklären wir die  $n$  Funktionen  $F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, \dots, F_n^{(n)}$  in folgender Weise:

$$\text{I. } F_1^{(n)} = \begin{cases} \alpha x_1 - h(x_1)h(x_2) \dots h(x_n) + e & \text{für } |x_i| \leq 1, \\ \alpha x_1 + e k(x_1)k(x_2) \dots k(x_n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

II. Für  $\mu = 2, \dots, n$  sei

$$\begin{aligned} F_\mu^{(n)} &= \alpha x_1 + h\left(\frac{x_n}{1 + \frac{4}{\alpha}}\right) \cdot (F_{\mu-1}^{(n-1)} - \alpha x_1), \\ &= \alpha x_1 + h\left(\frac{x_n}{1 + \frac{4}{\alpha}}\right) \dots h\left(\frac{x_{n-\mu+2}}{1 + \frac{4}{\alpha}}\right) \cdot F_1^{(n-\mu+1)}. \end{aligned}$$

$e$  sei dabei eine fest gewählte Zahl mit

$$(4) \quad \begin{aligned} 1 &< e < \frac{2}{c} \\ \text{und} \quad e &< -g(A). \end{aligned}$$

Es gelten dann die folgenden Sätze:

I.  $F_\mu^{(n)}$  ist eine überall erklärte, dreimal stetig differenzierbare Funktion.

Beweis: Offenbar braucht das nur für die  $F_1^{(n)}$  nachgewiesen zu werden und, weil  $\alpha x_1 - h(x_1) \dots h(x_n) + e$  und  $\alpha x_1 + e k(x_1) \dots k(x_n)$  überall 3-mal stetig differenzierbar sind, nur noch für die Punkte einer Seitenfläche des Würfels  $|x_i| \leq 1$ . Nun ist im Innern und auf dem Rande dieses Würfels  $\alpha x_1 + e k(x_1) \dots k(x_n)$  linear  $= \alpha x_1 + e$ , im Äußeren und auf dem Rande des Würfels  $\alpha x_1 - h(x_1) \dots h(x_n) + e$  linear  $= \alpha x_1 + e$ , so daß alle dritten Ableitungen beider Funktionen auf den Seitenflächen des Würfels verschwinden; die aus beiden zusammengesetzte Funktion  $F$  hat also auch noch auf den Seitenflächen stetige dritte Ableitungen.

2. Außerhalb und auf dem Rande des Würfels

$$|x_i| \leq 1 + \frac{4}{\alpha} \quad (i = 1, \dots, n)$$

gilt  $F_\mu^{(n)} = \alpha x_1$ , im Innern des Würfels ist  $F_\mu^{(n)} > \alpha x_1$ .

Beweis: Die Behauptung ist richtig für  $F_1^{(n)}$ , denn im Würfel  $|x_i| \leq 1$  ist

$$F_1^{(n)} - \alpha x_1 = e - h(x_1) \dots h(x_n) > 0$$

wegen  $|h| < 1$ ; anderenfalls ist, wenn noch  $|x_i| < 1 + \frac{4}{\alpha}$  für alle  $i$  gilt,

$$F_1^{(n)} - \alpha x_1 = e k(x_1) \dots k(x_n) > 0;$$

ist dagegen ein  $x_i \geq 1 + \frac{4}{\alpha}$ , so ist  $k(x_i) = 0$  und  $F_1^{(n)} = \alpha x_1$ . Für  $F_\mu^{(n)}$  folgt die Behauptung durch Induktion; wenn sie für  $F_{\mu-1}^{(n-1)}$  bewiesen ist, ist ja

$$F_\mu^{(n)} - \alpha x_1 = h \left( \frac{x_n}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right) \cdot (F_{\mu-1}^{(n-1)} - \alpha x_1)$$

$> 0$  für  $|x_n| < 1 + \frac{4}{\alpha}$  und  $|x_i| < 1 + \frac{4}{\alpha}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), und  $= 0$ , falls  $|x_n|$  oder ein  $|x_i| \geq 1 + \frac{4}{\alpha}$  ist.

3.  $F_\mu^{(n)}$  hat genau zwei kritische Punkte, einen in  $(A, 0, \dots, 0)$  von der  $(\mu-1)$ -ten Art und den anderen in  $(B, 0, \dots, 0)$  von der  $\mu$ -ten Art. Die kritischen Werte sind  $g(A) + e$  und  $g(B) + e$ .

Beweis: Zunächst für  $\mu = 1$ . Außerhalb und auf dem Rande des Würfels  $|x_i| \leq 1$  kann kein kritischer Punkt liegen, weil dort

$$\begin{aligned} F_1^{(n)} &= \alpha x_1 + e k(x_1) \dots k(x_n), \\ \frac{\partial F_1^{(n)}}{\partial x_1} &= \alpha + e k'(x_1) k(x_2) \dots k(x_n) \\ &\geq \alpha - e |k'(x_1) k(x_2) \dots k(x_n)| \\ &\geq \alpha - e |k'(x_1)| \geq \alpha - \frac{e \cdot c \cdot \alpha}{2} = \alpha \left( 1 - \frac{e \cdot c}{2} \right) > 0 \end{aligned}$$

[nach (4), (3)]. Also können wir für einen kritischen Punkt alle  $|x_i| < 1$  voraussetzen; dann ist

$$F_1^{(n)} = \alpha x_1 - h(x_1) \dots h(x_n) + e,$$

$$\frac{\partial F_1^{(n)}}{\partial x_v} = -h(x_1) \dots h(x_{v-1}) h'(x_v) h(x_{v+1}) \dots h(x_n) \quad \text{für } v = 2, \dots, n,$$

so daß aus dem Verschwinden dieser Ableitungen wegen  $|x_i| < 1$

$$h'(x_v) = 0$$

und daher  $x_v = 0$  folgt. Für einen kritischen Punkt ist also

$$x_2 = \dots = x_n = 0,$$

folglich

$$h(x_2) = \dots = h(x_n) = 1; \quad F_1^{(n)} = g(x_1) + e;$$

aus  $\frac{\partial F_1^{(n)}}{\partial x_1} = 0$  folgt dann  $x_1 = A$  oder  $= B$  und  $F_1^{(n)} = g(A) + e$  bzw.  $g(B) + e$ . Damit ist die Behauptung über Lage und Werte der kritischen Punkte von  $F_1^{(n)}$  bewiesen. Für diese ist dann für  $v, \lambda = 2, \dots, n$  offenbar

$$\frac{\partial F_1^{(n)}}{\partial x_v \partial x_\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } v = \mu, \\ -h''(0) = 8 > 0 & \text{für } v \neq \mu, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^3 F_1^{(n)}}{\partial x_v \partial x_\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F_1^{(n)}}{\partial x_\mu^3} = \alpha - h'(x_1) = g(x_1) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_1 = B, \\ > 0 & \text{für } x_1 = A. \end{cases}$$

Damit ist auch die Behauptung über den Charakter der kritischen Punkte von  $F_1^{(n)}$  bewiesen.

Daraus folgern wir auch die Behauptung für  $\mu = 2, \dots, n$ . Zunächst kann nach II kein kritischer Punkt von  $F_\mu^{(n)}$  außerhalb oder auf dem Rande des Quaders

$$\begin{aligned} |x_i| &\leq 1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, n - \mu + 1, \\ |x_i| &\leq 1 + \frac{4}{\alpha} & \text{für } i = n - \mu + 2, \dots, n \end{aligned}$$

liegen, denn außerhalb dieses Quaders ist entweder  $|x_i| \geq 1 + \frac{4}{\alpha}$ , wo  $i$  eine der Zahlen  $n + 2 - \mu, \dots, n$  ist; dann wäre  $h\left(\frac{x_i}{1 + \frac{4}{\alpha}}\right) = 0$  und

$$F_\mu^{(n)} = \alpha x_1,$$

folglich

$$\frac{\partial F_\mu^{(n)}}{\partial x_1} = \alpha \neq 0;$$

oder es wäre  $|x_i| \geq 1$  und  $i$  eine der Zahlen  $1, \dots, n - \mu + 1$ , dann ist aber

$$\left| \frac{\partial F_\mu^{(n)}}{\partial x_1} \right| = \left| \alpha + h \left( \frac{x_n}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right) \cdot h \left( \frac{x_{n-1}}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right) \dots h \left( \frac{x_{n-\mu+2}}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right) \cdot \frac{\partial F_1^{(n-\mu+1)}}{\partial x_1} \right|$$

$$\geq \alpha > 0 \quad [\text{nach (4)}]$$

(weil wir oben nachgewiesen haben, daß  $\frac{\partial F_1^{(n-\mu+1)}}{\partial x_1} > 0$  außerhalb und auf dem Rande des Würfels  $|x_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, n - \mu + 1$ )). Also sind für einen kritischen Punkt

$$|x_i| < 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n - \mu + 1,$$

$$|x_i| < 1 + \frac{4}{\alpha} \quad \text{für } i = n - \mu + 2, \dots, n$$

und folglich nach 2.

$$F_{\mu-1}^{(n-1)} - \alpha x_1 \neq 0;$$

demnach folgt für  $i = n - \mu + 2, \dots, n$  aus

$$0 = \frac{\partial F_\mu^{(n)}}{\partial x_i} = h' \left( \frac{x_i}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right) \cdot h \dots (F_1^{(n-\mu+1)} - \alpha x_1);$$

$$0 = h' \left( \frac{x_i}{1 + \frac{4}{\alpha}} \right);$$

daher muß, wegen  $|x_i| < 1 + \frac{4}{\alpha}$ ,  $x_i = 0$  sein, also  $x_{n-\mu+2} = \dots = x_n = 0$ ; also ist für einen kritischen Punkt

$$F_\mu^{(n)} = F_1^{(n-\mu+1)},$$

dann folgt aber auch

$$0 = \frac{\partial F_\mu^{(n)}}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1^{(n-\mu+1)}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n - \mu + 1)$$

und folglich nach dem für  $F_1^{(n-\mu+1)}$  Bewiesenen

$$x_1 = \dots = x_{n-\mu+1} = 0,$$

$$x_1 = A \quad \text{oder} \quad x_1 = B,$$

$$F_\mu^{(n)} = g(A) \quad \text{bzw.} \quad = g(B).$$

Damit ist die Behauptung über Lage und Werte der kritischen Punkte von  $F_\mu^{(n)}$  bewiesen. Es ist aber nach II für  $\nu, \lambda = 1, \dots, n - 1$

$$\frac{\partial^2 F_\mu^{(n)}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} = \frac{\partial^2 F_{\mu-1}^{(n-1)}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda}$$



wegen  $x_n = 0$ ; und

$$\frac{\partial^2 F_\mu^{(n)}}{\partial x_r \partial x_n} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha}} h'(0) \left( \frac{\partial F_\mu^{(n-1)}}{\partial x_r} - \alpha x_1 \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\mu^{(n)}}{\partial x_n^2} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)^2} h''(0) (e - h(x_1)) \\ &= \frac{8}{\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)^3} (e - h(x_1)) < 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Induktion über  $\mu$  auch die Behauptung über den Charakter der kritischen Punkte von  $F_\mu^{(n)}$ .

Wir betrachten jetzt die Rotationsfläche im  $x_1 x_2 \dots x_n y$ -Raum

$$(5) \quad y = a \cdot h(r - a - 1)$$

für

$$0 \leq r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq a + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{7}}\right),$$

wo  $a$  ein für das Folgende genügend groß gewählter Parameter sei.

Die Fläche (5) des  $x_1 x_2 \dots x_n y$ -Raumes ist konvex, d. h. hat mit jeder Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam. Diese anschaulich

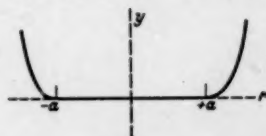


Fig. 6.

evidente Tatsache sieht man so ein: sei  $g$  eine Gerade dieses Raumes, wir legen einen  $R_3$  durch  $g$  und die  $y$ -Achse (d. h. durch zwei Punkte von  $g$  und zwei Punkte der Achse). In diesem  $R_3$  ergänzen wir die  $y$ -Achse zu einem kartesischen  $\xi \eta y$ -Koordinatensystem mit dem alten 0-Punkt als Ursprung. Der Schnitt des  $R_3$  mit der Fläche (5) wird in diesem Koordinatensystem wieder durch (5) gegeben, wenn wir  $r$  als  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  deuten. Man hat also nur zu zeigen, daß in diesem  $R_3$ , d. h. für  $n = 2$ , die durch (5) gegebene Fläche mit einer Geraden  $g$  höchstens zwei Punkte gemeinsam hat. Die Konvexität dieser zweidimensionalen Fläche sieht man aber unmittelbar ein.

Nun denken wir die Fläche (5) des  $x_1 x_2 \dots x_n y$ -Raumes um den Winkel  $\Theta = \arctg \alpha$  um die  $x_1 x_2 \dots x_n$ -Ebene gedreht, d. h. es werde

$$(6) \quad \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \Theta - y \sin \Theta, \\ y' &= x_1 \sin \Theta + y \cos \Theta \end{aligned}$$

gesetzt und  $y'$  in seiner Abhängigkeit von  $x'_1, x_2, \dots, x_n$  betrachtet.  $y'$  wird, wenn wir noch  $\alpha < \frac{1}{c} = 0,5250$  voraussetzen, eine eindeutige Funktion  $\Phi(x'_1, x_2, \dots, x_n)$  in einem gewissen Ellipsoidgebiet  $G$  des  $x'_1 \dots x_n$ -Raumes. Das Minimum auf dem Rande von  $G$  ist für ge-



Fig. 7.

nügend groß gewähltes  $a$  größer als 2. Denn der Minimumpunkt auf dem Rande von  $G$  entsteht durch (6) aus dem Punkte

$$x_1 = \left(a + 1 - \sqrt{\frac{1}{7}}\right), x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0, y = ah\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right) = a \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{1}{4}},$$

so daß das Minimum

$$y' = \cos \Theta (x_1 \alpha + y) = \cos \Theta \cdot \left[ a \left( \left( \frac{6}{7} \right)^{\frac{1}{4}} - \alpha \right) - \alpha \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{7}} \right) \right]$$

wird, was  $> 2$  ist für genügend großes  $a$  wegen  $\frac{6^{\frac{1}{4}}}{7^{\frac{1}{4}}} - \alpha > \frac{6^{\frac{1}{4}}}{7^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{c} > 0$ .

Es werde jetzt wieder  $x_1$  für  $x'_1$  und  $y$  für  $y'$  geschrieben.  $y$  ist innerhalb eines zu  $G$  ähnlichen  $n$ -dimensionalen Ellipsoids  $\gamma$  linear  $= \alpha x_1$ . Alle kritischen Punkte von  $\Phi$  müssen auf der  $x_1$ -Achse liegen; denn in einem solchen müßte die Flächennormale an die Fläche  $y = \Phi$  des  $x_1 \dots x_n, y$ -Raumes parallel zur  $y$ -Achse sein; andererseits muß die Flächennormale durch die in der  $x_1, y$ -Ebene gelegene Rotationsachse der Fläche gehen, also die ganze Normale und mit ihr der kritische Punkt in der  $x_1, y$ -Ebene liegen. Danach gibt es einen einzigen, auf der  $x_1$ -Achse gelegenen kritischen Punkt, der offenbar das absolute Minimum von  $\Phi$  in  $G$  darstellt.

(Eingegangen am 14. 6. 1933.)

# Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen.

Von

Max Frommer in Göppingen (Württemberg).

## Einleitung.

Nach den topologischen Untersuchungen von Brouwer<sup>1)</sup> können in der Umgebung einer rationalen Unbestimmtheitsstelle einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwei „Hauptfälle“ der Überdeckung mit Integralkurven vorkommen. Im ersten Hauptfall gibt es Integralkurven, die mit bestimmter Tangentenrichtung in die singuläre Stelle einmünden. In einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> habe ich ein Verfahren angegeben, das diesen Fall vollständig erledigt, d. h.: aus geometrischen Eigenschaften des Feldes der Differentialgleichung bzw. aus den entsprechenden algebraischen Beziehungen zwischen ihren Koeffizienten kann die Gestalt und die analytische Darstellung der Integralkurven eindeutig ermittelt werden. Im zweiten Hauptfall gibt es keine Integralkurven, die mit einer bestimmten Tangentenrichtung in die singuläre Stelle einmünden. Wir unterscheiden hierbei drei Möglichkeiten:

1. Alle Integralkurven in der Nähe der singulären Stelle sind geschlossen (*Wirbel*).
2. In hinreichender Nähe der singulären Stelle gibt es keine geschlossenen Integralkurven; alle Integralkurven in diesem Bereich sind Spiralen, die sich asymptotisch der singulären Stelle nähern. (*Strudel*).
3. In beliebiger Nähe der singulären Stelle gibt es geschlossene Integralkurven, denen sich andere asymptotisch nähern. (*Strudel mit Grenzzykeln*).

Der zweite Hauptfall wäre also dann vollständig erledigt, wenn man algebraische Ausdrücke in den Koeffizienten der Differentialgleichung angeben könnte, die diese drei Möglichkeiten gegeneinander abgrenzen. Die Schwierigkeiten sind hier aber wesentlich größer als beim ersten

<sup>1)</sup> L. E. J. Brouwer, „On continuous vector distributions on surfaces“. Proceedings of the Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam 1909/10.

<sup>2)</sup> Frommer, Math. Ann. 99 (1928).

Hauptfall: dort bestehen die Kriterien darin, daß eine bestimmte Funktion für kleine Werte der Veränderlichen entweder positiv oder negativ ist; auf dieses Kriterium haben aber nur bestimmte Glieder der Differentialgleichung Einfluß, so daß alle Glieder, die bei Annäherung an die singuläre Stelle von höherer Ordnung klein werden als diese bestimmenden Glieder, die Gestalt der Integralkurven in ihrem Charakter nicht beeinflussen. Im zweiten Hauptfall dagegen besteht die Bedingung für das Auftreten eines Wirbels in dem identischen Verschwinden einer Funktion; naturgemäß müssen in diese Bedingung alle Glieder der Differentialgleichung eingehen, und deshalb kann der Wirbelcharakter durch Hinzufügung von Gliedern beliebig hoher Ordnung gestört werden. Aber auch bei der Strudelbedingung, die ihrem Wesen nach mit den Kriterien des ersten Hauptfalls verglichen werden kann, tritt eine Eigenheit auf, die es bedingt, daß bei der Differentialgleichung  $y' = \frac{P}{Q}$  ( $P$  und  $Q$  Polynome in  $x$  und  $y$ ) die Umwandlung eines Strudels in einen Wirbel durch Hinzufügung von Gliedern höheren Grades nicht immer unmöglich, ja daß dieser Fall nicht einmal als eine spezielle Ausnahme anzusprechen ist (siehe Beispiele S. 406).

Eine allgemeine, erschöpfende Behandlung des zweiten Hauptfalls unter der Voraussetzung, daß  $y'$  als Quotient zweier Polynome in  $x$  und  $y$  gegeben ist, erscheint wegen der dabei auftretenden rechnerischen Schwierigkeiten unmöglich. Es ist nach den Erfahrungen bei den einfachen Fällen auch kaum anzunehmen, daß sich die Ergebnisse in einer einfachen und übersichtlichen algebraischen Form darstellen lassen. Die vorliegende Arbeit behandelt erschöpfend folgende drei Fragen, die sich immer auf die Differentialgleichung  $y' = \frac{P}{Q}$  ( $P$  und  $Q$  Polynome in  $x$  und  $y$ ) beziehen:

1. Die Aufstellung der Wirbelbedingungen, die im allgemeinen in unendlicher Anzahl erscheinen (*Poincarésches Problem*).
2. Die Abhängigkeit des Strudelcharakters von den Zusatzgliedern höherer Ordnung. (Eine Frage, die meines Wissens in der Literatur bisher nie aufgetreten ist.)
3. Die Integralkurven der Differentialgleichung  $y' = -\frac{x + \text{Gl. 2. Grades}}{y + \text{Gl. 2. Grades}}$  (*Dulacsches Problem*).

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die beiden ersten Fragen in der Behandlung miteinander verquickt und zwar so, daß beide Fragen zunächst an dem von Poincaré allein betrachteten Beispiel der Differentialgleichung  $y' = -\frac{x + \text{Glieder höherer Ordnung}}{y + \text{Glieder höherer Ordnung}}$  behandelt werden. Hernach

wird die Methode für den Fall von Anfangsgliedern höherer Ordnung verallgemeinert.

Die Methode, die auf Anregungen von M. Dehn zurückgeht, ist wie bei der Behandlung des ersten Hauptfalls geometrisch. Sie beruht auf der direkten Vergleichung zweier Differentialgleichungsfelder, von denen das eine bekannte oder leicht zu bestimmende Integralkurven hat. Zu dieser Methode braucht man keine Voraussetzungen über den analytischen Charakter der Integrale, wie sie Poincaré<sup>3)</sup> seinen Untersuchungen über die Wirbelbedingungen zugrunde legt. Er geht von der Voraussetzung aus, daß sich im Wirbelfall die Integralkurven in der Form  $\Phi(x, y) = \text{Const.}$  darstellen lassen, wobei  $\Phi$  eine in der Umgebung der singulären Stelle konvergente Potenzreihe ist. Es wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, ohne diese Voraussetzung zu benutzen, daß für die Poincarésche Differentialgleichung  $y' = -\frac{x + \text{Gl. höherer Ordnung}}{y + \text{Gl. höherer Ordnung}}$  unser Verfahren zu den Poincaréschen Bedingungen führt. Diese Bedingungen werden zugleich als *notwendig und hinreichend* nachgewiesen. Damit ist aber die Poincarésche Voraussetzung selbst für diesen Fall noch nicht bewiesen; dagegen wird gezeigt, daß im Falle von Anfangsgliedern höherer Ordnung die Poincarésche Annahme im allgemeinen nicht zutrifft.

Dulac<sup>4)</sup> wandte das Poincarésche Verfahren auf die Differentialgleichung  $y' = -\frac{x + \text{Gl. 2. Grades}}{y + \text{Gl. 2. Grades}}$  an, aber auch hier treten trotz der endlichen Anzahl der Koeffizienten unendlich viele Bedingungen auf, die natürlich aus einer endlichen Anzahl von Bedingungen abgeleitet werden können. Dulac sucht aber nicht direkt nach einem solchen System von unabhängigen Bedingungen, sondern er scheidet auf Grund jeder neugefundenen Bedingung diejenigen Differentialgleichungen aus, deren Lösungen sicher keine geschlossenen Kurven ergeben. So kommt er zuletzt zu Differentialgleichungen, die er mit Hilfe von Transformationen integrieren kann. Da er zudem zur Vereinfachung der Rechnung von vornherein eine komplexe Transformation anwendet, ist es nach seiner eigenen Angabe fast unmöglich, den Zusammenhang der einzelnen integrierbaren Gruppen mit der ursprünglichen Differentialgleichung zu erkennen. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem als ein geometrisches aufgefaßt: jedem Kegelschnitt einer durch vier Punkte bestimmten Schar wird eindeutig eine Richtung zugeordnet, und zwar die Senkrechte auf der Tangente in einem der vier Grundpunkte (Ursprung). Durch diese Zuordnung ist das Feld der Differentialgleichung vollständig bestimmt. Also ist es eine Eigen-

<sup>3)</sup> H. Poincaré, Journal de Mathématiques, 1885.

<sup>4)</sup> H. Dulac, Bulletin des Sciences mathématiques, 1908.

schaft der gegenseitigen Lage der vier Grundpunkte, wenn geschlossene Integralkurven auftreten. Diese geometrische Eigenschaft wird direkt angegeben. Außerdem wird aber auch das System der (zwei) algebraischen Bedingungen zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung angegeben, die die unendlich vielen Poincaréschen Bedingungen nach sich ziehen, die also für das Auftreten eines Wirbels notwendig und hinreichend sind.

### § 1.

#### Die Wirbelbedingungen für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)} \quad (\text{Poincarésches Problem}).$$

Im folgenden wird mit Hilfe der Vergleichsmethode die unendliche Reihe der Wirbelbedingungen hergeleitet. Über Poincaré hinausgehend wird nachgewiesen, daß diese Bedingungen für das Auftreten eines Wirbels nicht nur *notwendig*, sondern auch *hinreichend* sind, womit zugleich die Unmöglichkeit des Strudels mit sich häufenden Grenzykeln bewiesen ist. Zum Schluß wird aus dem algebraischen Aufbau der Wirbelbedingungen die Abhängigkeit des *Strudelcharakters* von Veränderungen der Differentialgleichung untersucht. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Zusatzfunktionen  $p$  und  $q$  als Potenzreihen in  $x$  und  $y$  angegeben sind. Es ist also:

$$p(x, y) = p_0(x, y) + p_1(x, y) + \dots p_i(x, y) + \dots,$$

$$q(x, y) = q_0(x, y) + q_1(x, y) + \dots q_i(x, y) + \dots,$$

wobei die  $p_i$  und  $q_i$  Polynome  $i$ -ten Grades in  $x$  und  $y$  sind.

Das Verfahren beruht auf der Konstruktion einer Vergleichsdifferentialgleichung, deren Lösungen in der Umgebung des Ursprungs sicher geschlossene Kurven darstellen. Gelingt es, diese Vergleichsdifferentialgleichung so zu konstruieren, daß die beiden Feldrichtungen in einer bestimmten Umgebung des Ursprungs nie übereinstimmen, so ist damit nachgewiesen, daß nicht beide Differentialgleichungen zugleich dem Wirbeltypus angehören. Dies wird aber von der Vergleichsdifferentialgleichung vorausgesetzt; also scheidet in diesem Fall die vorgelegte Differentialgleichung aus, sie gehört demnach zum Strudeltyp.

Vergleichsdifferentialgleichungen der verlangten Art erhält man, wenn man von einer algebraischen Kurvenschar  $f(x, y) = \text{Const.}$  ausgeht. Die algebraische Funktion  $f(x, y)$  wird versuchsweise angesetzt in der Form

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots f_n(x, y),$$

wobei

$$f_i(x, y) = A_{i0}x^i + A_{(i-1)1}x^{i-1}y^1 + \dots + A_{0i}y^i$$

ist. Die Koeffizienten  $A_{rs}$  sind dabei die nach dem folgenden Verfahren zu bestimmenden Unbekannten. Die Kurvenschar  $f(x, y) = \text{Const.}$  genügt der Differentialgleichung

$$y'_1 = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{2x + f_{2x}(x, y) + f_{4x}(x, y) + \dots}{2y + f_{2y}(x, y) + f_{4y}(x, y) + \dots},$$

deren Lösungen sicher geschlossene Kurven darstellen, solange es sich um ein endliches Verfahren handelt, solange also  $f(x, y)$  ein Polynom ist. Aber auch im Grenzfall erhält man immer dann geschlossene Kurven, wenn die für  $f(x, y)$  erhaltene Potenzreihe in einem Bereich um den Ursprung herum konvergent ist.

Um die beiden Differentialgleichungen zu vergleichen, bildet man die Differenz

$$y' - y'_1 = \frac{-(x + p_2 + p_3 + \dots)(2y + f_{2y} + f_{4y} + \dots) + (y + q_2 + q_3 + \dots)(2x + f_{2x} + f_{4x} + \dots)}{(y + q(x, y))(2y + f_{2y}(x, y) + f_{4y}(x, y) + \dots)}.$$

Der Zähler dieser Differenz ist eine Potenzreihe, bei der die Koeffizienten sich aus den Koeffizienten von  $p(x, y)$  und  $q(x, y)$ , und von  $f(x, y)$  zusammensetzen. Die Glieder zweiten Grades fallen weg. Als Ausdruck dritten Grades erhält man:

$$-x f_{3y} - 2y p_3 + y f_{3x} + 2x q_3$$

oder

$$(-x f_{3y} + y f_{3x}) + (2x q_3 - 2y p_3).$$

Der zweite Klammerausdruck ist dabei ein Polynom dritten Grades  $B_{30}x^3 + B_{21}x^2y + B_{12}xy^2 + B_{03}y^3$ , dessen Koeffizienten  $B_{i(3-i)}$  lineare Ausdrücke in den Koeffizienten von  $p_3$  und  $q_3$  sind. Die Koeffizienten des ersten Klammerausdrucks sind dagegen nur von den Koeffizienten des Polynoms  $f_3(x, y)$  abhängig, und zwar ist:

$$\begin{aligned} (-x f_{3y} + y f_{3x}) &\equiv -x(A_{31}x^3 + 2A_{12}xy + 3A_{03}y^3) \\ &\quad + y(3A_{30}x^3 + 2A_{21}xy + A_{13}y^3) \\ &\equiv -A_{31}x^3 + (-2A_{12} + 3A_{30})x^2y \\ &\quad + (-3A_{03} + 2A_{21})xy^2 + A_{13}y^3. \end{aligned}$$

Da nun die Funktion  $f(x, y)$  so bestimmt werden soll, daß der Zähler der obigen Differenz in der Nähe des Ursprungs nie verschwindet, also definit ist, müssen die Koeffizienten von  $f_3$  so bestimmt werden, daß



alle Koeffizienten der Glieder dritten Grades in der Differenz verschwinden. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} -A_{21} + B_{20} &= 0, \\ -2A_{12} + 3A_{20} + B_{21} &= 0, \\ -3A_{03} + 2A_{21} + B_{12} &= 0, \\ A_{12} + B_{03} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich die vier Unbekannten  $A_{i(3-0)}$  bestimmen. Das Polynom  $f_3$  ist dann so beschaffen, daß im Zähler der Differenz die Glieder dritten Grades wegfallen.

Betrachtet man nun die Glieder vierten Grades, so erhält man den Ausdruck:

$$-x f_{4y} - p_2 f_{3y} - 2y p_2 + y f_{4x} + q_2 f_{3x} + 2x q_2$$

oder

$$(-x f_{4y} + y f_{4x}) + (-p_2 f_{3y} - 2y p_2 + q_2 f_{3x} + 2x q_2).$$

Auch hier ist der zweite Klammerausdruck ein Polynom vierten Grades  $B_{40}x^4 + B_{31}x^3y + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{04}y^4$  mit bekannten Koeffizienten. Zwar hängen die  $B_{i(4-0)}$  von den Koeffizienten  $A_{i(3-0)}$  des Polynoms  $f_3$  ab, aber diese Koeffizienten sind nach dem Vorhergehenden lineare Funktionen der Koeffizienten von  $p_2$  und  $q_2$ . In die  $B_{i(4-0)}$  gehen demnach nur die Koeffizienten von  $p_2$ ,  $p_3$  und  $q_2$ ,  $q_3$  ein.

Der erste Klammerausdruck ist:

$$\begin{aligned} (-x f_{4y} + y f_{4x}) &\equiv -x(A_{21}x^3 + 2A_{22}x^2y + 3A_{13}xy^2 + 4A_{04}y^3) \\ &\quad + y(4A_{40}x^3 + 3A_{31}x^2y + 2A_{22}xy^2 + A_{13}y^3) \\ &\equiv -A_{21}x^4 + (-2A_{22} + 4A_{40})x^3y \\ &\quad + (-3A_{13} + 3A_{31})x^2y^2 + (-4A_{04} + 2A_{22})xy^3 \\ &\quad + A_{13}y^4. \end{aligned}$$

Wollte man nun die  $A_{i(4-0)}$  wieder so bestimmen, daß im Zähler der Differenz die Glieder vierten Grades verschwinden, so bekäme man die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} -A_{21} + B_{40} &= 0, & -2A_{22} + 4A_{40} + B_{31} &= 0, \\ -3A_{13} + 3A_{31} + B_{22} &= 0, & -4A_{04} + 2A_{22} + B_{13} &= 0, \\ A_{13} + B_{04} &= 0; \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist im allgemeinen nicht lösbar, da die ersten drei Gleichungen nur die zwei Unbekannten  $A_{21}$  und  $A_{13}$  enthalten, wogegen die drei Unbekannten  $A_{40}$ ,  $A_{22}$  und  $A_{04}$  aus den zwei übrigen Gleichungen nicht eindeutig bestimmt werden. Es ist im allgemeinen also nicht möglich, die Glieder vierten Grades zum Verschwinden zu

bringen; dagegen läßt es sich erreichen, daß die Koeffizienten von  $x^3 y$ ,  $x^2 y^2$  und  $x y^3$  verschwinden, während die Koeffizienten von  $x^4$  und  $y^4$  gleich werden. Es sind also die vier Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} -A_{31} &+ B_{40} = A_{13} + B_{04}, \\ -3A_{13} + 3A_{31} + B_{22} &= 0, \\ -2A_{22} + 4A_{40} + B_{21} &= 0, \\ -4A_{04} + 2A_{22} + B_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die unbekannten Koeffizienten  $A_{13}$  und  $A_{31}$  eindeutig, die andern,  $A_{40}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{04}$ , dagegen unendlich vieldeutig bestimmen. Für  $A_{31}$  erhält man den Wert

$$A_{31} = \frac{1}{3}(3B_{40} - B_{22} - 3B_{04});$$

der Koeffizient von  $x^4$  und  $y^4$  ist demnach

$$-A_{31} + B_{40} = \frac{1}{3}(3B_{40} + B_{22} + 3B_{04}).$$

Diesen Ausdruck bezeichne ich im folgenden mit  $D_1$  und nenne ihn die *erste Strudelgröße*.

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Strudelgröße  $D_1$  ist positiv. Die Differenz  $y' - y'_1$  ist dann ein Ausdruck, dessen Zähler mit den Gliedern  $D_1(x^4 + y^4)$  beginnt. Es gibt also um den Ursprung herum einen Kreis, in welchem der Zähler definit positiv ist. Die beiden Feldrichtungen stimmen demnach nie miteinander überein. Die Lösungen der Vergleichsdifferentialgleichung werden dargestellt durch die Schar der geschlossenen Kurven  $x^3 + y^3 + f_3 + f_4 = c$ ; da diese Kurven nie von den Integralkurven der gegebenen Differentialgleichung berührt werden, sind die Koordinaten der zu einer Integralkurve gehörenden Punkte in der Nähe des Ursprungs eindeutige Funktionen des Parameters  $c$ . Die Lösungen werden in einer bestimmten Umgebung des Ursprungs aber auch durch eindeutige Funktionen des Polarwinkels  $\varphi$  dargestellt, denn die Feldrichtung stimmt in der Nähe des Ursprungs nie mit der Richtung der Ursprungsgeraden durch den Feldpunkt überein. Daraus folgt, daß jede Lösung der vorgelegten Differentialgleichung die Werte  $c$  und  $\varphi$  einander eindeutig und umkehrbar zuordnet. Ist  $D_1$  positiv, so durchläuft man mit wachsendem  $\varphi$  die  $c$ -Werte in fallender Richtung, d. h. die Integralkurven sind Spiralen, die sich im positiven Umlaufsinne asymptotisch dem Ursprung nähern.

2.  $D_1$  ist negativ. Die Integralkurven sind Spiralen mit negativem Umlaufssinn.

3.  $D_1 = 0$ . Im Zähler der Differenz verschwinden die Glieder vierten Grades. Aus dem Vergleich der beiden Differentialgleichungen läßt sich nichts über die Gestalt der Integralkurven der vorgegebenen

Differentialgleichung aussagen. Es besteht also in diesem Falle die Möglichkeit, daß ein Wirbel auftritt. Demnach ist das Verschwinden der ersten Strudelgröße eine *notwendige* Bedingung für das Auftreten eines Wirbels. Diese Bedingung wird später als *erste Wirbelbedingung* bezeichnet.

In den ersten beiden Fällen ist die Frage Wirbel oder Strudel entschieden. Im dritten Fall braucht man zur Entscheidung eine Vergleichsdifferentialgleichung, deren Integralkurven sich den Integralkurven der gegebenen Differentialgleichung in der Nähe des Ursprungs näher anschmiegen. Man bestimmt also das Polynom  $f_3(x, y)$  so, daß im Zähler der Differenz die Glieder fünften Grades wegfallen. Überträgt man sinngemäß die frühere Bezeichnungsweise, so hat man folgende Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned} -A_{41} + B_{50} &= 0, \\ -2A_{32} + 5A_{50} + B_{41} &= 0, \\ -3A_{32} + 4A_{41} + B_{32} &= 0, \\ -4A_{14} + 3A_{32} + B_{33} &= 0, \\ -5A_{05} + 2A_{32} + B_{14} &= 0, \\ A_{14} + B_{05} &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind die  $B_{i(5-i)}$  Ausdrücke in den Koeffizienten von  $p_3, p_2, p_1$  und  $q_3, q_2, q_1$ . Aus diesen Gleichungen lassen sich die  $A_{i(5-i)}$  eindeutig bestimmen. Zur Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms  $f_4$  erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -A_{51} + B_{00} &= 0, & -2A_{42} + 6A_{00} + B_{51} &= 0, \\ -3A_{32} + 5A_{51} + B_{42} &= 0, & -4A_{24} + 4A_{42} + B_{32} &= 0, \\ -5A_{15} + 3A_{32} + B_{24} &= 0, & -6A_{06} + 2A_{24} + B_{15} &= 0, \\ A_{15} + B_{06} &= 0; \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist wieder im allgemeinen nicht lösbar, weil vier Gleichungen nur die drei Unbekannten  $A_{51}, A_{32}, A_{15}$  enthalten. Man erhält ein lösbares System, wenn man nur verlangt, daß die Koeffizienten von  $x^5$  und  $y^5$  gleich werden, nicht auch, daß sie verschwinden. Anstatt der vier obigen Gleichungen erhält man die drei neuen:

$$\begin{aligned} -A_{51} + B_{00} &= A_{15} + B_{06}, \\ -3A_{32} + 5A_{51} + B_{42} &= 0, \\ -5A_{15} + 3A_{32} + B_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:  $A_{51} = -\frac{1}{16}(-5B_{00} + B_{42} + B_{24} + 5B_{06})$ . Also ist der Koeffizient von  $x^5$  bzw.  $y^5$ :  $D_5 = -A_{51} + B_{00} = \frac{1}{16}(5B_{00} + B_{42} + B_{24} + 5B_{06})$ . Dieser Ausdruck ist die *zweite Strudelgröße*, denn sie

hat im Hinblick auf die Frage Wirbel oder Strudel dieselbe Bedeutung wie die Größe  $D_1$ . Demnach ist  $D_1 = 0$  die zweite Wirbelbedingung, d. h. eine zweite Bedingung, die für das Auftreten eines Wirbels notwendig ist.

Nach dem Früheren sind die Koeffizienten  $A_{10}$ ,  $A_{20}$ ,  $A_{01}$  nicht eindeutig bestimmt, sondern von einem Parameter abhängig, über den man willkürlich verfügen kann. Dieser Parameter geht auch in die Koeffizienten  $B_{1(5-0)}$  und  $B_{1(6-0)}$  ein, scheinbar also auch in die Größe  $D_1$ . Die Rechnung ergibt, daß dies nicht der Fall ist, ein Ergebnis, das wegen der geometrischen Bedeutung von  $D_1$  naheliegt.

Das Verfahren muß so lange fortgesetzt werden, bis man zu einer nicht verschwindenden Strudelgröße kommt. Beim Auftreten eines Wirbels kommt dieser Fall nie vor. Es ist noch nachzuweisen, daß umgekehrt aus dem Verschwinden aller Strudelgrößen das Vorhandensein eines Wirbels folgt, mit anderen Worten, daß die unendlich vielen Wirbelbedingungen nicht nur notwendig, sondern auch *hinreichend* sind.

Zum Beweise führe man in die vorgelegte Differentialgleichung Polarkoordinaten ein. Man erhält dadurch eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{r'}{r} = \frac{r g_1 + r^2 g_2 + \dots}{1 + r h_1 + r^2 h_2 + \dots},$$

wobei die  $g_i$  und  $h_i$  Polynome in  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  sind. Da der Nenner für  $r = 0$  den Wert 1 hat, gibt es einen Bereich  $r < k$ , in welchem der Nenner nie verschwindet. In diesem Bereich gilt die Abschätzung:

$$\left| \frac{r'}{r} \right| < M.$$

Betrachtet man nun die Integralkurve durch den Punkt  $(r_0, 0)$ ,  $r_0 < k$ , so folgt aus dieser Abschätzung, daß diese Kurve im Innern des Bereiches  $r < k$  zwischen den beiden Kurven  $r = r_0 e^{M\varphi}$  und  $r = r_0 e^{-M\varphi}$  verläuft. Die erste der beiden Kurven schneidet die Gerade  $\varphi = 2\pi$  in einem Punkt mit dem Modul  $r_1 = r_0 e^{2\pi M}$ . Wählt man demnach  $r_0 < k_1$ ,

wobei  $k_1 = \frac{k}{e^{2\pi M}}$  ist, so bleibt die Integralkurve für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  sicher im Innern des obigen Bereiches. Dasselbe gilt auf Grund der Abschätzung auch für alle Näherungskurven, die die Methode der sukzessiven Approximation, ausgehend von  $r = r_0$ , liefert. Alle diese Näherungen erhält man in der analytischen Form  $r = r_0 w_1 + r_0^2 w_2 + r_0^3 w_3 + \dots$ , wobei die  $w_i$  Ausdrücke in  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  und  $\varphi$  sind. Da alle Kurven für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  im Bereich  $r < k$  bleiben, in dem der Nenner der Differentialgleichung nie verschwindet, erhält man für die Feldrichtung auf irgend einer Näherungskurve eine Reihe, die sicher für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  konvergent ist. Also ist auch die Reihe für die nächstfolgende Näherung in diesem

Intervall jeweils konvergent. Da aber die Grenzkurve existiert und beschränkt ist, konvergiert die sie darstellende Reihe ebenfalls. Speziell für  $\varphi = 2\pi$  erhält man die Reihe:

$$\varrho = r_0 w_1(2\pi) + r_0^3 w_3(2\pi) + \dots$$

oder in anderer Bezeichnungsweise

$$\varrho = r_0 C'_1 + r_0^3 C'_3 + r_0^5 C'_5 + \dots$$

Die Konstanten  $C'_i$  sind dabei Ausdrücke, die von den Koeffizienten der ursprünglichen Differentialgleichung abhängen. Um die Größen  $\varrho$  und  $r_0$ , die in der  $(xy)$ -Ebene die Abszissen zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte einer Integralkurve mit der  $x$ -Achse darstellen, miteinander zu vergleichen, bilde man die Funktion

$$r_0 - \varrho = r_0(1 - C'_1) - r_0^3 C'_3 - r_0^5 C'_5 - \dots$$

oder

$$\psi(r_0) = r_0 - \varrho = C_1 r_0 + C_3 r_0^3 + C_5 r_0^5 + \dots$$

Diese Reihe konvergiert sicher für  $r_0 < k_1$ .

Für einen Wirbel verschwindet die Differenz  $r_0 - \varrho$  identisch. Also sind für einen Wirbel notwendigerweise alle  $C_i$  gleich Null. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden aller  $C_i$ , daß die Integralkurven im Bereich  $r < k_1$  geschlossen sind, daß also ein Wirbel vorliegt. Die Bedingungen  $C_i = 0$  sind also notwendig und hinreichend für das Zustandekommen eines Wirbels. Es ist also noch nachzuweisen, daß die Wirbelbedingungen  $D_i = 0$  gleichwertig sind mit den Bedingungen  $C_i = 0$ .

Es sei  $y' = \frac{Z}{N}$  eine Strudeldifferentialgleichung mit  $D_i = 0$  für  $i < n$  und  $D_n \neq 0$ . Die zugehörige Vergleichsdifferentialgleichung sei  $\bar{y}' = \frac{Z_1}{N_1}$ , so daß also die Differenz  $ZN_1 - Z_1N$  ein Polynom oder eine konvergente Reihe mit den Anfangsgliedern  $D_n(x^{2n+2} + y^{2n+2})$  ist. Führt man Polarkoordinaten ein, so erhalten die beiden Differentialgleichungen die Formen:

$$r' = r \frac{Z \sin \varphi + N \cos \varphi}{Z \cos \varphi - N \sin \varphi} \quad \text{und} \quad \bar{r}' = r \frac{Z_1 \sin \varphi + N_1 \cos \varphi}{Z_1 \cos \varphi - N_1 \sin \varphi},$$

wobei in  $Z, N, Z_1, N_1$ ,  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  zu setzen ist. Für die Differenz der Feldrichtungen in einem Punkt erhält man den Ausdruck:

$$r' - \bar{r}' = \frac{r(NZ_1 - N_1Z)}{(Z \cos \varphi - N \sin \varphi)(Z_1 \cos \varphi - N_1 \sin \varphi)}.$$

Nun ist:

$$NZ_1 - N_1Z = -r^{2n+2} \cdot D_n(\cos^{2n+2} \varphi + \sin^{2n+2} \varphi) + \text{Gl. höherer Ordn.}$$

$$Z \cos \varphi - N \sin \varphi = r + \text{Gl. höherer Ordnung}$$

$$Z_1 \cos \varphi - N_1 \sin \varphi = r + \text{Gl. höherer Ordnung.}$$

Demnach gilt für hinreichend kleine  $r$  die Abschätzung:

$$|\tau' - \bar{\tau}'| < r^{3n+1} M'.$$

Nach dem Vorhergehenden erhält man aber die beiden Integralkurven durch den Punkt  $(r_0, 0)$  in der Form:

$$r = r_0 w_1 + r_0^3 w_3 + r_0^5 w_5 + \dots$$

$$\bar{r} = r_0 \bar{w}_1 + r_0^3 \bar{w}_3 + r_0^5 \bar{w}_5 + \dots$$

Beide Integralkurven genügen im Bereich  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  für hinreichend kleine  $r_0$  der Abschätzung:  $r < f r_0$ ; im selben Bereich gilt also für die Differenz der Feldrichtungen die Abschätzung:

$$|\tau' - \bar{\tau}'| < r_0^{3n+1} M'' \quad (M'' = f^{3n+1} M').$$

Also muß  $w_i = \bar{w}_i$  sein für alle  $i \leq 2n$ . Folglich müssen in der obigen Bezeichnung auch alle  $C_i$  für  $i \leq 2n$  mit den entsprechenden  $\bar{C}_i$  übereinstimmen. Da die Vergleichsdifferentialgleichung aber geschlossene Kurven zur Lösung hat, sind alle  $\bar{C}_i = 0$ . Aus  $D_i = 0$  für  $i < n$  folgt demnach  $C_i = 0$  für  $i \leq 2n$ . Verschwinden also alle  $D_i$ , so verschwinden auch alle  $C_i$ ; d. h. *die unendlich vielen Wirbelbedingungen sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für das Auftreten eines Wirbels.*

Diese Aussage ist nicht gleichbedeutend mit der Behauptung, daß die am Anfang dieses Kapitels entwickelte Methode unter allen Umständen konvergente Potenzreihen liefert; es ist also nicht nachgewiesen, daß Poincarés Annahme richtig ist, die Lösungen seien im Wirbelfall in der Form  $\Phi(x, y) = \text{Const.}$  darstellbar, wobei  $\Phi$  eine konvergente Potenzreihe in  $x$  und  $y$  ist (vgl. S. 397). Dagegen erweist sich die Methode, die er aus dieser Annahme herleitet, als brauchbar und richtig.

Folgerungen: 1. Die in der Einleitung als Fall 3 bezeichnete Möglichkeit (Strudel mit Grenzzykeln, die sich gegen den Ursprung hin häufen) kommt bei Differentialgleichungen der betrachteten Art nicht vor, weil die unendlich vielen Wirbelbedingungen hinreichen, einen Wirbel zu erzwingen. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die Voraussetzungen für den Beweis dieses Ergebnisses bei jeder Differentialgleichung von der Form  $y' = \frac{P}{Q}$  ( $P$  und  $Q$  Polynome oder konvergente Potenzreihen in  $x$  und  $y$ ) erfüllt sind. Deshalb kann diese Möglichkeit bei analytischen Differentialgleichungen überhaupt nicht auftreten<sup>5)</sup>.

2. Die Strudelgröße  $D_i$  enthält die Koeffizienten der Zusatzpolynome  $p_k$  und  $q_k$ , wobei  $k \leq (2i+1)$  ist. Ist also  $D_i \neq 0$ , so kann der Strudel durch Abwandlung der Zusatzpolynome höheren als  $(2i+1)$ -ten

<sup>5)</sup> Vgl. auch: L. Bieberbach „Differentialgleichungen“ I, 3, § 4.

Grades weder in einen Wirbel noch in einen Strudel mit anderem Umlaufssinn verwandelt werden. Infolgedessen brauchen diese Zusatzglieder auch keine Polynome zu sein; es genügt zu wissen, daß sie von höherer als  $(2i + 1)$ -ter Ordnung klein werden, um die Existenz eines Strudels nachweisen zu können.

3. Ist beim Auftreten eines Strudels  $D_i$ , die erste nicht verschwindende Strudelgröße, so haben Abänderungen in allen Gliedern, deren Grad nicht höher als  $(2i + 1)$  ist, Einfluß auf den Charakter der Integralkurven, d. h. aus einem Strudel kann ein Wirbel oder wenigstens ein Strudel mit anderem Umlaufssinn gemacht werden. Sind also in einer solchen Differentialgleichung die höchsten der vorkommenden Glieder niedrigeren als  $(2n + 1)$ -ten Grades, so wird der Strudelcharakter durch Hinzufügen von Gliedern *höheren* Grades beeinflusst, solange der Grad dieser Zusatzglieder die Zahl  $(2n + 1)$  nicht übersteigt. Ist beispielsweise eine Differentialgleichung vorgelegt, deren höchste Glieder vom 2. Grade sind, so kann durch passende Zufügung von Gliedern 3. Grades ein Strudel immer in einen Wirbel oder in einen Strudel mit anderem Umlaufssinn verwandelt werden. Sind dagegen die höchsten Glieder vom 3. Grad, so ändert ein Zufügen von Gliedern höheren Grades im allgemeinen nichts am Strudelcharakter der Integralkurven; eine Ausnahme bilden nur die Fälle, bei denen die erste Strudelgröße verschwindet, so daß der Strudelcharakter erst durch eine spätere Strudelgröße bestimmt wird. Hängt allgemein der Strudelcharakter von Gliedern *geraden* Grades ab, die zugleich die höchsten Glieder der Differentialgleichung sind, so kann der Charakter durch die nächsthöheren Glieder beeinflusst werden; sind aber diese bestimmenden, höchsten Glieder *ungeraden* Grades, so können die Glieder höherer Ordnung nur noch in speziellen Ausnahmen den Charakter der Integralkurven beeinflussen.

Beispiele:

$$1. \quad y' = -\frac{x + 4x^2 + y^2}{y + x^3 - 2y^3} \quad \text{Strudel mit } D_1 = -2,$$

dagegen:

$$y' = -\frac{x + 4x^2 + y^2 + 2x^3 - 2y^3}{y + x^3 - 2y^3 + 2x^5 - 2y^5} \quad \text{Wirbel mit den Lösungen} \\ (x^3 + y^3 + 2x^5 - 2y^5) e^{2(x+y)} = \text{Const.}$$

$$2. \quad y' = -\frac{x + 2x^2 + y^2}{y + x^2 y + y^3} \quad \text{Strudel mit } D_1 = -\frac{1}{2}, \text{ der also durch} \\ \text{weitere Zusatzglieder nicht mehr in einen Wirbel verwandelbar ist.}$$

Dagegen die Ausnahme:

$$3. \quad y' = -\frac{x + 4x^2 y + y^3}{y + 2x^3 + x y^3} \quad \text{Strudel mit } D_1 = D_2 = 0, D_3 = \frac{22}{25}$$



und

$$y' = -\frac{x + 4x^2y + y^3 + 2x^3y^2}{y + 2x^3 + xy^2 + 2x^4y} \quad \text{Wirbel mit den Lösungen} \\ (x^2 + y^3 + 2x^3y)e^{2xy} = \text{Const.}$$

4. Sind in einer Differentialgleichung die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome von einem Parameter  $\varepsilon$  abhängig, so geht dieser Parameter im allgemeinen auch in die Ausdrücke für die Strudelgrößen ein. Ebenso verändert sich die Funktion  $\psi(r_0)$  (s. S. 404), deren Nullstellen Grenzykel für das Integralkurvenfeld bedeuten, stetig mit dem Parameter  $\varepsilon$ . Ist für einen Parameterwert, z. B.  $\varepsilon = 0$ ,  $D_1 = 0$  und  $D_2 > 0$ , so ist  $\psi(r_0)$  für  $\varepsilon = 0$  und für kleine  $r_0$  positiv. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: a)  $D_1$  ist für kleine  $\varepsilon$  positiv; für kleine  $r_0$  ist  $\psi(r_0, \varepsilon) \geq \psi(r_0, 0)$ , d. h. die Spiralen der  $(xy)$ -Ebene nähern sich für kleine  $\varepsilon$  schneller dem Ursprung als für  $\varepsilon = 0$ . b)  $D_1$  ist für kleine  $\varepsilon$  negativ; für kleine  $r_0$  ist also  $\psi(r_0)$  negativ, während die stetige Änderung dieser Funktion es bedingt, daß sie für größere  $r_0$  noch positiv ist. Dazwischen ist also notwendigerweise eine Nullstelle; d. h. in der  $(xy)$ -Ebene tritt für kleine  $\varepsilon$  ein Grenzykel auf, der sich in den Ursprung zusammenzieht, wenn  $\varepsilon$  gegen Null geht.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x + x^3 + 2xy - y^3}{y - 2xy + y^3} \quad \text{Strudel mit } D_1 = 0 \text{ und } D_2 = -\frac{7}{16}.$$

$$y' = -\frac{x + (1 + \varepsilon)x^3 + 2xy - y^3}{y - 2xy + y^3} \quad \text{Strudel mit } D_1 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Der zweite Strudel hat also für kleine positive  $\varepsilon$  sicher einen Grenzykel, der sich für  $\varepsilon \rightarrow +0$  in den Ursprung zusammenzieht.

## § 2.

Die Wirbelbedingungen für die Differentialgleichung  $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  ( $P$  und  $Q$  Polynome mit beliebigen Anfangsgliedern).

In diesem Abschnitt wird zuerst der Fall behandelt, daß  $y'$  als Quotient zweier *homogener* Polynome gleichen Grades gegeben ist. Hernach wird gezeigt, daß ein so entstandener Strudel durch Zusatzglieder höherer Ordnung in seinem Charakter *nie* geändert werden kann. Zum Schluß wird das Verfahren zur Gewinnung der Wirbelbedingungen für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung angegeben, aus dem hervorgeht, daß die Voraussetzungen für die im vorigen Abschnitte gezogenen Schlüsse, und damit diese selbst, allgemeine Gültigkeit haben.

## a) Der Fall der homogenen Polynome.

Ist  $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ , wobei  $P$  und  $Q$  homogene Polynome  $(2n-1)$ -ten Grades sind, so erhält man eventuelle Integralgeraden durch den Ursprung aus der Gleichung:  $\frac{y}{x} = \frac{P}{Q}$ . Aus dieser Gleichung folgt das charakteristische Polynom  $G \equiv xP - yQ$ , dessen Nullstellen in diesem Fall die Integralgeraden, allgemein die ausgezeichneten Richtungen angeben, längs derer Integralkurven in die singuläre Stelle einmünden können. Dieses Polynom haben wir im Wirbel- und im Strudelfall als definit voranzusetzen.

Wendet man auf die Differentialgleichung wie gewöhnlich die Transformation  $y = ux$  an, so erhält man

$$u'x + u = \frac{P(x, ux)}{Q(x, ux)} = \frac{x^{2n-1} P(1, u)}{x^{2n-1} Q(1, u)} = \frac{p(u)}{q(u)}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{qu'}{p - uq}$$

oder

$$\log x = \int \frac{q}{p - uq} du.$$

Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Abszissen zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte einer Integralkurve mit der Geraden  $y = ux$ , so ist:

$$\log x_2 - \log x_1 = \int_{u_1}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du + \int_{-\infty}^{u_1} \frac{q}{p - uq} du$$

oder

$$\log \frac{x_2}{x_1} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du.$$

Nach der Bezeichnung des vorigen Abschnitts kann der Wert dieses Integrals *Strudelgröße* genannt werden, denn die notwendige und hinreichende *Wirbelbedingung* ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du = 0.$$

Dabei ist der Nenner des Integranden definit, denn er ergibt bei der Multiplikation mit  $x^{2n}$  das charakteristische Polynom  $G(x, ux)$ . Also kann man bei der Integration durch Partialbruchzerlegung nur erhalten:

1. Rationale gebrochene Funktionen in  $u$ , die für die angegebenen Grenzen die Werte 0 annehmen, die also keinen Beitrag zum bestimmten Integral liefern.

2. Logarithmen von quadratischen Ausdrücken in  $u$ ; auch diese liefern keinen Beitrag zum bestimmten Integral.

3. Arc tg-Funktionen von linearen Ausdrücken in  $u$ ; jede dieser Funktionen ergibt zwischen den beiden angegebenen Grenzen den Wert  $\pi$ . Bezeichnet man also die Koeffizienten dieser Funktionen mit  $d_i$ , so erhält man als Wert des bestimmten Integrals den Ausdruck  $\pi \sum d_i$  und damit die Wirbelbedingung in der algebraischen Form  $\sum d_i = 0$ .

Beispiel:

$$y' = \frac{x^3 + a x^2 y + b x y^2 + c y^3}{a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + y^3}.$$

Charakteristisches Polynom:  $G(x, y) \equiv x^4 + y^4$ .

Strudelgröße:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a + b u + c u^2 - u^3}{1 + u^4} du.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\frac{a + b u + c u^2 - u^3}{1 + u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{(a - c - \sqrt{2})u + a\sqrt{2} - 1 - b}{1 + \sqrt{2}u + u^2} - \frac{(a - c + \sqrt{2})u - a\sqrt{2} - 1 - b}{1 - \sqrt{2}u + u^2} \right].$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int \frac{(a - c - \sqrt{2})u + a\sqrt{2} - 1 - b}{1 + \sqrt{2}u + u^2} du &= \frac{1}{2} (a - c - \sqrt{2}) \log(u^2 + \sqrt{2}u + 1) \\ &\quad + (a + c - b\sqrt{2}) \operatorname{arctg}(\sqrt{2}u + 1), \\ \int \frac{(a - c + \sqrt{2})u - a\sqrt{2} - 1 - b}{1 - \sqrt{2}u + u^2} du &= \frac{1}{2} (a - c + \sqrt{2}) \log(u^2 - \sqrt{2}u + 1) \\ &\quad - (a + c + b\sqrt{2}) \operatorname{arctg}(\sqrt{2}u - 1). \end{aligned}$$

Nach der obigen Bezeichnung ist also:

$$d_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} (a + c - b\sqrt{2}),$$

$$d_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} (a + c + b\sqrt{2}).$$

Man erhält also geschlossene Kurven dann und nur dann, wenn

$$d_1 + d_2 = 0,$$

also wenn

$$a + c = 0$$

ist.

Sind die homogenen Polynome vom  $(2n-1)$ -ten Grad, so ergeben sich durch direkte Integration die Integrale in der Form:

$$F(x, y) = \prod_{i=1}^n q_i^{a_i} \cdot \prod_{i=1}^n e^{d_i f_i(u)} = \text{Const.},$$

wobei die  $q$ , die quadratischen (definiten) Faktoren des charakteristischen Polynoms, die  $f$ , dagegen entweder rational gebrochene Funktionen mit definitivem Nenner oder  $\arctg$ -Funktionen von linearen Ausdrücken, beide in  $u = \frac{y}{x}$ , sind. Die Funktion  $F(x, y)$  hat also im allgemeinen im Ursprung eine wesentlich singuläre Stelle; die durch sie dargestellte Fläche hat im selben Punkt eine Verzweigungsstelle. Bei einem in sich geschlossenen Umlauf um den Ursprung wächst der Wert der Funktion  $F$  um den Betrag  $2\pi \sum d_i$ , wenn die  $d_i$  die Koeffizienten der oben erwähnten  $\arctg$ -Funktionen sind. Ist also diese Summe gleich Null, so bleibt man bei einem Umlauf um den Ursprung im selben Zweig der Fläche; die Horizontalschnitte der Fläche, d. h. die Integralkurven der Differentialgleichung, sind also geschlossen. Aber sie können im allgemeinen nicht in der Form  $\Phi(x, y) = \text{Const.}$  angeschrieben werden, wenn  $\Phi$  eine konvergente Potenzreihe in  $x$  und  $y$  sein soll. Poincarés Annahme (s. S. 397) gilt also sicher nicht allgemein. Nur im Falle  $n = 1$ , d. h. bei Differentialgleichungen mit linearen Polynomen, können geschlossene Kurven nur dann auftreten, wenn der eine Koeffizient  $d$  der  $\arctg$ -Funktion verschwindet. Also muß ein Wirbel identisch sein mit der Kurvenschar  $q = \text{Const.}$ , die durch eine projektive Transformation auf die Schar der konzentrischen Kreise zurückgeführt werden kann.

b) *Der Charakter eines Strudels einer Differentialgleichung mit homogenen Polynomen  $P$  und  $Q$  kann durch Zusatzglieder höheren Grades nicht beeinflußt werden.*

Es sei  $y' = \frac{P}{Q}$ , wobei  $P$  und  $Q$  homogene Polynome  $(2n-1)$ -ten Grades sind, eine Struldifferentialgleichung, d. h. die Strudelgröße

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du \quad \left( p = \frac{P(x, ux)}{x^{2n-1}}, q = \frac{Q(x, ux)}{x^{2n-1}} \right)$$

sei von Null verschieden. Bildet man die neue Differentialgleichung vom selben Typus  $y' = \frac{P + d y^{2n-1}}{Q + d x y^{2n-2}}$ , so erhält man als neue Strudelgröße den Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q + d u^{2n-2}}{p - uq} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{p - uq} du + d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2n-2}}{p - uq} du.$$

Der Integrand des zweiten Teiles ist definit; also kann dieser Teil weder Null, noch (seinem Aufbau nach) Unendlich sein. Der Koeffizient  $d$  kann also immer so bestimmt werden, daß die Strudelgröße der zweiten Differentialgleichung verschwindet, daß ihre Integralkurven also einen Wirbel bilden.

Man betrachte nun die Differentialgleichung  $y' = \frac{P+f(x,y)}{Q+g(x,y)}$ , wobei die Zusatzfunktionen  $f$  und  $g$  klein sein sollen gegenüber den Polynomen  $P$  und  $Q$ ; d. h.  $f$  und  $g$  genügen den Gleichungen

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x|^{2n-1} + |y|^{2n-1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{g(x,y)}{|x|^{2n-1} + |y|^{2n-1}} = 0.$$

Diese Differentialgleichung wird verglichen mit der Wirbeldifferentialgleichung  $y'_1 = \frac{P + d y^{2n-1}}{Q + d x y^{2n-1}}$ , indem man die Differenz der beiden Feldrichtungen bildet. Man erhält dabei:

$$y' - y'_1 = \frac{d y^{2n-2} (x P - y Q) + f (Q + d x y^{2n-1}) - g (P + d y^{2n-1})}{(Q + g) (Q + d x y^{2n-1})}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner dieses Bruches durch  $x^{2n} y^{2n-2}$ , so werden die zwei letzten Glieder des Zählers bei Annäherung an den Ursprung nach Voraussetzung zu Null, während das erste Glied einen von der Annäherungsrichtung abhängigen Grenzwert hat. Alle diese Grenzwerte bilden aber eine definite Menge, da der erste Klammerausdruck das charakteristische Polynom ist. Also gibt es um den Ursprung herum einen Bereich, in dem der Zähler der Differenz nie verschwindet, in welchem also die beiden Feldrichtungen nie übereinstimmen. Da aber die Lösungen der Vergleichsdifferentialgleichung geschlossene Kurven sind, können sich in diesem Bereich die Integralkurven der vorgegebenen Differentialgleichung nicht schließen. Wir haben also einen Strudel und zwar mit demselben Umlaufssinn wie bei der vereinfachten Differentialgleichung  $y' = \frac{P}{Q}$ .

c) Die Wirbelbedingungen bei Differentialgleichungen mit höheren Anfangsgliedern.

Sind die Anfangsglieder in Zähler und Nenner der Differentialgleichung nicht vom ersten Grad, so kann das im vorigen Abschnitt entwickelte algebraische Verfahren nicht angewandt werden, d. h. man kommt mit Vergleichsdifferentialgleichungen, deren Lösungen algebraische Kurvenscharen sind, nicht zum Ziel. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen im Anfang dieses Abschnittes. Um die Möglichkeit allgemeinerer Differentialgleichungen zu haben, kann man Polarkoordinaten einführen. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P_n(x,y) + P_{n+1} + P_{n+2} + \dots}{Q_n(x,y) + Q_{n+1} + Q_{n+2} + \dots}$$

( $P_i$  und  $Q_i$  homogene Polynome  $i$ -ten Grades) geht dadurch über in

$$r' = \frac{r P_{n+1} + r^2 P_{n+2} + r^3 P_{n+3} + \dots}{r Q_{n+1} + r^2 Q_{n+2} + r^3 Q_{n+3} + \dots}$$

wobei

$$p_{n+i+1} = \sin \varphi P_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) + \cos \varphi Q_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

und

$$q_{n+i+1} = \cos \varphi P_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) - \sin \varphi Q_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

ist. Als Vergleichsdifferentialgleichung benutzt man

$$r' = - \frac{r f_0 + r^2 f_1' + r^3 f_2 + \dots}{f_0 + 2 r f_1 + 3 r^2 f_2 + \dots}$$

mit den Lösungen

$$f(r, \varphi) \equiv r f_0(\varphi) + r^2 f_1(\varphi) + r^3 f_2(\varphi) + \dots = \text{Const.}$$

Dabei sind die  $f_i$  unbekannte, aber passend zu bestimmende, von  $\varphi$  abhängige Koeffizientenfunktionen. Bildet man zur Vergleichung die Differenz der Feldrichtungen, so erhält man im Zähler die Reihe:

$$r(q_{n+1}f_0' + p_{n+1}f_0) + r^2(q_{n+1}f_1' + 2p_{n+1}f_1 + f_0q_{n+2} + f_0p_{n+2}) + \dots$$

Nun kann man erreichen, daß dieser Zähler identisch verschwindet, wenn man die  $f_i$  aus linearen Differentialgleichungen von der Form

$$q_{n+1}f_i' + (i+1)p_{n+1}f_i + R_i = 0$$

bestimmt, wobei die Funktion  $R_i$  die Ausdrücke  $p_{n+k}$ ,  $q_{n+k}$ ,  $f_{k-2}$  für  $k \leq (i+1)$  enthält. *Notwendig und hinreichend für das Auftreten eines Wirbels ist, daß alle so bestimmten Funktionen  $f_i$  die Periode  $2\pi$  haben.*

Die Bedingungen sind *notwendig*; denn ist  $f_k$  die erste Funktion, die auf Grund der Differentialgleichung  $q_{n+1}f_k' + (k+1)p_{n+1}f_k + R_k = 0$  nicht periodisch wird, so gibt es, da die Lösungen der verkürzten Differentialgleichung  $q_{n+1}f_k' + (k+1)p_{n+1}f_k = 0$  und der Koeffizient  $q_{n+1}$  von  $f_k$  nach Voraussetzung periodische, *definite* Funktionen sind, eine ganz bestimmte Konstante  $D_k$ , so daß die Lösungen der Differentialgleichung  $q_{n+1}f_k' + (k+1)p_{n+1}f_k + R_k = D_k$  periodisch sind. Benutzt man nun die Schar der geschlossenen Kurven  $r f_0 + r^2 f_1 + \dots + r^{k+1} f_k = \text{Const.}$  zum Vergleich mit der vorgelegten Differentialgleichung, indem man die Differenz der beiden Feldrichtungen bildet, so verschwinden im Zähler dieser Differenz alle Koeffizienten von  $r^i$  für  $i \leq k$ , während bei  $r^{k+1}$  die Konstante  $D_k$  als Koeffizient auftritt. Also gibt es um den Ursprung herum einen Bereich, in dem dieser Zähler nie verschwindet, in dem also die beiden Feldrichtungen nie übereinstimmen. Also kann die vorgelegte Differentialgleichung in diesem Bereich keine geschlossenen Integralkurven haben. Das Vorzeichen von  $D_k$  entscheidet über den Umlaufssinn der Spiralen; der Konstanten  $D_k$  kommt die Bedeutung der *Strudelgröße* zu.

Die Bedingungen sind *hinreichend*, denn der Beweis, der im vorigen Abschnitt mit Hilfe von Polarkoordinaten geführt wurde, kann wörtlich übertragen werden.

Die Bedingungen sind auch eindeutig, obwohl jede Differentialgleichung unendlich viele Lösungen hat. Denn zwei Lösungen unterscheiden sich nur um ein Vielfaches einer Lösung der verkürzten Differentialgleichung, die immer dann periodisch ist, wenn die ersten homogenen Glieder der ursprünglichen Differentialgleichung einen Wirbel ergeben. Also ist für alle Lösungen die Differenz  $f(0) - f(2\pi)$  dieselbe.

Sind die Anfangsglieder  $-x$  und  $y$ , so ist  $p_{n+1} = 0$ ,  $q_{n+1} = 1$ . Die Differentialgleichungen haben also die vereinfachte Form  $f_i + R_i = 0$ . Sind in diesem Fall die Funktionen  $f_i$  periodisch, so lassen sie sich als homogene Polynome in  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  anschreiben. Die Bestimmung ihrer Koeffizienten führt auf Gleichungssysteme, die mit denen des vorigen Abschnitts (s. S. 400 bis 402) übereinstimmen. Der dort auffallende Unterschied zwischen den Polynomen geraden und ungeraden Grades (nur die Polynome geraden Grades liefern eine Wirbelbedingung!) ist keine besondere Eigenschaft des einfachen Spezialfalls, sondern tritt allgemein auf. Die Differentialgleichung für  $f_0$  geht durch die Transformation  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$  in sich selbst über, weil  $p_{n+1}$  und  $q_{n+1}$  homogene Polynome geraden Grades in  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  sind. Daraus folgt, daß für ein periodisches  $f_0$  die Funktionsgleichung  $f_0(\varphi) = f_0(\varphi + \pi)$  gelten muß, daß also  $f_0$  nicht nur die Periode  $2\pi$ , sondern auch die Periode  $\pi$  hat. Die Differentialgleichung für  $f_1$  geht demnach nur durch die Transformation  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ ;  $f_1 \rightarrow -f_1$  in sich selbst über. Daraus folgt aber, daß sie eine, und nur eine, Lösung haben muß, die der Funktionsgleichung  $f_1(\varphi) = -f_1(\varphi + \pi)$  genügt. Diese Funktion ist aber notwendigerweise periodisch mit der Periode  $2\pi$ ; also haben alle Lösungen diese Periode, so daß keine besondere Wirbelbedingung hierin enthalten ist. Benutzt man für die weitere Entwicklung diese eindeutig bestimmte Funktion  $f_1$  mit der Funktionsgleichung  $f_1(\varphi) = -f_1(\varphi + \pi)$ , so geht die Differentialgleichung für  $f_2$  wieder durch die Transformation  $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$  in sich selbst über. Daraus folgt nicht ohne weiteres, daß  $f_2$  periodisch sein muß; ist es aber periodisch, so genügt es notwendigerweise der Gleichung  $f_2(\varphi) = f_2(\varphi + \pi)$ . Dabei gilt diese Beziehung für alle Lösungen der Differentialgleichung, so daß hier keine eindeutige Auslese erfolgt. Bei der Bestimmung von  $f_2$  tritt also die erste Wirbelbedingung auf. Ist diese erfüllt, so kann  $f_2$  wieder genau so gefunden werden, wie oben  $f_1$ , ohne daß dabei eine neue Wirbelbedingung auftritt. Bei  $f_3$  sind die Verhältnisse wieder wie bei  $f_2$  usw. Genau wie beim einfachen Fall lassen sich also die  $f_i$  mit ungeradem  $i$  eindeutig bestimmen, ohne daß besondere Bedingungen auftreten; bei der Bestimmung der  $f_i$  mit geradem Index treten die Wirbelbedingungen auf; die Funktionen aber sind unendlich vieldeutig bestimmt, wenn die Wirbelbedingungen erfüllt sind.



Die Wirbelbedingungen hängen demnach im allgemeinen Fall in derselben Weise von den Gliedern höherer Ordnung der Polynome ab, wie in dem einfachen Poincaréschen Fall, der im ersten Abschnitt behandelt wurde. Deshalb haben die dort aus dieser besondern Art der Abhängigkeit gezogenen Schlüsse auch allgemeine Gültigkeit. Insbesondere gilt allgemein, daß ein Strudel, der durch Glieder *geraden* Grades bedingt ist, durch die nächsthöheren Glieder immer beeinflußt werden kann. Sind dagegen die bestimmenden Glieder *ungeraden* Grades, so haben Glieder höherer Ordnung nur noch in bestimmten Ausnahmefällen einen Einfluß auf den Charakter der Integralkurven.

## § 3.

$$\text{Die Differentialgleichung } y' = - \frac{x + \text{Glieder 2. Grades}}{y + \text{Glieder 2. Grades}}$$

(Dulac'sches Problem).

Wendet man die Methode des ersten Abschnittes auf diese vereinfachte Differentialgleichung an, so erhält man ebenfalls unendlich viele Wirbelbedingungen, obwohl nur sechs willkürliche Koeffizienten auftreten. Die Wirbelbedingungen können also nicht voneinander unabhängig sein. Man könnte nun versuchen, eine Rekursionsformel für die Wirbelbedingungen zu finden, um aus ihr die „Matrix“ der unendlich vielen Bedingungen herzuleiten, also eine Gruppe von Bedingungen, aus welchen alle Wirbelbedingungen folgen. Diese Gruppe wird höchstens zwei Bedingungen enthalten, da schon zwei Bedingungen hinreichend sind, geschlossene algebraische Integralkurven zu erzwingen. Diese naheliegende Methode scheitert daran, daß man zu numerischen Rechnungen geführt wird, die durch ihre räumliche und zeitliche Ausdehnung jede Übersicht unmöglich machen. Im folgenden wird deshalb die andere Methode angewandt, auf Grund jeder neugewonnenen Wirbelbedingung alle Differentialgleichungen von der weiteren Untersuchung auszuschließen, bei denen sicher Strudelpunkte vorhanden sind. Dieselbe Methode verwendete Dulac in seiner Arbeit über diese Differentialgleichung<sup>4)</sup>; in der vorliegenden Arbeit wird aber nicht nur die Gruppe der für einen Wirbel notwendigen Bedingungen exakt angegeben, sondern das Ergebnis wird auch noch geometrisch ausgewertet. Beides fehlt bei Dulac.

Um die Rechnung einigermaßen zu vereinfachen, wird die Differentialgleichung in folgender Form geschrieben:

$$y' = - \frac{x + a x^2 + (2b + a) x y + c y^2}{y + b x^2 + (2c + \beta) x y + d y^2}.$$

Für  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$  erhält man als Lösungen eine algebraische Kurvenschar mit der Gleichung

$$\frac{1}{2}(x^3 + y^3) + \frac{a}{3}x^3 + bx^2y + cxy^2 + \frac{d}{3}y^3 = \text{Const.}$$

Für die erste Strudelgröße erhält man den Ausdruck

$$D_1 = \frac{1}{6}[\alpha(a+c) - \beta(b+d)].$$

Für einen Wirbel muß also die Beziehung gelten:

$$\alpha(a+c) = \beta(b+d).$$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

1. Es ist gleichzeitig  $(a+c) = 0$  und  $(b+d) = 0$ ; diese Eigenschaft erweist sich als invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems um den Ursprung.

2. Es verschwindet eine der beiden Größen und die andere ist von Null verschieden.

3. Beide Größen  $(a+c)$  und  $(b+d)$  sind von Null verschieden. Dreht man in diesem Fall das Koordinatensystem um den Winkel  $\varphi$ , bestimmt durch die Gleichung  $\tan \varphi = -\frac{a+c}{b+d}$ , so wird die Größe  $(a+c)$  zu Null,  $(b+d)$  aber bleibt von Null verschieden. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, kann man also annehmen, daß neben dem ersten Fall nur noch der zweite,  $(a+c) = 0$ ,  $(b+d) \neq 0$ , vorkommt.

Erster Fall:

$$\begin{aligned}(a+c) &= 0, \\ (b+d) &= 0.\end{aligned}$$

In diesem Fall liegen schon zwei Bedingungen vor, und es wird sich ergeben, daß diese beiden Bedingungen immer einen Wirbel bestimmen, daß sie also die Matrix von unendlich vielen Wirbelbedingungen sind.

Dreht man die Koordinatenachsen um einen Winkel  $\varphi$ , so erhält  $x^2$  im Zähler der transformierten Differentialgleichung den Koeffizienten  $\bar{a}$ , bestimmt durch die Gleichung ( $c = -a$ ,  $d = -b$  gesetzt):

(1)  $\bar{a} = a \cos^3 \varphi + (\alpha + 3b) \cos^2 \varphi \sin \varphi + (\beta - 3a) \cos \varphi \sin^2 \varphi - b \sin^3 \varphi$ .  
Es läßt sich also  $\varphi$  immer so bestimmen, daß  $\bar{a} = 0$  wird. Die neue Differentialgleichung hat also die Form:

$$y' = -\frac{x}{y + bx^2 + cxy - by^2}.$$

Daraus sieht man, daß außer dem Ursprung immer noch eine zweite singuläre Stelle im Punkt  $(0, \frac{1}{b})$  und eine gerade Integralkurve,  $y = -\frac{1}{a}$ , vorhanden ist. Auf dieser Integralgeraden liegen die beiden anderen singulären Stellen, sofern sie existieren.

Um die Singularität im Ursprung zu untersuchen, schaffe man den singulären Punkt  $(0, \frac{1}{b})$  durch die projektive Transformation  $x = \frac{\xi}{1+b\eta}$ ,  $y = \frac{\eta}{1+b\eta}$  ins Unendliche. Dadurch erhält man die Differentialgleichung

$$(2) \quad \eta' = - \frac{\xi [1 + (a+2b)\eta + b(a+b)\eta^2]}{\eta [1 + c\xi - b(a+b)\xi^2]},$$

bei der sich die Trennung der Variablen durchführen läßt. Aus

$$(3) \quad \frac{\eta \eta'}{(1+b\eta)[1+(a+b)\eta]} = - \frac{\xi}{1+c\xi-b(a+b)\xi^2}$$

erhält man durch Reihenentwicklung die Lösung in der Form

$$(4) \quad \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{3}[c\xi^3 + (a+2b)\eta^3] + \dots = \text{Const.},$$

oder in den ursprünglichen Koordinaten

$$(5) \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}[cx^3 - 3bx^2y + (a-b)y^3] + \dots = \text{Const.}$$

Die Reihe hat nach ihrer Konstruktion einen leicht zu bestimmenden, von Null verschiedenen Konvergenzbereich. Also sind die Integralkurven in der Nähe des Ursprungs geschlossen.

Damit wäre auf Grund der ursprünglichen Fragestellung dieser erste Fall erledigt; das Ziel kann aber weiter gesteckt werden, da das Integralkurvenfeld der ganzen Ebene übersehen werden kann.

Betrachtet man bei der Lösung der Differentialgleichung (3) die oben eingeführte Funktion (4) in ihrer ursprünglichen transzendenten Darstellungsform, ausgedrückt durch log- und arc tg-Funktionen, so findet man, daß der betrachtete Zweig dieser unendlich vieldeutigen Funktion für reelle Werte der Veränderlichen und der Funktion in dem ganzen Bereich eindeutig und stetig ist, in dem die Nenner nie verschwinden. Da außerdem der Ursprung das einzige Extremum in diesem Gebiet ist, nimmt die Funktion auf dem Rand des Bereiches den Wert  $+\infty$  an. Also ist dieser ganze Bereich mit geschlossenen Integralkurven bedeckt. Die Grenzen des Bereiches sind aber Geraden, die selbst Integralkurven sind. Diese letzten Ergebnisse gelten auch für die  $(x, y)$ -Ebene, wobei insbesondere die unendlich ferne Gerade, hervorgegangen aus  $1+b\eta=0$ , Integralkurve und damit eventuell Grenze des obigen Bereiches ist.

Um alle Möglichkeiten der Überdeckung der Ebene mit Integralkurven überblicken und ordnen zu können, gehe man von folgendem Satz aus, der nach dem Vorhergehenden fast selbstverständlich ist: Zu jeder reellen Wurzel der Gleichung (1) gehört eine reelle singuläre Stelle und eine reelle Integralgerade, und umgekehrt. Die Richtung vom Ursprung nach der singulären Stelle steht senkrecht auf der Integralgeraden. (Zusammenstellung im Anhang.)

Zweiter Fall:  $(a + c) = 0,$   
 $(b + d) \neq 0.$

Auf Grund der ersten Wirbelbedingung  $\alpha(a + c) = \beta(b + d)$  kann ein Wirbel nur auftreten, wenn  $\beta = 0$  ist. Nun sind zwei Unterfälle zu unterscheiden:

1.  $a = c = 0$ ; die Differentialgleichung, bei der die erste Wirbelbedingung erfüllt ist, hat die Form:

$$y' = -\frac{x + (2b + \alpha)xy}{y + bx^2 + dy^2} \quad \text{oder} \quad y' = -\frac{x + \alpha xy}{y + bx^2 + cy^2}.$$

Das Feld ist also symmetrisch in bezug auf die  $x$ -Achse; die Integralkurven sind demnach in der Nähe der singulären Stelle sicher geschlossen.

2.  $a = -c \neq 0$ ; durch eine Dehnung vom Ursprung aus kann erreicht werden, daß  $a = -c = 1$  ist. Die für geschlossene Kurven in Frage kommenden Differentialgleichungen haben also die Form

$$y' = -\frac{x + x^2 + (2b + \alpha)xy - y^2}{y + bx^2 - 2xy + dy^2}.$$

Für die zweite Strudelgröße erhält man, abgesehen von einem Zahlenfaktor, den Ausdruck:  $D_2 = \alpha^2(b + d) + 5\alpha(b + d)^2$ . Da  $(b + d) \neq 0$  ist, verschwindet  $D_2$  nur für  $\alpha = 0$  und für  $\alpha = -5(b + d)$ . Im ersten Fall stellt die Kurvenschar

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{3}x^3 + bx^2y - xy^2 + \frac{d}{3}y^3 = \text{Const.}$$

die Lösungen der Differentialgleichung dar; also tritt bestimmt ein Wirbel auf. Für die weitere Untersuchung ist demnach nur noch die Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{x + x^2 - (3b + 5d)xy - y^2}{y + bx^2 - 2xy + dy^2}$$

vorhanden. Für sie erhält man als dritte Strudelgröße

$$D_3 = (b + d)^2(bd + 2d^2 + 1).$$

Ein Wirbel kann also nur auftreten für  $b = -\frac{(2d^2 + 1)}{d}$ . Für  $d = 0$  ist  $D_3 \neq 0$ ; deshalb kann man auf die weiter zu untersuchende Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x + x^2 + \frac{d^2 + 3}{d}xy - y^2}{y - \frac{2d^2 + 1}{d}x^2 - 2xy + dy^2}$$

die Dehnungstransformation  $x = d\bar{x}$ ,  $y = d\bar{y}$  anwenden. Dadurch erhält man  $y' = -\frac{x + d\bar{x}^2 + (d^2 + 3)\bar{x}\bar{y} - d\bar{y}^2}{y - (2d^2 + 1)\bar{x}^2 - 2d\bar{x}\bar{y} + d^2\bar{y}^2}$ , und als vierte Strudelgröße

ein Polynom 13. Grades in  $d$  mit nur ungeraden Exponenten und lauter positiven Koeffizienten. Dieser Ausdruck verschwindet also nur für  $d = 0$ . Dies ist in Übereinstimmung damit, daß durch die uneigentliche Transformation für  $d = 0$  die Differentialgleichung symmetrisch wird, der Strudel also in einen Wirbel übergeht.

*Im zweiten Fall tritt ein Wirbel also nur dann auf, wenn entweder das Feld zu einer Ursprungsgeraden azialsymmetrisch ist oder die Differentialgleichung sich als vollständiges Differential einer algebraischen Funktion dritter Ordnung schreiben läßt.*

### Zusammenfassung.

Das Integralkurvenfeld der Differentialgleichung

$$y' = - \frac{x + ax^2 + (2b + a)xy + cy^2}{y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2}$$

hat den Ursprung in drei Fällen zum Wirbelpunkt, die durch folgende (algebraische oder geometrische) Bedingungen gekennzeichnet sind:

I. Fall:

$$(a + c) = 0 \quad \text{und} \quad (b + d) = 0.$$

Die drei singulären Stellen außerhalb des Ursprungs bilden ein Dreieck, das den Ursprung zum Höhenschnittpunkt hat.

II. Fall:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b + d}{a + c} = k \quad \text{und} \quad ak^3 - 3bk^2 + 3ck - d = 0.$$

Die vier singulären Stellen bilden ein Drachenviereck, dessen Symmetrieachse durch den Ursprung geht.

III. Fall:

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = 0.$$

Die vier singulären Stellen bilden ein Viereck. Jeder Dreistrahl vom Ursprung aus, bestehend aus

einer Vierecksseite,

der Parallelen zur Gegenseite,

dem Lot auf der andern, vom Ursprung ausgehenden Seite,

halbiert jede Strecke, die auf der vom Ursprung ausgehenden Diagonale senkrecht steht. Die Mitte der Strecke liegt auf dem letztgenannten Strahl.

### Anhang:

Die Wirbelkurvenbilder der Dulacschen Differentialgleichung.

Fall I:

$$(a + c) = 0,$$

$$(b + d) = 0.$$

Es treten insgesamt vier Integralgeraden auf, unter denen sich jeweils die unendlich ferne Gerade befindet. Die endlichen Geraden können zueinander nicht parallel sein. Das von ihnen gebildete Dreieck hat den Ursprung zum Höhenschnittpunkt.

Fallunterscheidungen:

A. Alle Geraden sind reell.

a) Es fallen keine Geraden zusammen (Fig. 1). (Fig. 1 ist, wie alle folgenden Figuren, *projektiv* zu betrachten; jede der gezeichneten Geraden kann als unendlich ferne Gerade angesehen werden, und umgekehrt.)



Fig. 1.



Fig. 2.

b) Zwei Geraden fallen zusammen (Fig. 2). Ist die Doppelgerade im Unendlichen, so stehen die beiden andern aufeinander senkrecht.

c) Drei Geraden fallen zusammen (Fig. 3).

d) Ausgearteter Fall: alle vier Geraden fallen im Unendlichen zusammen; die Integralkurven sind die konzentrischen Kreise.

B. Zwei Geraden sind nicht reell. Außer der unendlich fernen Geraden tritt immer noch eine reelle Integralgerade auf. Diese Gerade trennt die Ebene in zwei Teile. Der eine Teil, in dem der Ursprung liegt, ist immer von geschlossenen Integralkurven überdeckt. Im anderen Teil liegt der reelle Schnittpunkt der beiden konjugiert komplexen Integralgeraden als singulärer Punkt. Dieser Teil ist im allgemeinen mit spiralförmigen Integralkurven überdeckt. Nur in dem Fall, daß die Gerade durch die beiden singulären Punkte Symmetrieachse für das Richtungsfeld ist, sind beide Teile von geschlossenen Integralkurven überdeckt.

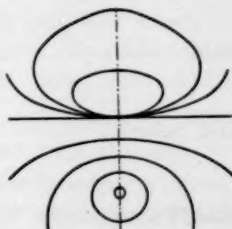


Fig. 3.

Fall II: *Symmetrische Felder*. Die Differentialgleichung

$$y' = - \frac{x + a x y}{y + b x^2 + c y^2}$$

hat zu speziellen Integralkurven:

- a) Die unendlich ferne Gerade.
- b) Die Gerade  $y = -\frac{1}{a}$ .
- c) Den Kegelschnitt  $x = A y^2 + 2 B y + C$ , wobei

$$A = -\frac{c}{a+b}; \quad B = \frac{c-a-b}{(a+b)(a+2b)}; \quad C = \frac{a+b-c}{b(a+b)(a+2b)}$$

ist. Singuläre Punkte sind:

- a) Auf der Symmetrieachse der Ursprung und der Punkt  $P(0, -\frac{1}{c})$ .
- b) Die Schnittpunkte der Integralgeraden mit dem Integralkegelschnitt.

Das Integralkurvenbild wird im wesentlichen durch drei Größen bestimmt:

1. Durch die Größe  $\frac{a-c}{c}$ . Ist diese Größe positiv, so ist die singuläre Stelle  $P$  ein Wirbelpunkt. Ist sie negativ, so tritt ein Sattelpunkt auf. Ist sie Null oder Unendlich, so tritt eine höhere Singularität auf.

2. Durch die Größe  $\frac{a-c}{b}$ . Ist diese Größe positiv, so sind die unter b) verzeichneten singulären Punkte reell. Ist sie negativ, so sind sie imaginär; ist sie Null, so fallen sie zusammen, d. h. Integralgerade und -kegelschnitt berühren sich.

3. Durch die Größe  $\frac{c}{a+b}$ . Ist sie positiv, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse; negativ, eine Hyperbel. Ist sie Null, so erhält man eine Parabel; ist sie Unendlich, so erhält man die doppelt zu zählende Integralgerade  $y = -\frac{1}{a}$ .

Durch eine projektive Transformation können die beiden Integralgeraden ineinander übergeführt werden. Aus

$$y' = - \frac{x + a x y}{y + b x^2 + c y^2}$$

wird dadurch

$$y' = - \frac{x + a x y}{y - (a+b) x^2 + (a-c) y^2}.$$

Diese Transformation führt demnach die erste Größe in ihren reziproken Wert, die zweite dagegen in die entgegengesetzte dritte, und die dritte in die entgegengesetzte zweite über. Differentialgleichungen mit verschiedenen



bestimmenden Größen können demnach *projektiv* gesehen trotzdem dieselben Integralkurvenbilder haben.

Fallunterscheidungen:

A. Die Wirbelfälle:  $\frac{a-c}{c}$  ist eine endliche, positive Zahl.

$$\frac{a-c}{b} \quad \frac{c}{a+b}$$

1. + + Fig. 4.
2. + - Unmöglich.
3. +  $\infty$  Unmöglich.
4. - + Die Ebene zerfällt durch die Integralgerade in zwei Teile, die beide mit geschlossenen Integralkurven überdeckt sind.
5. - - Projektives Bild von Fig. 4.
6. -  $\infty$  Wie bei Fall 4.
7.  $\infty$  + „ „ „ 4.
8.  $\infty$  - Unmöglich.
9.  $\infty$   $\infty$  „

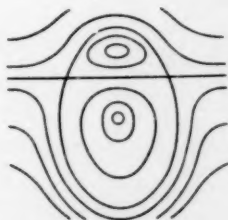


Fig. 4.

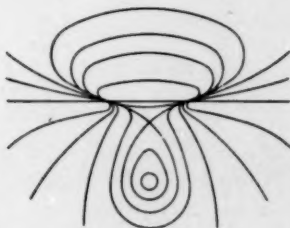


Fig. 5.

B. Die Sattelfälle:  $\frac{a-c}{c}$  ist eine endliche, negative Zahl.

$$\frac{a-c}{b} \quad \frac{c}{a+b}$$

1. + + Typenbild Fig. 5. Die Ellipse umschließt den Ursprung, wenn  $\frac{a+2b}{b}$  negativ ist. Ist  $a = -2b$ , so zerfällt die Ellipse in die beiden Integralgeraden.
2. + - Fig. 6 und Fig. 7, sowie ihre projektiven Bilder. Außerdem treten die Fälle auf, in denen die Hyperbeln in Geradenpaare zerfallen.
3. +  $\infty$  Fig. 5 (ohne Ellipse).

4. — + Fig. 8. Die Integralgerade kann auch mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Sie kann außerdem, vom Ursprung aus gesehen, dem Sattelpunkt gegenüber liegen.

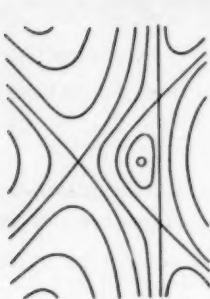


Fig. 6.

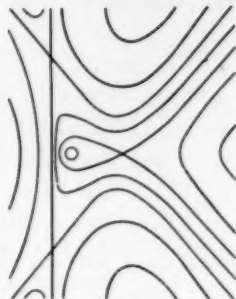


Fig. 7.



Fig. 8.

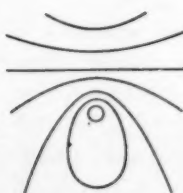


Fig. 9.

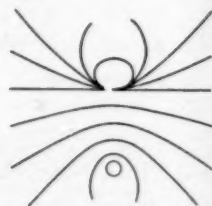


Fig. 10.

5. — — Projektives Bild von Fig. 5.  
 6. —  $\infty$  Fig. 8.  
 7.  $\infty$  + Fig. 8.  
 8.  $\infty$  — Fig. 8 mit entgegengesetzt liegender Integralgeraden.  
 9.  $\infty$   $\infty$  Fig. 8. Die Integralgerade liegt im Unendlichen.

C. Die Sonderfälle:

	$\frac{a-c}{c}$	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{c}{a+b}$
1.	0	0	+
2.	0	0	—
3.	0	0	$\infty$
4.	$\infty$	+	0
5.	$\infty$	—	0

Projektive Bilder der Fig. 9 (siehe unter 5.)  
Fig. 10.

Fig. 3.

Projektives Bild von Fig. 10.

Fig. 9. Die Singularität im Unendlichen sieht verschieden aus, je nachdem nur zwei oder unendlich viele Integralkurven in sie einmünden. Im letzten Fall kommt es darauf

an, ob die unendlich ferne Gerade beidseitig oder nur einseitig von diesem Integralkurvenbüschel berührt wird.

- |    |          |          |         |  |
|----|----------|----------|---------|--|
| 6. | $\infty$ | $\infty$ | 0       | Projektives Bild der Fig. 3.   |
| 7. | unbest.  | 0        | 0       | Fig. 11.   |
| 8. | 0        | unbest.  | 1       | Mannigfaltigkeit    unwesentlich    singulärer<br>Punkte: $y' = -\frac{x(1+ay)}{y(1+ay)}$ .  |
| 9. | $\infty$ | -1       | unbest. | Mannigfaltigkeit    unwesentlich    singulärer<br>Punkte: $y' = -\frac{x+axy}{y-ax^2}$ ;<br>Lösungen: $\frac{x^2+y^2}{(1+ay)^2} = \text{Const.}$ |

Fall III: *Algebraische Kurvenscharen dritter Ordnung.*

A. Mit einer reellen Asymptoten.

a) Außerhalb des Ursprungs gibt es nur noch eine reelle Singularität (Fig. 12).

b) Außerhalb des Ursprungs gibt es drei reelle, getrennt liegende Singularitäten (Fig. 13).



Fig. 11.

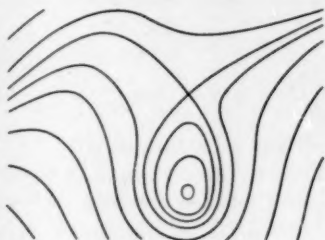


Fig. 12.

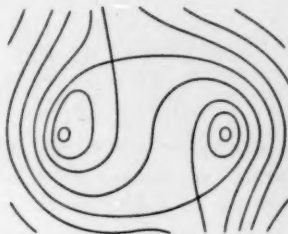


Fig. 13.

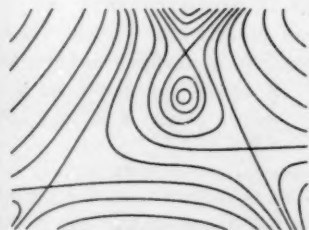


Fig. 14.

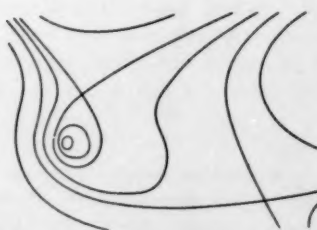


Fig. 15.

c) Außerhalb des Ursprungs gibt es eine Doppelsingularität und eine einfache Singularität. Die Gestalt der Integralkurven ergibt sich durch stetige Veränderung aus Fig. 13.

d) Außerhalb des Ursprungs gibt es eine dreifache Singularität. Das Feld ist axialsymmetrisch. Projektives Bild zu Fig. 9.

B. Mit *drei* reellen Asymptoten. In diesem Fall treten außerhalb des Ursprungs immer drei reelle, getrennt liegende Singularitäten auf, die alle zum Satteltyp gehören (Fig. 14).

C. Zwei Asymptotenrichtungen stimmen miteinander überein. In diesem Fall ist immer die unendlich ferne Gerade Doppelasymptote (Fig. 15).

D. Alle Asymptotenrichtungen stimmen miteinander überein. Das Feld ist axialsymmetrisch. Siehe dort B, 9.

(Eingegangen am 20. 6. 1933.)

# Über das Irrfahrtproblem.

Von

I. Petrowsky in Moskau.

## Zusammenfassung.

Es wird die stationäre Irrfahrt eines Punktes in einem mehrdimensionalen Raum betrachtet (das Wort *stationär* soll bedeuten, daß die Wahrscheinlichkeit des Übergangs aus einer Lage  $P$  in eine Menge  $M$  nur von  $P$  und  $M$ , nicht aber von der Zeit und von der Vorgeschichte des wandernden Punktes abhängen soll). Es wird festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit  $u(P)$  dafür, daß der wandernde Punkt, von  $P$  ausgehend, ein Gebiet  $G \supset P$  zum ersten Male in einem Punkte eines vorgegebenen Teils seiner Begrenzung verläßt, im Limes einer partiellen Differentialgleichung von elliptischem Typus genügt. Die Ermittlung von  $u(P)$  wird als ein Spezialfall einer allgemeineren Aufgabe („Verallgemeinertes Dirichletsches Problem“) aufgefaßt. Dieselbe Methode, die zur Aufstellung des erwähnten wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzwertsatzes führt, erlaubt dann, die Möglichkeit der angenäherten Lösung des Dirichletschen Problems in einem Raum von beliebig vielen Dimensionen mittels Differenzgleichungen zu beweisen.

## § 1.

### Einleitung.

1. Wir betrachten einen Irrfahrtprozeß, der in der schrittweise erfolgenden Lagenänderung eines Punktes in einer euklidischen Ebene<sup>1)</sup> besteht. Befindet sich der bewegliche Punkt augenblicklich an der Stelle  $(x, y)$ , so soll  $w(x, y, A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, daß seine nächstfolgende Lage der Punktmenge  $A$  angehört; diese Wahrscheinlichkeit wird immer von der *Vorgeschichte der Wanderung unabhängig* angenommen.

Die Funktion  $w(x, y, A)$  soll folgenden Anforderungen genügen: sie ist für alle  $x, y$  und alle im Borelschen Sinne meßbaren Punktmenge  $A$  der gegebenen Ebene  $E$  definiert, nicht-negativ, additiv in bezug auf  $A$  und im Borelschen Sinne meßbar in bezug auf  $x$  und  $y$ ; ferner soll  $w(x, y, E) = 1$  sein<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Ganz ähnliche Betrachtungen gelten auch im mehrdimensionalen Raum; nur der kürzeren Schreibweise halber ist hier der zweidimensionale Fall gewählt.

<sup>2)</sup> Vgl. A. Kolmogoroff, Math. Annalen 104 (1931), S. 415–458, auch betreffs der im folgenden benutzten Bezeichnungen.

Bedeutet nun  $w_n(x, y, A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der bewegliche Punkt, von der Lage  $(x, y)$  ausgehend, sich nach  $n$  Schritten innerhalb der Punktmenge  $A$  befinden wird (der *Weg*, auf dem der in Irrfahrt begriffene Punkt aus einer Lage in eine andere kommt, soll zunächst ganz außer acht gelassen werden), so besteht offenbar die Gleichung

$$w_{n+1}(x, y, A) = \int_E w_n(\xi, \eta, A) w(x, y, dE).$$

Nun sei  $U$  eine festgewählte, im Borelschen Sinne meßbare Punktmenge, und  $p_n(x, y)$  bedeute die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt, von der Lage  $(x, y)$  ausgehend, in *höchstens*  $n$  Schritten die Menge  $U$  erreicht. Offenbar ist

$$\left. \begin{aligned} p_n(x, y) &= 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ auf } U, \\ p_0(x, y) &= 0, \\ p_{n+1}(x, y) &= \int_E p_n(\xi, \eta) w(x, y, dE) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \text{außerhalb } U.$$

Sind  $U'$  und  $U''$  komplementäre Teilmengen von  $U$  und bedeutet  $v_n(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der bewegliche Punkt, von der Lage  $(x, y)$  ausgehend, in *höchstens*  $n$  Schritten die Menge  $U'$  und *zwar früher als die Menge*  $U''$  erreicht, so ist

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} v_n(x, y) &= 1 \text{ auf } U', \\ v_n(x, y) &= 0 \text{ auf } U'', \\ v_0(x, y) &= 0, \quad v_{n+1}(x, y) = \int_E v_n(\xi, \eta) w(x, y, dE) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \text{außerhalb } U \end{matrix}$$

Diese Gleichungen definieren die Funktion  $v_n(x, y)$  vollständig. Im Fall  $U' = U$  ist natürlich

$$v_n(x, y) = p_n(x, y).$$

Da  $v_n(x, y)$  bei wachsendem  $n$  offenbar nicht abnehmen kann und andererseits immer  $\leq 1$  bleibt, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = v(x, y)$$

vorhanden. Offenbar bedeutet  $v(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt, von der Lage  $(x, y)$  ausgehend, nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Menge  $U'$  erreicht, und zwar *früher als die Menge*  $U''$ . Offenbar ist

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} v(x, y) &= 1 \text{ auf } U', \\ v(x, y) &= 0 \text{ auf } U'', \\ v(x, y) &= \int_E v(\xi, \eta) w(x, y, dE) \end{aligned} \right. \text{außerhalb } U.$$

Im folgenden wollen wir unter anderem speziell den Fall betrachten, daß nur die Punkte eines bestimmten quadratischen Gitters als mögliche Lagen auftreten. Wenn wir dann noch voraussetzen, daß der in einem Schritt zurückgelegte Weg immer die Länge  $h$  der Gitterquadratseite haben muß, geht die Gleichung (2) in die folgende Differenzengleichung über:

$$(3) \quad v(x, y) = v(x+h, y) \cdot w(x+h, y) + v(x-h, y) \cdot w(x-h, y) \\ + v(x, y+h) \cdot w(x, y+h) + v(x, y-h) \cdot w(x, y-h).$$

Hierin bedeutet  $w(\xi, \eta)$  die Wahrscheinlichkeit des Überganges  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ ; der Ausgangspunkt  $(x, y)$  ist dabei ein beliebiger Gitterpunkt, der Kürze halber fehlen seine Koordinaten in der Bezeichnung. Die Bedingung  $\int_E w(x, y, dE) = 1$  gibt hier

$$(4) \quad w(x+h, y) + w(x-h, y) + w(x, y+h) + w(x, y-h) = 1.$$

2. *Das verallgemeinerte Dirichletsche Problem.* Wir haben in 1. die Existenz einer für alle Punkte von  $E - U$  gültigen Lösung  $v(x, y)$  der Gleichung (2) festgestellt, die den Bedingungen

$$v(x, y) = 0 \text{ auf } U'',$$

$$v(x, y) = 1 \text{ auf } U'$$

genügt. Es liegt nahe, diese Fragestellung dahin zu verallgemeinern, daß die gesuchte Lösung auf  $U$  die Werte einer beliebigen beschränkten und im Borelschen Sinne meßbaren Funktion annimmt. Diese Aufgabe wollen wir als *verallgemeinertes Dirichletsches Problem* (kurz VDP) bezeichnen. In § 2 soll die Existenz der Lösung dieser Aufgabe bewiesen werden. Was die Eindeutigkeit der Lösung betrifft, so läßt sich diese unter gewissen Zusatzbedingungen ebenfalls begründen; eine hinreichende Bedingung bildet z. B. die *gleichmäßige* Konvergenz der in 1. erklärten Funktion  $p_n(x, y)$  gegen 1 für  $n \rightarrow \infty$ , die wir im folgenden kurz als *Bedingung A* bezeichnen wollen. Wegen  $p_n(x, y) \geq w_n(x, y, U)$  genügt a fortiori, daß für  $n \rightarrow \infty$  die Funktion  $w_n(x, y, U)$  gleichmäßig in bezug auf  $x$  und  $y$  gegen 1 konvergiert.

3. *Der Grenzwertsatz.* Nun sei  $E - U$  ein Gebiet  $G$ ; die auf  $U$  definierte Funktion  $v(x, y)$  sei stückweise stetig, wobei ihre Unstetigkeitskurven keine gemeinsamen Kurvenstücke mit der Begrenzung von  $G$  haben sollen. Ohne diese gegebenen Werte von  $v(x, y)$  auf  $U$  zu beeinflussen, wollen wir die Funktion  $w(x, y, A)$  einer Änderung unterwerfen, indem wir sie von einem Parameter  $\lambda$  abhängig machen und dementsprechend mit  $w_\lambda(x, y, A)$  bezeichnen. Die Änderung soll auf solche Weise erfolgen, daß, wenn unter  $f_{x,y}(\lambda)$  eine passend gewählte, noch von dem Punkt  $(x, y)$  abhängige und für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in bezug auf  $x$  und  $y$  gegen Null kon-



vergiehende positive Funktion des Parameters  $\lambda$  verstanden wird, für unendlich kleines  $\lambda$  die folgenden sieben Grenzrelationen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_E (\xi - x) w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow M_x(x, y), \\ \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_E (\eta - y) w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow M_y(x, y), \\ \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_E (\xi - x)^2 w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow M_{xx}(x, y), \\ \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_E (\xi - x)(\eta - y) w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow M_{xy}(x, y), \\ \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_E (\eta - y)^2 w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow M_{yy}(x, y), \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_{E - K_{xy}} (\xi - x)^2 w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\int_{\sigma v}(\lambda)} \int_{E - K_{xy}} (\eta - y)^2 w_\lambda(x, y, dE) \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

gelten, wobei  $K_{xy}$  einen Kreis von beliebigem aber festem Halbmesser um  $(x, y)$  bedeutet, und die in (5) rechtsstehenden Funktionen innerhalb und auf der Begrenzung von  $G$  samt ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich stetig sind.

In § 3 wird bewiesen, daß die Lösung  $v_\lambda(x, y)$  der Funktion  $w_\lambda(x, y, A)$  entsprechenden verallgemeinerten Dirichletschen Problems für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in jedem samt seiner Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiet gegen diejenige innerhalb  $G$  reguläre Lösung  $u_0(x, y)$  der Differentialgleichung

$$(7) \quad M_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + M_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 M_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 M_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

konvergiert, deren Werte an der Grenze von  $G$  mit denjenigen der gegebenen Funktion  $v(x, y)$  übereinstimmen.

Dabei soll eine Lösung der Gleichung (7) regulär heißen, wenn sie stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzt.

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$M_{xx} M_{yy} \geq M_{xy}^2;$$

wir wollen voraussetzen, daß innerhalb  $G$  das Gleichheitszeichen nicht auftritt, so daß die Gleichung (7) von elliptischem Typus wird.

Für das Irrfahrtproblem ergibt sich hieraus, daß  $v(x, y)$  gegen diejenige Lösung von (7) konvergiert, welche durch die Randbedingungen festgelegt wird:  $v(x, y) = 1$  auf dem zu  $U'$  gehörigen Teil  $L'$  der Begrenzung von  $G$  und  $v(x, y) = 0$  auf dem übrigen Teil  $L''$  dieser Begrenzung. Wenn man dazu voraussetzt, daß der wandernde Punkt nur geradlinige Schritte machen kann, die eine gewisse, mit  $\lambda$  gegen Null abnehmende Länge nicht übertreffen, so ergibt sich, daß dieselbe Lösung von (7) auch als Limes der Wahrscheinlichkeit dafür erscheint, daß  $L'$  vor  $L''$  erreicht wird (unmittelbar kann das natürlich aus dem früheren Ergebnis nicht gefolgert werden, denn da war ja die Bahnform ganz außer acht gelassen).

Wenn der bewegliche Punkt ganz speziell nur Schritte einer bestimmten, mit  $\lambda$  gegen Null abnehmenden Länge machen kann und alle Fortschrittrichtungen gleichwahrscheinlich angenommen werden, so konvergiert  $v(x, y)$  gegen die durch die gegebenen Randbedingungen definierte harmonische Funktion. Diesen Spezialfall hat Herr R. Lüneburg betrachtet<sup>3)</sup>.

Die Anwendung auf den Fall der Gitterirrfahrt ergibt eine Lösungsmethode der Gleichung (7) mittels Zurückführung auf eine Differenzengleichung. Das wird im Anhang II dargelegt.

## § 2.

### Das verallgemeinerte Dirichletsche Problem.

1. Die beschränkte und im Borelschen Sinne meßbare Funktion  $v(x, y)$  sei auf  $U$  definiert. Es wird verlangt, ihre Werte auf  $E - U$  derart festzulegen, daß daselbst

$$(8) \quad v(x, y) = \int_E v(\xi, \eta) \cdot w(x, y, dE)$$

gilt, wobei  $w(x, y, A)$  eine vorgegebene Funktion der in § 1, 1. erklärten Art ist, und  $U$  eine im Borelschen Sinne meßbare Menge bedeutet.

<sup>3)</sup> R. Lüneburg, Das Problem der Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung und die Randwertaufgabe der Potentialtheorie, Math. Annalen 104 (1931), S. 700—738. — Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Randwertproblemen elliptischer partieller Differentialgleichungen wurde schon seit einer Reihe von Jahren von Herrn R. Courant in Göttingen betont. Die Durchführung dieser Ideen wurde, abgesehen von einigen Bemerkungen in der Arbeit „Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik“ von R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy, Math. Annalen 100, S. 32 ff., in der zitierten Dissertation von R. Lüneburg gegeben. (Vgl. auch den in Vorbereitung befindlichen Band II der „Methoden der mathematischen Physik“ von Courant und Hilbert.) Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf das Problem in seiner vollen Allgemeinheit.

Der Beweis für die Existenz einer Lösung dieser Aufgabe wird ganz analog zum in § 1, 1. betrachteten Spezialfall erbracht. Zunächst definiere man die Funktionenfolge  $v_n(x, y)$  durch die Bedingungen:

$$v_n(x, y) = v(x, y) \quad \text{auf } U \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$v_0(x, y) = m,$$

$$(9) \quad v_{n+1}(x, y) = \int_E v_n(\xi, \eta) w(x, y, dE) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \text{auf } E - U,$$

wobei  $m$  die untere Schranke der Funktion  $v(x, y)$  auf  $U$  bedeutet.

Man sieht sofort ein, daß in der ganzen Ebene  $E$

$$v_{n+1}(x, y) \geq v_n(x, y)$$

ist; denn für  $n = 0$  folgt das wegen  $w(x, y, E) = 1$  aus der Definition von  $v_0(x, y)$ , und für höhere  $n$  liefert (9) die erforderliche Induktion. Ferner ist offenbar  $v_n(x, y) \leq M$ , wenn  $M$  die obere Schranke von  $v_0(x, y)$  bedeutet. Folglich ist für alle  $x, y$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = v(x, y)$$

vorhanden, und der offenbar erlaubte Grenzübergang in (9) liefert

$$v(x, y) = \int_E v(\xi, \eta) w(x, y, dE)$$

auf  $E - U$ .

2. Genügt die Funktion  $w(x, y, A)$  der am Schluß von § 1, 2. erwähnten Bedingung A, so kann  $v_0(x, y)$  auf  $E - U$  als beliebige beschränkte und im Borelschen Sinne meßbare Funktion definiert werden, ohne daß dadurch die Konvergenz oder das Ergebnis des Iterationsverfahrens beeinflußt wird.

Beweis: Man setze

$$u_0^*(x, y) = 1 - p_n(x, y),$$

wo  $p_n(x, y)$  die in § 1, 1. definierte Funktion bedeutet. Dann ist

$$A. \quad u_0^*(x, y) = 1 \quad \text{auf } E - U,$$

$$B. \quad u_0^*(x, y) = 0 \quad \text{auf } U \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$C. \quad u_{n+1}^*(x, y) = \int_E u_n^*(\xi, \eta) w(x, y, dE) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \text{auf } E - U,$$

$$D. \quad u_n^*(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig in } E \quad (n \rightarrow \infty).$$

Setzt man andererseits

$$u_n(x, y) = v_n(x, y) - v(x, y),$$

so ist

$$B'. \quad u_n(x, y) = 0 \text{ auf } U \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$C'. \quad u_{n+1}(x, y) = \int_E u_n(\xi, \eta) w(x, y, dE) \text{ auf } E - U \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Zu beweisen ist, daß gleichmäßig in  $E$

$$u_n(x, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ist.

Bezeichnet man mit  $\mu$  die obere Schranke von  $|u_0(x, y)|$ , so ist offenbar wegen A., B. und B'.

$$|u_0(x, y)| \leq \mu u_0^*(x, y),$$

und folglich wegen C. und C'.

$$|u_n(x, y)| \leq \mu u_n^*(x, y) \quad (n = 0, 1, \dots);$$

wegen D. ergibt das

$$u_n(x, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

gleichmäßig in  $E$ , w. z. b. w.

3. Oftmals könnte die Bedingung A für praktische Anwendung wenig geeignet erscheinen; wir wollen ihr deshalb die folgende, etwas engere, aber dafür wesentlich leichter übersichtbare *Bedingung B* an die Seite stellen:

Es gibt zwei positive Zahlen  $\varepsilon$  und  $\delta$  von der Beschaffenheit, daß für alle  $x, y$   $w(x, y, P_{x+\varepsilon}) > \delta$  gilt; dabei bedeutet  $P_a$  allgemein die Halbebene  $x > a$ .

Für eine Menge  $E - U$ , die vollständig innerhalb eines durch die Geraden  $x = x_0$  und  $x = x_1$  begrenzten Streifens liegt, ist A eine Folge von B<sup>4)</sup>.

Beweis: Ist  $k$  eine feste ganze Zahl  $> \frac{x_1 - x_0}{\varepsilon}$ , so ist  $p_k(x, y)$  offenbar nicht kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt bei jedem von  $k$  aufeinanderfolgenden Schritten seine Abszisse um  $\varepsilon$  vergrößert (denn in diesem Fall wird der Streifen ( $x = x_0, x = x_1$ ) sicher verlassen); ist aber die Bedingung B erfüllt, so ist die letztgenannte Wahrscheinlichkeit größer als  $\delta^k$ , und somit

$$(10) \quad 1 - p_k(x, y) < 1 - \delta^k$$

für alle  $x, y$ ; sind nun  $sk$  Schritte vollendet, so ist  $1 - p_{sk}(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt immer noch den erwähnten Streifen nicht verlassen hat; und werden die  $sk$  Schritte in  $s$  Gruppen von je  $k$  nacheinanderfolgenden Schritten eingeteilt, so muß der

<sup>4)</sup> Selbstverständlich kann hier und im Wortlaut der Bedingung die ausgezeichnete  $x$ -Richtung durch eine beliebige andere ersetzt werden.

wandernde Punkt in diesem Fall auch während jeder einzelnen Schrittgruppe im genannten Streifen verbleiben, was jedesmal nach (10) eine Wahrscheinlichkeit  $< 1 - \delta^k$  hat, wo auch der Ausgangspunkt für die betreffende Schrittgruppe liegen mag. Das liefert

$$1 - p_{s,k}(x, y) < (1 - \delta^k)^s \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty)$$

und folglich, da  $p_n(x, y)$  mit wachsendem  $n$  nicht abnehmen kann, auch

$$p_k(x, y) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

w. z. b. w.

4. Die Bedingung B ist insbesondere im früher erwähnten Lüneburgschen Fall erfüllt. Im Fall der Gitterwanderung erhält die Bedingung B unter Beibehaltung der in § 1 benutzten Bezeichnungen die Form

$$w(x + h, y) > \delta$$

für alle  $x, y$ .

Der in 2. bewiesene Satz zeigt, daß im Fall, wenn diese Forderung erfüllt ist und die Menge  $E - U$  in einem Streifen ( $x = x_0, x = x_1$ ) eingeschlossen ist, das verallgemeinerte Dirichletsche Problem für die Differenzengleichung gelöst werden kann unter Zugrundelegung einer beliebigen Ausgangsfunktion  $v_0(x, y)$ .

Endlich folgt aus dem in 2. bewiesenen Satz auch die Eindeutigkeit der Lösung, wenn A (also bei zutreffender Form des Gebiets  $E - U$  auch wenn B) erfüllt ist. Denn eine andere eventuell vorhandene Lösung müßte sich einerseits bei der Iteration reproduzieren, andererseits aber im Limes  $v(x, y)$  ergeben.

### § 3.

#### Der Grenzwertsatz.

1. *Obere und untere Funktionen* <sup>5)</sup>. Die Funktion  $\bar{v}(x, y)$  soll eine *obere Funktion* für ein vorgegebenes VDP heißen, wenn sie die Eigenschaften besitzt:

1.  $\bar{v}(x, y)$  ist beschränkt und im Borelschen Sinne meßbar;
2.  $\bar{v}(x, y) \geq v(x, y)$  auf  $U$ ;
3.  $\bar{v}(x, y) \geq \int_E \bar{v}(\xi, \eta) w(x, y, dE)$  in  $E - U$ .

Die *unteren Funktionen* werden durch dieselben Bedingungen mit umgekehrten Ungleichheitszeichen erklärt.

Im Fall, wenn die Bedingung A erfüllt ist, gilt für beliebige  $(x, y)$

$$\bar{v}(x, y) \geq v(x, y).$$

<sup>5)</sup> Die Methode der oberen und unteren Funktionen ist in ihrer Grundidee zuerst von Herrn O. Perron [vgl. Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 42—54, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ ] eingeführt und benutzt worden.

Beweis: Die Werte von  $\bar{v}(x, y)$  auf  $U$  definieren ein VDP, dessen wegen A eindeutige Lösung  $v^*(x, y)$  heißen möge. Dann ist überall

$$(11) \quad v^*(x, y) \geq v(x, y);$$

denn auf  $U$  gilt das nach Definition; und auf  $E - U$  kann zunächst, wenn wir die beiden Probleme nach der Iterationsmethode behandeln,  $v_0^* \geq v_0$  gewählt werden, wonach die Iterationen  $v_n^* \geq v_n$  und im Limes  $v^* \geq v$  ergeben. Andererseits ist aber überall

$$(12) \quad \bar{v}(x, y) \geq v^*(x, y);$$

denn zunächst kann  $v_0^*(x, y)$  so gewählt werden, daß überall  $\bar{v}(x, y) \geq v_0^*(x, y)$  ist; und danach ergibt sich aus der Eigenschaft 3. von  $\bar{v}(x, y)$ , daß für jedes  $n$   $\bar{v}(x, y) \geq v_n^*(x, y)$  und folglich im Limes (12) gilt; (11) und (12) ergeben den Satz.

Die analoge Eigenschaft der *unteren* Funktionen wird selbstverständlich auf dieselbe Art bewiesen.

2. Wir wollen nun voraussetzen, daß  $E - U$  ein endliches Gebiet  $G$  ist, dessen Begrenzung aus einer Kurve  $L$  mit stetig veränderlicher Krümmung besteht, und daß die auf  $U$  gegebene Funktion  $v(x, y)$  längs dieser Kurve stetig ist.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  bedeuten im folgenden beliebig klein wählbare positive Konstanten.

Wir betrachten die Gleichung

$$(13) \quad M_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + M_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2M_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2M_y \frac{\partial u}{\partial y} = -\varepsilon_1$$

und bezeichnen mit  $u_{\varepsilon_1}(x, y)$  diejenige innerhalb  $G$  geltende reguläre Lösung dieser Gleichung, die auf  $L$  mit  $v(x, y)$  übereinstimmt. Nun vollziehen wir folgende Konstruktion: Durch jeden Punkt von  $L$  ziehen wir die Normale zu dieser Kurve und tragen auf ihr beiderseits eine Strecke der Länge  $\varepsilon_2$  ab; wegen der vorausgesetzten Regularität von  $L$  werden für genügend kleines  $\varepsilon_2$  diese Normalen keine Schnittpunkte haben; ihre Endpunkte innerhalb  $G$  begrenzen ein Gebiet  $G' \subset G$ , ihre äußeren Endpunkte ein Gebiet  $G''$ ,  $G \subset G''$ . Wir wollen nun jedem Punkte  $(x, y)$  von  $G$  einen Punkt  $(x', y')$  des erweiterten Gebietes  $G''$  zuordnen mittels folgender allgemeinen Regel: Ist  $(x, y)$  ein Punkt von  $G'$ , so soll  $(x', y')$  mit  $(x, y)$  zusammenfallen; ist aber  $(x, y)$  ein Punkt von  $G - G'$  und ist  $\varrho$  seine längs der betreffenden Normalen gerechnete Entfernung von  $G'$ , so soll  $(x', y')$  auf derselben Normalen liegen in einer Entfernung  $\varrho + \varepsilon_2 \varrho^2$  von  $G'$ . Durch diese Zuordnung wird offenbar  $G$  eineindeutig auf ein Gebiet  $G^* \subset G''$  transformiert, welches  $G$  in seinem Innern enthält; setzt man nun

$$u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x', y') = u_{\varepsilon_1}(x, y).$$

so ist die Funktion  $u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y)$  innerhalb  $G^*$  definiert, weicht für genügend kleines  $\varepsilon_2$  auf  $L$  beliebig wenig von  $v(x, y)$  ab und genügt innerhalb  $G$  der Ungleichung

$$\left| M_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots + 2M_y \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_1 \right| < 0, 1 \varepsilon_1.$$

Bezeichnet man ferner mit  $\varepsilon_3$  das Maximum von  $|u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y) - v(x, y)|$  in  $G^* - G$ , so wird offenbar  $\varepsilon_3$  mit  $\varepsilon_2$  beliebig klein.

Nun setze man

$$\bar{v}_\varepsilon(x, y) = v(x, y) \quad \text{außerhalb } G^*,$$

$$\bar{v}_\varepsilon(x, y) = u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y) + \varepsilon_3 \quad \text{innerhalb } G^*,$$

und ähnlich

$$\underline{v}_\varepsilon(x, y) = v(x, y) \quad \text{außerhalb } G^*,$$

$$\underline{v}_\varepsilon(x, y) = u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y) - \varepsilon_3 \quad \text{innerhalb } G.$$

Es ist klar, daß für gegen Null konvergierende  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die beiden Funktionen  $\bar{v}_\varepsilon(x, y)$  und  $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  sich gleichmäßig in  $G$  der in § 1, 3. erwähnten Lösung  $u_0(x, y)$  der Gleichung (7) nähern<sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Denn für  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  konvergiert z. B.  $\bar{v}_\varepsilon(x, y)$  nach Definition innerhalb  $G$  gegen  $u_{\varepsilon_1}(x, y)$ ; und für  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  ist innerhalb  $G$   $u_{\varepsilon_1}(x, y) \rightarrow u_0(x, y)$ , was man folgenderweise erschließt: Die Differenz  $u_{\varepsilon_1}(x, y) - u_{\varepsilon_1'}(x, y)$  genügt für  $\varepsilon_1 > \varepsilon_1'$  einer Gleichung der Form (13) mit negativer rechter Seite; ihr Minimum fällt daher auf die Begrenzung von  $G$ , wo sie aber verschwindet; folglich ist innerhalb  $G$   $u_{\varepsilon_1}(x, y)$  eine nicht abnehmende Funktion von  $\varepsilon_1$  und, da aus ähnlichem Grunde innerhalb  $G$   $u_{\varepsilon_1}(x, y) \geq u_0(x, y)$  ist, muß dasselbe

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} u_{\varepsilon_1}(x, y) = \bar{u}(x, y) \geq u_0(x, y)$$

vorhanden sein. Es bleibt zu beweisen, daß  $\bar{u}$  mit  $u_0$  zusammenfällt.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, darf man voraussetzen, daß  $G$  den Koordinatenanfangspunkt enthält. Wenn man in die linke Seite der Gleichung (13) statt  $u$  die Funktion  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$  einsetzt, wird sie offenbar für alle Punkte eines gewissen ganz innerhalb  $G$  liegenden Kreises  $K$  größer als eine positive Konstante  $c$  ausfallen. Nun sei  $u_{\varepsilon_1}^{(0)}(x, y)$  die Funktion, die auf der Peripherie von  $K$  mit  $u_{\varepsilon_1}(x, y)$  zusammenfällt, innerhalb  $K$  aber der homogenen Gleichung (7) genügt. Dann ist  $u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_1}^{(0)}$  innerhalb  $K$  eine Lösung von (13), hat also ihr Minimum auf der Kreisperipherie; dagegen genügt die Funktion

$$u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_1}^{(0)} + \frac{\varepsilon_1}{c}(x^2 + y^2)$$

einer Gleichung der Form (13) mit positiver rechter Seite, hat also ihr Maximum auf der Kreisperipherie; das ergibt in  $K$

$$0 \leq u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_1}^{(0)} < \frac{\varepsilon_1}{c} \varrho^2,$$

wo  $\varrho$  den Halbmesser von  $K$  bedeutet. Folglich ist innerhalb  $K$

$$\bar{u}(x, y) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} u_{\varepsilon_1}^{(0)}(x, y).$$

Nach einer von Feller [Math. Annalen 102 (1930), S. 633] bewiesenen Verallgemeinerung des Harnackschen Satzes genügt daher auch  $\bar{u}(x, y)$  der Gleichung (7) innerhalb  $K$ ;



3. Wir wollen nun den in § 1, 3. angekündigten Satz beweisen; es seien demnach alle daselbst erwähnten Voraussetzungen erfüllt.

Für genügend kleine  $\varepsilon_2$  und  $\lambda$  ist  $\bar{v}_2(x, y)$  eine obere,  $\underline{v}_2(x, y)$  eine untere Funktion des betreffenden VDP.

Beweis: Es genügt, die erste Hälfte der Behauptung zu beweisen; offenbar sind die Eigenschaften 1. und 2. der oberen Funktionen für  $\bar{v}_2(x, y)$  erfüllt; es bleibt somit nur zu zeigen, daß für genügend kleine  $\lambda$

$$(14) \quad \bar{v}_2(x, y) \geq \int_E \bar{v}_2(\xi, \eta) w_2(x, y, dE)$$

gilt.

Für jeden Punkt  $(x, y)$  von  $G$  bedeute  $K_{xy}$  den Kreis um  $(x, y)$  vom Radius  $\varepsilon_2^*$ ; offenbar ist  $K_{xy} \subset G^*$ , und folglich

$$(15) \quad \int_E \bar{v}_2(\xi, \eta) w_2(x, y, dE) = \int_{K_{xy}} [u_{21}(\xi, \eta) + \varepsilon_2] w_2(x, y, dE) \\ + \int_{E-K_{xy}} \bar{v}_2(\xi, \eta) w_2(x, y, dE).$$

Da nach Voraussetzung für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in bezug auf  $x$  und  $y$  die Beziehungen (6) gelten, so ergibt sich wegen

$$\varepsilon_2^* w_2(x, y, E - K_{xy}) \leq \int_{E-K_{xy}} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] w_2(x, y, dE),$$

daß dabei

$$w_2(x, y, E - K_{xy}) = o\{f_{xy}(\lambda)\}$$

und folglich auch

$$(16) \quad \int_{E-K_{xy}} \bar{v}_2(\xi, \eta) w_2(x, y, dE) = o\{f_{xy}(\lambda)\}$$

ist. Zur Abschätzung des ersten Integrals rechts in (15) benutzen wir die Taylorentwicklung

$$u_2(\xi, \eta) = u_2(x, y) + (\xi - x) \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial x} + (\eta - y) \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial y} \\ + \frac{1}{2} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 u_2(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial x^2} + (\xi - x)(\eta - y) \frac{\partial^2 u_2(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial x \partial y} \\ + \frac{1}{2} (\eta - y)^2 \frac{\partial^2 u_2(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial y^2},$$

wo  $u_2$  kurz statt  $u_{21,22}$  geschrieben ist und  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  einen Punkt von  $K_{xy}$  bedeutet. Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von  $u_{21,22}(x, y)$ ,

da aber jeder Punkt von  $G$  zum Koordinatenursprung gewählt werden kann, gilt dasselbe auch innerhalb  $G$ . Da schließlich auf der Begrenzung von  $G$   $\bar{u}$  mit  $u_0$  zusammenfällt, so muß auch innerhalb  $G$   $\bar{u} = u_0$  sein.

kann in den letzten drei Gliedern dieser Entwicklung dieser Punkt durch  $(x, y)$  ersetzt werden unter Beifügung eines Fehlergliedes der Gestalt  $\delta r^2$ , wo  $r$  die Entfernung zwischen  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  bedeutet und  $\delta$  für genügend kleines  $\varepsilon_2$  beliebig klein wird. Demnach wird

$$\begin{aligned} \int_E \bar{v}_\varepsilon(\xi, \eta) w_\lambda(x, y, dE) &= [u_\varepsilon(x, y) + \varepsilon_2] [1 + o(|f_{xy}(\lambda)|)] \\ &+ f_{xy}(\lambda) [1 + o(1)] \left\{ M_x \frac{\partial u_\varepsilon(x, y)}{\partial x} + M_y \frac{\partial u_\varepsilon(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} M_{xx} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, y)}{\partial x^2} \right. \\ &\left. + M_{xy} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} M_{yy} \frac{\partial^2 u_\varepsilon(x, y)}{\partial y^2} \right\} + O\{\delta f_{xy}(\lambda)\} + o(|f_{xy}(\lambda)|), \end{aligned}$$

oder wegen (13)

$$\left| \int_E \bar{v}_\varepsilon(\xi, \eta) w_\lambda(x, y, dE) - u_\varepsilon(x, y) - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 f_{xy}(\lambda) \right| < f_{xy}(\lambda) [0, 1 \varepsilon_1 + O\{\delta\} + o(1)];$$

und da in  $G^* \bar{v}(x, y) = u_\varepsilon(x, y) + \varepsilon_2$  ist, folgt hieraus die Ungleichung (14) offenbar für genügend kleine  $\varepsilon_2$  und  $\lambda$ .

Wegen der in 1. bewiesenen Eigenschaft der oberen Funktionen ist daher für genügend kleine  $\varepsilon_2$  und  $\lambda$  überall

$$\bar{v}_\varepsilon(x, y) \geq v(x, y),$$

und folglich in  $G$

$$v(x, y) \leq u_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y) + \varepsilon_2.$$

Das ergibt in  $G$

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} v(x, y) \leq u_0(x, y),$$

und ganz ähnlich beweist man

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} v(x, y) \geq u_0(x, y),$$

woraus endgültig

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v(x, y) = u_0(x, y)$$

folgt.

Der Grenzwertsatz ist hiermit für den Fall bewiesen, in dem die Begrenzung  $L$  von  $G$  die vorausgesetzte Regularität besitzt und  $v(x, y)$  auf  $L$  stetig ist. Dabei ergibt sich, daß  $v(x, y)$  im ganzen Gebiet  $G$  gleichmäßig gegen  $u_0(x, y)$  konvergiert.

4. Nun wollen wir voraussetzen, daß die außerhalb  $G$  definierte Funktion  $v(x, y)$  daselbst längs gewisser Kurven unstetig werden darf; diese Kurven dürfen auch die Begrenzung von  $G$  treffen, sollen aber mit ihr keine gemeinsamen Kurvenstücke haben. Wir wählen zwei stetige Funktionen  $v_+^*(x, y)$  und  $v_-^*(x, y)$ , die sich von  $v(x, y)$  nur in den die Unstetigkeitskurven umgebenden Streifen der Breite  $\varepsilon > 0$  unterscheiden und daselbst die Bedingungen

$$v_-^*(x, y) \leq v(x, y) \leq v_+^*(x, y)$$

erfüllen. Innerhalb  $G$  sollen beide Funktionen der Differentialgleichung (7) genügen. Bedeutet dann  $v(x, y)$  innerhalb  $G$  die Lösung des  $w_1(x, y, A)$  entsprechenden VDP mit den vorgegebenen Werten von  $v(x, y)$  außerhalb  $G$ , so folgt aus dem schon bewiesenen Fall des Grenzwertsatzes, daß für genügend kleines  $\lambda$  überall

$$(17) \quad v_-(x, y) - \varepsilon \leq v(x, y) \leq v^+(x, y) + \varepsilon$$

ist.

Nun sieht man leicht ein, daß für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die beiden Funktionen  $v_-(x, y)$  und  $v^+(x, y)$  gleichmäßig in jedem samt der Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiete gegen  $u_0(x, y)$  konvergieren<sup>7)</sup>; und wegen (17) folgt

<sup>7)</sup> Das läßt sich im Falle  $M_{xx} \equiv M_{yy}$  und  $M_{xy} \equiv 0$  etwa folgendermaßen zeigen: die Funktionen  $v_+$  und  $v_-$  seien so gewählt, daß außerhalb  $G$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$   $v_+$  niemals zunimmt,  $v_-$  niemals abnimmt; aus bekannten Gründen gilt dann dasselbe innerhalb  $G$ ; nach dem Harnackschen Satz erschließt man daraus, daß für  $\varepsilon \rightarrow 0$  innerhalb  $G$

$$\lim v_+(x, y) = v^+(x, y) \quad \text{und} \quad \lim v_-(x, y) = v^-(x, y)$$

vorhanden sind, der Gleichung (7) und der Ungleichung

$$v_-(x, y) \leq v^-(x, y) \leq v^+(x, y) \leq v_+(x, y)$$

genügen; daraus folgt aber offenbar, daß für jeden Punkt von  $L$ , in welchem  $v(x, y)$  stetig ist,

$$v^+(x, y) = v^-(x, y) = v(x, y)$$

gilt.

Nun sei

$$w(x, y) = v^+(x, y) - v^-(x, y),$$

und  $M$  sei die obere Schranke von  $w(x, y)$  auf  $G + L$ . Nach Feller [vgl. Fußnote<sup>6)</sup>] ist innerhalb  $G$   $w(x, y) < M$ . Man lege den Koordinatenursprung in einen Punkt  $P$  von  $L$ , in dessen Umgebung  $\limsup w(x, y) = M$  ist; ferner wähle man einen kleinen,  $P$  umgebenden Teilbogen  $l$  von  $L$  und verbinde seine Enden durch eine innerhalb  $G$  verlaufende Kurve  $l'$ ; dabei soll  $l$  außer  $P$  keinen anderen Unstetigkeitspunkt der Funktion  $v(x, y)$  enthalten, und das von  $l + l'$  umgrenzte Gebiet  $\Gamma$  soll so klein sein, daß die linke Seite der Gleichung (7) für  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  innerhalb  $\Gamma$  negativ ausfällt, was offenbar immer erreicht werden kann.

Auf  $l$  ist  $w(x, y) = 0$ , ausgenommen den Punkt  $P$ , wo sie jedenfalls  $\leq M$  ist; auf  $l'$  ist  $w(x, y) \leq M_1 < M$ . Die Funktion

$$u \ln \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - w(x, y) + M_1 \quad (a > 0)$$

genügt in  $\Gamma$  einer Gleichung der Form (13) mit negativer (nicht konstanter) rechter Seite, hat demnach ihr Minimum auf  $l + l'$ , wo sie offenbar nicht negativ ist; folglich ist in  $\Gamma$  für alle  $a > 0$

$$w(x, y) < M_1 + a \ln \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

das zeigt aber für  $a \rightarrow 0$  wegen  $M_1 < M$ , daß in der Umgebung von  $P$

$$\limsup w(x, y) < M$$

daraus, daß in einem solchen Gebiet auch  $v(x, y)$  für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig gegen  $u_0(x, y)$  konvergiert.

5. Schließlich wollen wir den Beweis des Grenzwertsatzes auch für den Fall eines etwas allgemeiner begrenzten einfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  andeuten.

Dabei können wir uns auf solche außerhalb  $G$  vorgegebenen Funktionen  $v(x, y)$  beschränken, die in einer gewissen Umgebung  $R$  der Begrenzung von  $G$  nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen; denn jede stückweise stetige Funktion kann beiderseits mit beliebiger Annäherung durch lineare Kombinationen solcher Funktionen approximiert werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Unstetigkeitskurven von  $v(x, y)$  höchstens eine endliche Anzahl von Schnittpunkten mit der Begrenzung von  $G$  haben.

Zunächst nehme man an, daß die Begrenzung  $L$  von  $G$  aus einer endlichen Anzahl regulärer Kurven besteht, deren Schnittpunkte keine Unstetigkeitspunkte für die Funktion  $v(x, y)$  sind.

Wir wollen  $L$  durch eine überall reguläre Kurve  $L_\varepsilon$  approximieren, die von  $L$  nur in den Umgebungen vom Durchmesser  $\varepsilon$  der irregulären Punkte dieser Kurve abweicht und daselbst innerhalb  $G$  verläuft.

Außerhalb  $L_\varepsilon$  definiere man nun eine Funktion  $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  durch folgende Bedingungen:

- $$\left. \begin{array}{l} 1. \underline{v}_\varepsilon(x, y) = 0 \text{ in } G, \\ 2. \underline{v}_\varepsilon(x, y) = v(x, y) \text{ außerhalb } G \end{array} \right\} \text{ außerhalb } L_\varepsilon.$$

Wenn wir nun die Werte von  $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  innerhalb  $L_\varepsilon$  durch die Forderung festsetzen, daß sie daselbst der Gleichung (2) genügen soll, so ist überall

$$\underline{v}_\varepsilon(x, y) \leq v(x, y).$$

Nach dem in 4. bewiesenen Fall des Grenzwertsatzes konvergiert aber für  $\lambda \rightarrow 0$   $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  gegen die Funktion  $u_\varepsilon(x, y)$ , die innerhalb  $L_\varepsilon$  der

ist; der Widerspruch ist nur durch die Annahme  $M = 0$  lösbar, und damit ist bewiesen, daß innerhalb  $G$

$$v^+(x, y) = v^-(x, y)$$

ist; wegen der offenbar geltenden Ungleichungen

$$v_\varepsilon^-(x, y) \leq u_0(x, y) \leq v_\varepsilon^+(x, y)$$

ist daher für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim v_\varepsilon^+(x, y) = \lim v_\varepsilon^-(x, y) = u_0(x, y).$$

Auch für allgemeinere zweidimensionale und mehrdimensionale Fälle läßt sich immer eine der Funktion

$$\ln \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

analoge Hilfsfunktion bilden, die die Beweisführung auf dieselbe Weise ermöglicht.

Gleichung (7) genügt und auf  $L_\varepsilon$  mit  $v_\varepsilon(x, y)$  übereinstimmt. Für genügend kleines  $\lambda$  ist somit gleichmäßig innerhalb  $L_\varepsilon$  in bezug auf  $x$  und  $y$

$$v(x, y) > \underline{u}_\varepsilon(x, y) - \varepsilon,$$

und da für  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\underline{u}_\varepsilon(x, y)$  gegen  $u_0(x, y)$  konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem samt der Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiete<sup>6)</sup>, so gilt für ein solches Gebiet auch gleichmäßig

$$\liminf v(x, y) \geq u_0(x, y);$$

und da offenbar die inverse Ungleichung für den  $\limsup$  auf dieselbe Weise festgestellt werden kann, so ist der Beweis des Grenzwertsatzes auch für diesen Fall erledigt.

Der Fall, in dem gewisse irreguläre Punkte von  $L$  zugleich Unstetigkeitspunkte der Funktion  $v(x, y)$  sind, läßt sich leicht auf den soeben betrachteten Fall durch eine kleine Abänderung der Funktion  $v(x, y)$  zurückführen. Diese Abänderung kann so gewählt werden, daß dabei alle irregulären Punkte von  $L$  zu Stetigkeitspunkten der Funktion  $v(x, y)$  werden, während  $u_0(x, y)$  in jedem vorgegebenen, samt der Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiete nur beliebig wenig abgeändert wird.

Auf ähnliche Weise kann der Grenzwertsatz auch für allgemeinere Gebiete bewiesen werden.

Selbstverständlich läßt sich die angedeutete Approximationsmethode auch auf mehrfach zusammenhängende Gebiete anwenden.

#### § 4.

##### Eine abgeänderte Fragestellung.

1. Bis hierhin war der *Weg*, auf dem sich der wandernde Punkt zwischen zwei nacheinanderfolgenden Lagen bewegt, gänzlich belanglos; von nun an wollen wir alle Schritte *geradlinig* voraussetzen. Es sei wie

<sup>6)</sup> Beweis: Auf  $L$  seien zwei Funktionen  $\bar{v}_\varepsilon(x, y)$  und  $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  definiert, die in allen gemeinsamen Punkten von  $L_\varepsilon$  und  $L$  mit  $v(x, y)$  zusammenfallen; für andere Punkte von  $L_\varepsilon$  sei  $\underline{v}_\varepsilon(x, y) = 0$ ,  $\bar{v}_\varepsilon(x, y) = 1$ ;  $G_\varepsilon$  bedeute das durch  $L_\varepsilon$  begrenzte Gebiet. Ferner seien  $\bar{u}_\varepsilon(x, y)$  bzw.  $\underline{u}_\varepsilon(x, y)$  zwei Funktionen, die auf  $L_\varepsilon$  mit  $\bar{v}_\varepsilon(x, y)$  bzw.  $\underline{v}_\varepsilon(x, y)$  zusammenfallen und in  $G_\varepsilon$  der Gleichung (7) genügen. Die Ungleichung

$$\bar{u}_\varepsilon(x, y) \geq \underline{u}_\varepsilon(x, y),$$

die auf  $L_\varepsilon$  offenbar erfüllt ist, gilt demgemäß auch innerhalb  $G_\varepsilon$ . Da ferner auf  $L_\varepsilon$  für  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$   $\bar{u}_{\varepsilon_1} \geq \bar{u}_{\varepsilon_2}$ ,  $\underline{u}_{\varepsilon_1} \leq \underline{u}_{\varepsilon_2}$  ist, so ist für  $\varepsilon \rightarrow 0$  innerhalb  $G$   $\bar{u}_\varepsilon$  nicht zunehmend,  $\underline{u}_\varepsilon$  nicht abnehmend. Nach dem Harnackschen Satz konvergieren folglich  $\bar{u}_\varepsilon(x, y)$  und  $\underline{u}_\varepsilon(x, y)$  gleichmäßig in jedem samt der Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiete bzw. gegen zwei Funktionen  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\underline{u}(x, y)$ , die innerhalb  $G$  der Gleichung (7) genügen. Offenbar fallen diese Funktionen in allen regulären Punkten von  $L$  mit  $v(x, y)$  zusammen. Wie in Fußnote <sup>7)</sup> gezeigt war, müssen sie daher innerhalb  $G$  miteinander zusammenfallen.

vorhin die Grenzkurve  $L$  des Gebietes  $G$  in zwei Teile  $L'$  und  $L''$  eingeteilt.  $q_n(x, y)$  sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Bahn des wandernden Punktes, von  $(x, y)$  ausgehend, innerhalb der  $n$  ersten Schritte wenigstens einmal  $L'$  schneidet, ohne vorher  $L''$  zu treffen.

Da  $q_n(x, y)$  mit wachsendem  $n$  nicht abnehmen kann, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x, y) = q(x, y)$$

vorhanden. Offenbar bedeutet  $q(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt, von  $(x, y)$  ausgehend, einmal  $L'$  trifft, und zwar ohne vorher  $L''$  zu treffen.

2. Wenn  $w_1(x, y, A)$  so beschaffen ist, daß der in einem Schritt zurückgelegte Weg mit Sicherheit eine gewisse Größe nicht übertrifft, die für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert, so konvergiert  $q(x, y)$  für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in jedem samt der Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiet gegen diejenige Lösung der Gleichung (7), die auf  $L'$  (bzw.  $L''$ ) den Wert 1 (bzw. 0) annimmt.

Beweis: Sei  $\bar{U}'$  die Menge aller Punkte von  $E$ , deren Abstand von  $L'$  die Zahl  $\mu$  nicht übertrifft, und  $\bar{U}''$  die Menge aller Punkte von  $U = E - G$ , die nicht  $\bar{U}'$  angehören. Soll der wandernde Punkt beim  $n + 1$ -ten Schritt  $L'$  schneiden, so muß er sich nach  $n$  Schritten in  $\bar{U}'$  befinden; bedeutet  $\bar{v}_n(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der wandernde Punkt von  $(x, y)$  ausgehend in höchstens  $n$  Schritten  $\bar{U}'$  erreicht, ohne vorher auf  $\bar{U}''$  zu kommen, so ist demnach

$$\bar{v}_n(x, y) \geq q_{n+1}(x, y);$$

der Grenzübergang ergibt

$$\bar{v}(x, y) \geq q(x, y),$$

wo  $\bar{v}(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß der von  $(x, y)$  ausgehende Punkt einmal auf  $\bar{U}'$  kommt, ohne vorher  $\bar{U}''$  zu treffen.

Andererseits sei  $\underline{U}''$  die Menge aller Punkte von  $E$ , deren Abstand von  $L''$   $\mu$  nicht übertrifft, und  $\underline{U}'$  die Menge aller Punkte von  $U$ , die nicht  $\underline{U}''$  angehören. Man findet wie früher

$$\underline{v}(x, y) \leq q(x, y),$$

wo  $\underline{v}(x, y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß der von  $(x, y)$  ausgehende Punkt einmal auf  $\underline{U}'$  kommt, ohne vorher  $\underline{U}''$  zu treffen.

Nach dem Grenzwertsatz von § 3 konvergiert  $\bar{v}(x, y)$  für  $\lambda \rightarrow 0$  und  $\mu = \text{const}$  gleichmäßig in jedem samt der Begrenzung innerhalb  $G - \bar{U}'$  liegenden Gebiet gegen diejenige Lösung  $\bar{u}(x, y)$  der Differentialgleichung (7), welche auf der gemeinsamen Grenze der Gebiete  $\bar{U}'$  und  $G - \bar{U}'$  gleich 1, auf dem übrigen Teil der Begrenzung von  $G - \bar{U}'$  aber gleich Null wird. Ähnlich konvergiert  $\underline{v}(x, y)$  für  $\lambda \rightarrow 0$  in  $G - \underline{U}''$  gegen diejenige Lösung  $\underline{u}(x, y)$  von (7), die auf der gemeinsamen Grenze der Gebiete  $\underline{U}''$  und  $G - \underline{U}''$

gleich 0, auf dem übrigen Teil der Begrenzung von  $G - U''$  aber gleich 1 wird. Für  $\mu \rightarrow 0$  konvergieren aber  $\bar{u}(x, y)$  und  $\underline{u}(x, y)$  gleichmäßig in jedem samt seiner Begrenzung innerhalb  $G$  liegenden Gebiet gegen diejenige Lösung  $u(x, y)$  von (7), die gleich 1 auf  $L'$  und gleich 0 auf  $L''$  wird, womit der Beweis offenbar vollendet ist.

### Anhang I.

#### Bemerkungen zum eindimensionalen Problem.

Die bisher entwickelten Betrachtungen können, wie schon erwähnt, leicht auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen übertragen werden. Wir wollen noch kurz den Fall der Irrfahrt längs einer Geraden behandeln, der für gewisse naturwissenschaftliche Probleme von Wichtigkeit ist.

Die aufeinanderfolgenden Lagen des wandernden Punktes seien durch die Abszissen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  gekennzeichnet. Ist  $A$  eine im Borelschen Sinne meßbare Menge, so sei  $w(x, A)$  die Wahrscheinlichkeit von  $x_{n+1} \in A$  bei der Bedingung  $x_n = x$ ; diese Wahrscheinlichkeit wird wieder als unabhängig von  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  vorausgesetzt. Die Funktion  $w(x, A)$  sei in bezug auf  $A$  additiv, in bezug auf  $x$  im Borelschen Sinne meßbar, für alle  $x$  und alle im Borelschen Sinne meßbaren Mengen  $A$  definiert und nichtnegativ; endlich sei  $w(x, E) = 1$ , wo  $E$  die ganze  $x$ -Achse bedeutet.

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit  $v(x)$  dafür, daß der wandernde Punkt, von  $x$  ausgehend, einmal den Bereich  $x \geq b$  erreicht, ohne vorher in den Bereich  $x \leq a$  zu kommen; dabei bedeutet  $(a, b) = J$  ein fest gegebenes Intervall der Zahlengeraden.

Offenbar ist

$$(18) \quad v(x) = 0 \quad (x \leq a),$$

$$v(x) = 1 \quad (x \geq b),$$

$$(19) \quad v(x) = \int_E v(\xi) w(x, dE) \quad (a < x < b).$$

Wir wollen wieder die Funktion  $w(x, A)$  derart von einem Parameter  $\lambda$  abhängig voraussetzen, daß für  $\lambda \rightarrow 0$

$$(20) \quad \frac{1}{f_\lambda(\lambda)} \int_E (\xi - x) w_\lambda(x, dE) \rightarrow M_1(x),$$

$$(21) \quad \frac{1}{f_\lambda(\lambda)} \int_E (\xi - x)^2 w_\lambda(x, dE) \rightarrow M_2(x) > 0,$$

$$\frac{1}{f_\lambda(\lambda)} \int_{E - K_x} (\xi - x)^3 w_\lambda(x, dE) \rightarrow 0$$



wird; dabei bedeutet  $f_x(\lambda)$  eine positive Funktion, die für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in bezug auf  $x$  gegen Null konvergiert;  $M_1(x)$  und  $M_2(x)$  sind zwei samt ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich in  $J$  (mit Einschluß der Enden) stetige Funktionen, und  $K_x$  ein beliebiges festes Intervall mit  $x$  als Mittelpunkt.

Die in § 3 angewandte Methode läßt beweisen, daß die Funktion  $v(x)$ , die innerhalb  $J$  der Gleichung (19) genügt und außerhalb  $J$  durch die Bedingungen (18) festgelegt wird, für  $\lambda \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $J$  gegen diejenige Lösung  $u(x)$  der Differentialgleichung

$$(22) \quad M_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + M_1(x) \frac{du}{dx} = 0$$

konvergiert, die den Randbedingungen  $u(a) = 0$ ,  $u(b) = 1$  genügt<sup>9)</sup>.

Bekannt war bisher unter dem Namen „Ruin eines Spielers“ der Fall

$$M_1(x) = C = \text{Konst.}, \quad M_2(x) = 0.$$

Die Aufgabe hat folgenden Sinn: Zwei Partner nehmen an einem Spiel Teil; die Gewinnmittelwerte sind in jeder Partie gleich Null, die Vermögen der beiden Spieler betragen  $a$  bzw.  $b$  Geldeinheiten. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Spiel einmal durch den Ruin des ersten Spielers zu Ende kommt.

Bedeutet  $x_n$  das Vermögen des zweiten Partners nach Abschluß der  $n$ -ten Partie, so ist  $x_0 = b$ ; der erste Partner wird ruiniert, wenn einmal  $x_n = a + b$  wird, der zweite, wenn  $x_n = 0$  wird. Diese Deutung führt das Problem auf die oben betrachtete Irrfahrt Aufgabe zurück. Die Rolle des Intervalls  $J$  übernimmt hier das Intervall  $(0, a + b)$ , und gesucht wird  $v(b)$ . Konvergiert der in einer Partie höchstmögliche Gewinn  $\mu$  gegen 0, so genügt  $w(x, A)$  den Bedingungen (20) und (21), und setzt man  $f_x(\lambda) = \int_E (\xi - x)^2 w_1(x, dE)$ , so wird tatsächlich  $M_1(x) = 0$ ,

$M_2(x) = 1$ ;  $v(x)$  konvergiert dabei gegen die durch die Randbedingungen (23)

$$U(0) = 0, \quad U(a + b) = 1$$

festgelegte Lösung  $U(x)$  der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 1,$$

also gegen

$$u(x) = \frac{x}{a + b};$$

für genügend kleines  $\mu$  ist daher  $v(b)$  näherungsweise gleich  $b/a + b$ . Ist nur eine Gewinnmöglichkeit  $\mu$  vorhanden und sind  $a$  und  $b$  ganzzahlige Vielfache von  $\mu$ , so fällt  $v(b)$  genau mit  $u(b)$  zusammen.

<sup>9)</sup> Wie in § 3 könnte man die Voraussetzungen dahin verallgemeinern, daß  $v(x)$  außerhalb  $J$  als eine beliebige begrenzte, meßbare und in  $a$  und  $b$  stetige Funktion vorgegeben wird.

Sind  $M_2(x)$  und  $M_1(x)$  konstant, aber  $M_1$  von Null verschieden, so tritt an Stelle von (22) die Gleichung

$$M_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + M_1 \frac{du}{dx} = 0;$$

ihre den Randbedingungen (23) entsprechende Lösung ist

$$U(x) = \frac{1 - e^{-\frac{M_1}{M_2} x}}{1 - e^{-\frac{M_1}{M_2} (a+b)}}.$$

## Anhang II.

### Anwendung auf die angenäherte Lösung von Differentialgleichungen mittels Differenzengleichungen.

Bei den Ausführungen des § 3 haben wir betreffs der Funktion  $w(x, y, A)$  nur von ihren durch (5), (6) und die Bedingung  $w(x, y, E) = 1$  ausgedrückten Eigenschaften Gebrauch gemacht; insbesondere war die Forderung, daß  $w(x, y, A)$  nichtnegativ sei, nicht benutzt worden. Daraus läßt sich eine Methode zur angenäherten Lösung der Gleichung (7) mittels Zurückführung auf Differenzengleichungen aufbauen. In der Tat, ersetzt man in (7)  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  bzw. durch

$$\begin{aligned} & \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h}, \\ & \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h}, \\ & \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y)}{h^2}, \\ & \frac{u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)}{h^2}, \\ & \frac{u(x+h, y+h) + u(x-h, y-h) - u(x-h, y+h) - u(x+h, y-h)}{4h^2} \end{aligned}$$

und multipliziert beiderseits mit  $h^2$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2(M_{xx} + M_{yy})u(x, y) &= u(x+h, y)[M_{xx} + hM_x] \\ &+ u(x-h, y)[M_{xx} - hM_x] \\ &+ u(x, y+h)[M_{yy} + hM_y] \\ &+ u(x, y-h)[M_{yy} - hM_y] \\ &+ u(x+h, y+h) \cdot \frac{M_{xy}}{2} + u(x-h, y-h) \cdot \frac{M_{xy}}{2} \\ &- u(x+h, y-h) \cdot \frac{M_{xy}}{2} - u(x-h, y+h) \cdot \frac{M_{xy}}{2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung bildet einen Spezialfall der Gleichung (2), wenn man

$$w[x, y, (x + h, y)] = M_{xx} + h M_x,$$

$$w[x, y, (x - h, y)] = M_{xx} - h M_x,$$

$$w[x, y, (x, y + h)] = M_{yy} + h M_y,$$

$$w[x, y, (x, y - h)] = M_{yy} - h M_y,$$

$$w[x, y, (x + h, y + h)] = w[x, y, (x - h, y - h)] = \frac{1}{2} M_{xy},$$

$$w[x, y, (x + h, y - h)] = w[x, y, (x - h, y + h)] = -\frac{1}{2} M_{xy}$$

und  $w[x, y, (x_1, y_1)] = 0$  für alle anderen Punkte  $(x_1, y_1)$  setzt. Die so definierte Funktion  $w(x, y, A)$  genügt, wie man leicht sieht, für  $\lambda = h \rightarrow 0$  den Bedingungen (5) und (6), wenn  $f_{xy}(\lambda) = 2h^2$  gesetzt wird. Außerdem wird  $w(x, y, E) = 1$ , wenn  $M_{xx} + M_{yy} = \frac{1}{2}$  ist, was durch Multiplikation der Gleichung (7) mit einer geeigneten Funktion von  $x$  und  $y$  erzielt werden kann. Folglich konvergiert die Lösung der konstruierten Differenzgleichung gegen die entsprechende Lösung der Gleichung (7).

Den Herren A. Khintchine und A. Kolmogoroff sei an dieser Stelle für mannigfache wertvolle Ratschläge mein herzlicher Dank ausgesprochen.

(Eingegangen am 29. 1. 1933.)

# Über die Bewegung von Wirbelfäden endlichen Querschnitts in einer zweidimensionalen idealen Flüssigkeit.

Von

Viktor Garten in Leipzig.

## Einleitung.

Im folgenden handelt es sich um zumeist schon mehrfach untersucht<sup>1)</sup> Fragestellungen, die sich auf die permanente Bewegung einer homogenen, inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit bei Vorhandensein unendlicher Folgen von äquidistanten, kongruenten Wirbelzylindern beziehen. Mit derartigen Wirbelsystemen hat sich besonders Herr Th. v. Kármán in seinen bekannten Untersuchungen über den Flüssigkeitswiderstand beschäftigt<sup>2)</sup>. Während aber in der Literatur immer nur *unendlich dünne* Wirbelfäden zugrunde gelegt wurden, soll im folgenden auf Anregungen Lichtensteins hin, an dessen Abhandlungen über Hydrodynamik<sup>3)</sup> und über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssig-

<sup>1)</sup> Vgl. a) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von E. Helly), 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1931, B. G. Teubner, S. 243 ff.

b) H. Villat, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Paris 1930, Gauthier-Villars et Cie., S. 52 ff.; vgl. auch die a. a. O. S. 80, 81 angeführte Literatur.

c) G. Jaffé, Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden, *Annalen der Physik* (4) 61 (1920), S. 173—194.

d) A. Wintner, Bemerkung über die Eigenwellen der Kármánschen Wirbelstraßen, *Math. Zeitschr.* 30 (1929), S. 283 und 284.

<sup>2)</sup> Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, *Göttinger Nachr.* 1911, S. 509—517; ferner ebenda 1912, S. 547 ff., und Th. v. Kármán und H. Rubach, *Phys. Zeitschr.* 13 (1912), S. 49 ff. Herr Villat weist in loc. cit. <sup>1)</sup> b), S. 80 darauf hin, daß sich bereits vor Herrn v. Kármán im Jahre 1906 Herr Bénard mit diesen Wirbelreihen beschäftigt hat; er bezeichnet sie daher als „tourbillons de Bénard-Kármán“. Das eingehendere, insbesondere mathematische Studium dieser Wirbelsysteme hebt allerdings erst mit den Untersuchungen des Herrn v. Kármán an.

<sup>3)</sup> L. Lichtenstein, a) Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, Julius Springer, insbesondere S. 450 ff. b) Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze, *Math. Zeitschr.* 23 (1925), S. 89—154.

keiten<sup>4)</sup> sich die nachfolgenden Ausführungen eng anschließen, eine exakte Behandlung bei endlichem Querschnitt der Wirbelzylinder erstrebt werden. Und zwar ist jeweils nach Vorgabe einer geeignet gewählten Ausgangskonfiguration — die gerade durch die Betrachtung unendlich dünner Wirbelfäden nahegelegt wird — der Querschnitt der Wirbelröhren so zu bestimmen, daß die auf ein festes Achsenkreuz bezogene Flüssigkeitsbewegung permanent bleibt. Auf den hierbei einzuschlagenden Weg — Zurückführung des Problems auf eine Integro-Differentialgleichung von ganz bestimmtem Typus und ihre Auflösung durch sukzessive Approximationen<sup>5)</sup> — hat Lichtenstein selbst bereits mehrfach hingewiesen.

### § 1.

#### Eine einfach unendliche Folge äquidistanter, kongruenter Wirbelröhren von konstanter und gleicher Wirbelstärke<sup>6)</sup>.

In einer allseitig unbegrenzten homogenen, inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit befinde sich in einem bestimmten Augenblick eine unendliche Folge äquidistanter, kongruenter Wirbelröhren  $W^{(n)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), deren untereinander parallele Achsen sämtlich in der  $x$ - $z$ -Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems liegen. Die Schwerpunkte der einander kongruenten Querschnitte  $T_1^{(n)}$  aller Wirbelröhren mit der Ebene  $z = 0$  liegen auf der  $x$ -Achse an den Stellen  $x = nL, y = 0, z = 0$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Wir nehmen an, die Berandung von  $T_1^{(n)}$  werde durch eine einfach zusammenhängende Kurve mit stetiger Normale  $S_1^{(n)}$ , die sich hinreichend wenig von der Kreislinie  $S^{(n)}: (x - nL)^2 + y^2 = R^2$  unterscheidet<sup>7)</sup>, geliefert. Die Wirbelstärke sei in jeder Röhre konstant  $= J$ ,

<sup>4)</sup> Vor allem kommen die grundsätzlichen Entwicklungen a) der Arbeit von Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, zweite Abhandlung, Stabilitätsbetrachtungen, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 126—231 in Betracht, sowie b) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, dritte Abhandlung, Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, ebenda 13 (1922), S. 82—118. Man findet diese Methoden übersichtlich und teilweise wesentlich vereinfacht in der kürzlich erschienenen Monographie von Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (Berlin 1933, Julius Springer), dargestellt.

<sup>5)</sup> Vgl. loc. cit. <sup>3)</sup> a) S. 150—156, 468—470.

<sup>6)</sup> Das vorliegende Wirbelsystem hat Herr Villat, loc. cit. <sup>1)</sup> b), S. 53—56, untersucht und die Instabilität der Konfiguration dargetan, freilich unter Zugrundelegung eines unendlich dünnen Röhrenquerschnitts.

<sup>7)</sup> Genauer formuliert:  $S_1^{(n)}$  liege in einer Nachbarschaft erster Ordnung von  $S^{(n)}$ .

während sich außerhalb aller  $W^{(n)}$  das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei verhält (Fig. 1).

Es ist nun der Querschnitt  $T_1^{(n)} \equiv T_1$  für hinreichend kleine Werte von  $h = \frac{R}{L}$  so zu bestimmen, daß die auf das feste Achsenkreuz  $x-y-z$  bezogene Flüssigkeitsbewegung permanent bleibt.



Fig. 1.

Wegen der Kongruenz der Bereiche  $T_1^{(n)}$  genügt es, die in einer Nachbarschaft erster Ordnung von  $S^{(0)} \equiv S$  gelegene Kurve  $S_1^{(0)} \equiv S_1$  den angegebenen Bedingungen gemäß zu bestimmen<sup>9)</sup>. Zu diesem Zweck ordnen wir dem Punkte  $P = (X, Y)$  auf  $S$  den auf  $S_1$  gelegenen Durchstoßpunkt  $P_1 = (X_1, Y_1)$  des Halbstrahls  $\vec{OP}$  zu und bezeichnen die nach außen positiv gerechnete Strecke  $\vec{PP}_1$  mit  $R\zeta$ , so daß wir nunmehr für hinreichend kleine Werte von  $|\zeta|$ , etwa

$$(1) \quad |\zeta| < \varepsilon,$$

und nach Einführung von Polarkoordinaten gemäß

$$(2) \quad X = R \cos s, \quad Y = R \sin s \quad (0 \leq s < 2\pi)$$

die Lage der Punkte auf  $S_1$  eindeutig durch das System  $(s, \zeta)$  kennzeichnen können

$$(3) \quad X_1 = X(1 + \zeta) = R(1 + \zeta) \cos s, \quad Y_1 = Y(1 + \zeta) = R(1 + \zeta) \sin s.$$

Da  $S_1$  den Bedingungen der Aufgabe entsprechend eine Stromlinie bilden muß, haben wir die Funktion  $\zeta = \zeta(s)$ , die wir mit stetiger erster Ableitung begabt voraussetzen dürfen, derart zu bestimmen, daß die Stromfunktion  $\psi(x, y)$  auf  $S_1$  einen konstanten Wert annimmt.

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

folgt unter geeigneten Einschränkungen über das Verhalten der Geschwindigkeitskomponenten  $u, v$  für  $y \rightarrow \infty$  die Existenz einer bis auf eine unwesentliche additive Konstante bestimmten, in der Ebene  $z = 0$  ein-

<sup>9)</sup> Da es sich um eine zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung handelt, genügt es ferner, die Betrachtungen in der Ebene  $z = 0$  durchzuführen. Wir werden daher der Kürze halber künftig die  $z$ -Koordinate ganz unterdrücken.

deutigen und stetigen Strömungsfunktion  $\psi(x, y)$ , die in jedem Gebiet  $T_1^{(n)}$  der Poissonschen Differentialgleichung

$$(5) \quad \Delta \psi = 2J$$

und außerhalb aller  $T_1^{(n)}$  der Laplaceschen Differentialgleichung

$$(6) \quad \Delta \psi = 0$$

genügt. Dabei wollen wir voraussetzen<sup>9)</sup>, daß für

$$nL - \frac{L}{2} \leq x \leq nL + \frac{L}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(7) \quad \begin{cases} u = u_*(1 + O(\bar{R}^{-1})), & v = O(\bar{R}^{-1}) \quad \text{für } y \rightarrow +\infty \\ u = -u_*(1 + O(\bar{R}^{-1})), & v = O(\bar{R}^{-1}) \quad \text{für } y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

( $\bar{R}^2 = x^2 + y^2$ ;  $u_* > 0$  konstant)

gilt.

Wir deuten jetzt vorübergehend die  $x$ - $y$ -Ebene als die Gaußsche Ebene der komplexen Zahlen  $z = x + iy$  und betrachten das über den Querschnitt  $T_1$  erstreckte Flächenintegral

$$(8) \quad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = -\frac{J}{\pi i} \int_{T_1} \log \left[ \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi(z-z')}{L} \right] dx' dy'^{10)}.$$

Da  $f(z)$  in der ganzen Ebene außerhalb aller  $T_1^{(n)}$  eine reguläre Funktion darstellt, erfüllen daselbst die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  die Laplacesche Differentialgleichung (6). Insbesondere ist nach (8)

$$(9) \quad \psi(x, y) = \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{\pi(z-z')}{L} \right| dx' dy',$$

woraus wegen

$$(10) \quad \left| \sin \frac{\pi(z+nL-z')}{L} \right| = \left| \sin \frac{\pi(z-z')}{L} \right|$$

$$(11) \quad \psi(x+nL, y) = \psi(x, y) = \psi(x-nL, y)$$

folgt. Für hinreichend kleine Werte von  $\left| \frac{z-z'}{L} \right|$ , etwa für

$$(12) \quad \frac{|z-z'|}{L} \leq \frac{R_*}{L} \quad (R_* > R),$$

<sup>9)</sup> Auf eine physikalische Interpretation kommen wir weiter unten zu sprechen.

<sup>10)</sup> Man vergleiche den analogen Ansatz für die Funktion  $f(z)$  bei Herrn Jaffé, loc. cit. <sup>1)</sup> c), S. 174, und bei Herrn Villat, loc. cit. <sup>1)</sup> b), S. 57, anlässlich der Behandlung von zwei parallelen Wirbelreihen. Da jetzt der Querschnitt im Unterschied zu den genannten Untersuchungen endlich vorausgesetzt wird, tritt die Integration über den Querschnitt neu hinzu. Vgl. auch die Bemerkung am Schlusse der Arbeit des Herrn Jaffé, loc. cit. <sup>1)</sup> c), S. 194.



liefert

$$(13) \quad \left| \sin \frac{\pi(z-z')}{L} \right| = \frac{\pi|z-z'|}{L} \left| 1 + O\left(\left(\frac{z-z'}{L}\right)^2\right) \right|$$

die Darstellung

$$(14) \quad \psi(x, y) = \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{|z-z'|}{L} dx' dy' + \psi(x, y),$$

unter  $\psi(x, y)$  eine in einer den Bereich  $T_1$  enthaltenden Umgebung von  $x=0$ ,  $y=0$  reguläre Potentialfunktion verstanden. Augenscheinlich erfüllt die Funktion  $\psi$  wegen (11) und (14) auch die Poissonsche Differentialgleichung (5).

Aus (8) findet man wegen

$$(15) \quad \frac{d}{dz} \left( \log \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi(z-z')}{L} \right) = \frac{\pi}{L} \cot \frac{\pi(z-z')}{L} \\ = -\frac{\pi i}{L} \frac{\sin \frac{2\pi(y-y')}{L} + i \sin \frac{2\pi(x-x')}{L}}{\cos \frac{2\pi(y-y')}{L} - \cos \frac{2\pi(x-x')}{L}}$$

für die Komponenten der Geschwindigkeit  $u$ ,  $v$

$$(16) \quad u = \begin{cases} \frac{J}{L} \left( 1 + O\left(e^{-2\pi \frac{|y|}{L}}\right) \right) \int_{T_1} dx' dy' & \text{für } y \rightarrow +\infty \\ -\frac{J}{L} \left( 1 + O\left(e^{-2\pi \frac{|y|}{L}}\right) \right) \int_{T_1} dx' dy' & \text{für } y \rightarrow -\infty \end{cases}, \\ v = O\left(e^{-2\pi \frac{|y|}{L}}\right)$$

bei Annäherung an das Unendliche im Streifen  $nL - \frac{L}{2} \leq x \leq nL + \frac{L}{2}$ .

Aus (16) ergeben sich unmittelbar die Beziehungen (7).

Auf das vorstehend in Angriff genommene Problem läßt sich die naheliegende Frage nach der Bewegung des wie eingangs angegeben beschaffenen Wirbelsystems in einer homogenen Flüssigkeit, die durch zwei unendliche, nicht notwendig ebene Wände parallel zu den Wirbelachsen begrenzt wird, zurückführen. Wie man sich nämlich leicht überzeugt, stellen die Stromlinien  $\psi(x, y) = \text{const}$ , wenn man sich in Richtung der positiven und negativen  $y$ -Achse genügend weit von der  $x$ -Achse entfernt, nahezu Parallelen zur  $x$ -Achse dar. Wir denken uns daher jetzt die bisher allseitig unbegrenzt vorausgesetzte Flüssigkeit, die das betrachtete Wirbelsystem enthält, von den festen Wänden

$$(17) \quad \begin{matrix} + \\ \ominus \end{matrix} : y = D + \chi(x); \quad \begin{matrix} - \\ \ominus \end{matrix} : y = -D - \chi(x)$$

eingeschlossen. Hierbei bezeichnet  $\chi(x)$  irgendeine nebst ihrer Ableitung stetige mit der Periode  $L$  periodische Funktion, die in den Endpunkten des Grundintervalls  $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$  verschwindet. Endlich setzen wir noch

$$(18) \quad \frac{L}{D} = k; \quad \frac{1}{k} = O(\log \frac{L}{R}); \quad \frac{|\chi|}{L} = O(h^k); \quad \chi(x) = \chi(-x)$$

voraus. Zur Abkürzung werde der durch  $\bar{\mathfrak{E}}$  und  $\bar{\mathfrak{S}}$  begrenzte Teil des Streifens  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$  mit  $\mathfrak{I}$ , seine Gesamtberandung mit  $\mathfrak{S}$  bezeichnet.

Diese setzt sich sowohl aus den Teilstücken  $\bar{\mathfrak{I}}$  und  $\bar{\mathfrak{I}}$  von  $\bar{\mathfrak{E}}$  und  $\bar{\mathfrak{S}}$  als auch den vertikalen Strecken  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zusammen (Fig. 2).

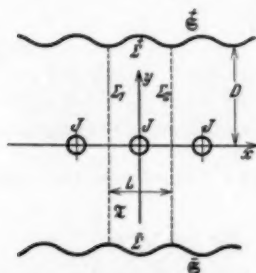


Fig. 2.

Um die Strömungsfunktion  $\psi(x, y)$  des vorliegenden Problems zu erhalten, hat man zu der bereits oben eingeführten Funktion  $\psi(x, y)$  eine geeignete Zusatzfunktion  $\bar{\psi}(x, y)$  hinzuzufügen. Wir suchen zunächst eine in  $\mathfrak{I}$  reguläre, auf  $\mathfrak{S}$  stetige Potentialfunktion  $\bar{\varphi}$ , deren Normalableitung  $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$  auf  $\mathfrak{S}$  den Wert

$$(19) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = -(u \cos(n, x) + v \cos(n, y))$$

besitzt<sup>11)</sup>. Weil augenscheinlich die Bedingung

$$(20) \quad \int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} d\sigma = 0$$

erfüllt ist, ist die Funktion  $\bar{\varphi}$  tatsächlich vorhanden und bis auf eine unwesentliche additive Konstante bestimmt. Aus der Periodizität der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  sowie der Funktion  $\chi$  folgt, daß sich  $\bar{\varphi}$  mit der Periode  $L$  in alle diejenigen Gebiete, die  $\mathfrak{I}$  in den Streifen  $nL - \frac{L}{2} \leq x \leq nL + \frac{L}{2}$  entsprechen, periodisch fortsetzen läßt. Es bezeichne  $\bar{\varphi}$  eine zu  $\bar{\varphi}$  konjugierte Potentialfunktion, die gemäß  $\bar{\psi}(0, 0) = 0$  normiert

<sup>11)</sup> Man vergleiche die sich auf ein abgeschlossenes Gefäß, das mit homogener Flüssigkeit gefüllt ist, beziehenden Untersuchungen Lichtensteins und seine weiteren Durchführungen, die das Problem eines Wirbelringes, der sich in einer von einem unbegrenzten zylindrischen Gefäß eingeschlossenen homogenen Flüssigkeit befindet, betreffen. Siehe loc. cit. 3) a), S. 457 ff. und S. 465–467.

sei. Da auch sie die Periode  $L$  besitzt, muß sie nach dem Satz vom arithmetischen Mittel ihre Extremalwerte in  $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$  auf  $\bar{\Sigma}^+$  bzw.  $\bar{\Sigma}^-$  annehmen. Dort haben wir aber, wie man leicht nachrechnet<sup>12)</sup>,

$$(21) \quad \psi = \pi R^2 J \tau_* \frac{D + \chi(x)}{L} - J R^2 \tau_* \log 2\pi + \pi R^2 J \tau_* \cdot O\left(e^{-\pi \frac{|D + \chi|}{L}}\right) \\ \left(\int_{T_1} dx' dy' = \pi R^2 \tau_*\right).$$

Nun müssen aber die Spuren der Wände in der  $x$ - $y$ -Ebene Stromlinien bilden, d. h.

$$(22) \quad \psi(x, y) = \Psi(x, y) + \bar{\psi}(x, y) = c^* \quad (c^* \text{ konstant auf } \bar{\Sigma}^+ \text{ und } \bar{\Sigma}^-)$$

sein. Wählen wir daher

$$(23) \quad c^* = \pi R^2 J \tau_* \left( \frac{D}{L} - \frac{1}{\pi} \log 2\pi \right),$$

so ergibt sich in  $\mathfrak{T}$  mit Rücksicht auf (18)

$$(24) \quad \bar{\psi}(x, y) = O(h^2).$$

Die Funktion  $\bar{\psi}$  hängt von der vorläufig noch unbekannten Form des Wirbelquerschnittes, d. h. von  $\zeta$  ab.

Es sei noch bemerkt, daß sich der Fall *ebener* Wände ( $\chi(x) \equiv 0$ ) leichter mit der weiter unten angeführten Spiegelungsmethode behandeln läßt.

Wir kehren jetzt zur ursprünglichen Fragestellung, der Bestimmung des Wirbelquerschnittes  $T_1$ , zurück. Dazu betrachten wir die Funktion  $\psi(x, y)$  in der Nachbarschaft bzw. auf dem Rand  $S_1$  von  $T_1$ . Unter Verwendung der Produktdarstellung der Sinusfunktion findet man für  $\psi$  die, wie sich später ergibt, unbedingt konvergente Reihe

$$(25) \quad \psi(x, y) = \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{|z - z'|}{L} dx' dy' \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{|vL + z - z'|}{vL} dx' dy' + \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{|vL - z + z'|}{vL} dx' dy' \right\}$$

<sup>12)</sup> Man beachte, daß gemäß unserer Voraussetzung der Schwerpunkt von  $T_1$  im Koordinatenursprung liegt, daß insbesondere  $\int_{T_1} \frac{y'}{L} dx' dy' = 0$  ist.

oder, wenn  $(X_1, Y_1)$  einen auf  $S_1$  gelegenen Punkt bezeichnet,

$$(26) \quad \psi(X_1, Y_1) = -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_0} dx' dy' \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_{-v}} dx' dy' - \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_v} dx' dy' - 2JR^2 \tau_* \log v \right\},$$

worin

$$(27) \quad \begin{aligned} r_v^2 &= (vL - X_1 + x')^2 + (Y_1 - y')^2, \\ r_{-v}^2 &= (vL + X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2, \quad (v = 1, 2, \dots), \\ r_0^2 &= (X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2 \end{aligned}$$

Schreibt man weiter zur Abkürzung

$$(28) \quad \begin{aligned} \psi_v(X_1, Y_1) &= -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_v} dx' dy' \quad (v = 0 \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \psi_0^{(v)} &= -2JR^2 \tau_* \log v \quad (v = +1, +2, \dots), \end{aligned}$$

so daß hier offenbar  $\psi$ , bzw.  $\psi_{-}$ , gerade den Beitrag zur Stromfunktion darstellt, den der Wirbelzylinder  $W^{(v)}$  bzw.  $W^{(-v)}$  zu  $\psi$  im Punkte  $(X_1, Y_1)$  liefert, so kann man in Anlehnung an die physikalische Betrachtungsweise, die gerade diese und keine andere Reihenfolge nahelegt, die unbedingt konvergente Reihe

$$(29) \quad \psi(X_1, Y_1) = \psi_0(X_1, Y_1) + \sum_{v=1}^{\infty} \{ \psi_{-v}(X_1, Y_1) + \psi_v(X_1, Y_1) + \psi_0^{(v)} \}$$

als die Definition des Zusammenwirkens der unendlich vielen Wirbel ansehen. Bei exakt kreisförmigem Röhrenquerschnitt bewirken die konstanten Terme  $\psi_0^{(v)}$ , daß der gleichzeitige Einfluß der beiden Wirbel  $W^{(v)}$  und  $W^{(-v)}$  im Ursprung verschwindet.

Wegen

$$(30) \quad \begin{aligned} \log \frac{L}{r_{-v}} &= -\frac{1}{2} \log v^2 \left[ 1 + 2 \frac{X_1 - x'}{vL} + \frac{(X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2}{v^2 L^2} \right] \\ &= -\log v - \frac{X_1 - x'}{vL} + \frac{1}{v^2} O(h^2), \\ \log \frac{L}{r_v} &= -\frac{1}{2} \log v^2 \left[ 1 - 2 \frac{X_1 - x'}{vL} + \frac{(X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2}{v^2 L^2} \right] \\ &= -\log v + \frac{X_1 - x'}{vL} + \frac{1}{v^2} O(h^2) \end{aligned}$$

gilt

$$(31) \quad \psi_{-v} + \psi_v + \psi_0^{(v)} = -2JR^2 \tau_* \frac{1}{v^2} O(h^2)$$

und daher

$$(32) \quad \psi_*(X_1, Y_1) = \sum_{v=1}^{\infty} \{ \psi_{-v}(X_1, Y_1) + \psi_v(X_1, Y_1) + \psi_0^{(v)} \} = O(h^2).$$

$$(33) \quad \psi(X_1, Y_1) = \psi_0(X_1, Y_1) + \psi_*(X_1, Y_1) \\ = -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_0} d x' d y' + O(h^2).$$

Wie aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen bekannt ist, läßt sich der Ausdruck

$$(34) \quad -\frac{\pi}{J} \psi_0(X_1, Y_1) = \int_{T_1} \log \frac{L}{r_0} d x' d y' \quad (r_0^2 = (X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2)$$

in eine für hinreichend kleine Werte von  $|\zeta|$ ,  $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|$  absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln

$$(35) \quad -\frac{\pi}{J} \psi_0(X_1, Y_1) = U(s) + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots^{12),}$$

in welcher die  $U^{(n)} = U^{(n)}(s, \zeta)$  gewisse Integralausdrücke über Formen  $n$ -ten Grades in  $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta}{ds}$  bezeichnen. Speziell ist

$$(36) \quad U(s) = \pi R^2 \log \frac{L}{R}, \quad U^{(1)} = R \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} U(s) + \int_S R \zeta' \log \frac{L}{\varrho} d\sigma',$$

wobei

$$(37) \quad \varrho = [(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2]^{1/2}$$

den Abstand der beiden auf  $S$  gelegenen Punkte  $P$  und  $P'$ ,  $d\sigma' = R ds'$  das zu  $P'$  gehörige Bogenelement auf  $S$  und  $(\nu)$  die nach außen positiv zu zählende Normale in  $P$  an  $S$  bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung

$$(38) \quad \int_0^{2\pi} \zeta' d\sigma' = \Theta_*,$$

so ergibt eine leichte Umformung

$$(39) \quad U^{(1)} = -\pi R^2 \zeta + R^2 \Theta_* \log \frac{L}{R} + R^2 \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R}{\varrho} d\sigma'.$$

Wir setzen ferner, um einen Einblick in die Abhängigkeit der Einwirkung der Wirbelzylinder  $W^{(\nu)}$  ( $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) auf einen Punkt von  $S_1$  zu gewinnen,

$$(40) \quad \Omega^{(\nu)}(X_1, Y_1) = \int_{\bar{r}} \log \frac{L}{r_-} d x' d y' + \int_{\bar{r}} \log \frac{L}{r_+} d x' d y' + 2\pi R^2 \log r,$$

<sup>12)</sup> Siehe insbesondere loc. cit. <sup>4)</sup> b), S. 95.

$$(41) \quad \hat{\Omega}^{(v)}(X_1, Y_1) = \int_{T_1 - T} \log \frac{L}{r_{-v}} dx' dy' + \int_{T_1 - T} \log \frac{L}{r_v} dx' dy' + 2\pi R^2 (\tau_* - 1) \log v$$

und erhalten

$$(42) \quad \psi_*(X_1, Y_1) = -\frac{J}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} (\Omega^{(v)}(X_1, Y_1) + \hat{\Omega}^{(v)}(X_1, Y_1)).$$

Die Terme  $\hat{\Omega}^{(v)}$  rühren offenbar von dem Einfluß der ringförmigen Bereiche  $T_1^{(v)} - T^{(v)}$  und  $T_1^{(-v)} - T^{(-v)}$  her, während die Glieder  $\Omega^{(v)}$  den vollständigen Beitrag der Wirbel  $W^{(v)}$  und  $W^{(-v)}$  liefern würden, falls der Röhrenquerschnitt exakt kreisförmig wäre;  $\Omega^{(v)}(X, Y)$  hängt demnach von  $\zeta$  nicht ab. Die Funktionen  $\Omega^{(v)}(x, y)$  sind in einem Gebiete, das  $T$  bzw.  $T_1$  in seinem Innern enthält, für alle hinreichend kleinen Werte von  $h$  analytisch und regulär. Es gilt ferner

$$(43) \quad \Omega^{(v)}(x, y) = \Omega^{(v)}(x, -y) = \Omega^{(v)}(-x, y)$$

und

$$(44) \quad \Omega^{(v)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} O(h^2).$$

Also konvergiert die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} \Omega^{(v)}$  unbedingt.

Es sei, wenn  $(s, \zeta^*)$  den Punkt  $(x, y)$  bezeichnet,

$$(45) \quad \Omega^{(v)}(x, y) = h^2 \Gamma^{(v)}(s, \zeta^*; h).$$

Wir erhalten dann die Entwicklung

$$(46) \quad \Omega^{(v)}(X_1, Y_1) - \Omega^{(v)}(X, Y) = h^2 \left\{ R \zeta \frac{\partial}{\partial v'} \Gamma^{(v)}(s, 0) + \frac{1}{2} R^2 \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial v'^2} \Gamma^{(v)}(s, 0) + \dots \right\}^{(14)}$$

( $v'$  = äußere Normale).

Um den Einfluß der ringförmigen Bereiche  $T_1^{(v)} - T^{(v)}$  in Betracht zu ziehen, schalten wir in bekannter Weise zwischen die Kurven  $S$  und  $S_1$  eine einparametrische stetige Schar geschlossener Kurven  $S_t = S + t(S_1 - S)$  mit stetiger Tangente ein, indem wir dem Punkte  $(X, Y)$  auf  $S$  den Punkt mit den Koordinaten  $X_t = X(1 + t\zeta)$ ,  $Y_t = Y(1 + t\zeta)$  zuordnen. Bezeichnet man mit  $\varphi_{t'}$  den von dem Halbstrahl durch  $(s', 0)$  und der Normalen in  $(s', t'\zeta)$  an  $S_{t'}$  gebildeten Winkel, mit  $d\sigma_{t'}$  das Bogenelement auf  $S_{t'}$  im Punkte  $(\sigma', t'\zeta)$ , so ist

<sup>14)</sup> Vgl. loc. cit. \*) b), S. 97.

$$(47) \quad \hat{Q}^{(v)}(X_1, Y_1) = \int_0^1 d\ell' \int_{S_{\ell'}} \zeta' \cos \varphi_{\ell'} \log \frac{\nu L}{\varrho_{\nu, \ell'}} d\sigma_{\ell'} \\ + \int_0^1 d\ell' \int_{S_{\ell'}} \zeta' \cos \varphi_{\ell'} \log \frac{\nu L}{\varrho_{-\nu, \ell'}} d\sigma_{\ell'}$$

mit

$$(48) \quad \varrho_{\nu, \ell'}^2 = [\nu L - X(1 + \zeta) + X'(1 + \ell' \zeta')]^2 + [Y(1 + \zeta) - Y'(1 + \ell' \zeta')]^2 \\ = \nu^2 L^2 \left[ 1 + 2 \frac{R}{\nu L} [(1 + \ell' \zeta') \cos s' - (1 + \zeta) \cos s] \right. \\ \left. + \frac{R^2}{\nu^2 L^2} \{ [(1 + \zeta) \cos s - (1 + \ell' \zeta') \cos s']^2 \right. \\ \left. + [(1 + \zeta) \sin s - (1 + \ell' \zeta') \sin s']^2 \} \right], \\ \varrho_{-\nu, \ell'}^2 = \nu^2 L^2 \left[ 1 - 2 \frac{R}{\nu L} [(1 + \ell' \zeta') \cos s' - (1 + \zeta) \cos s] \right. \\ \left. + \frac{R^2}{\nu^2 L^2} \{ [(1 + \zeta) \cos s - (1 + \ell' \zeta') \cos s']^2 \right. \\ \left. + [(1 + \zeta) \sin s - (1 + \ell' \zeta') \sin s']^2 \} \right].$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt

$$(49) \quad \hat{Q}^{(v)}(X_1, Y_1) = \frac{1}{\nu^2} O(h^3),$$

so daß auch die Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{Q}^{(v)}$  unbedingt konvergiert.

Wie eingangs erwähnt, ist nunmehr die Funktion  $\zeta(s)$  so zu bestimmen, daß  $S_1$  eine Stromlinie darstellt, d. h. daß  $\psi(X_1, Y_1) = \psi(X_1, Y_1) + \dot{\psi}(X_1, Y_1) = c$  ( $c$  konstant) wird. Setzt man endlich

$$(50) \quad c + JR^2 \log \frac{L}{R} + \frac{JR^2}{\pi} \Theta_* \log \frac{L}{R} = JR^2 l \quad (l = O(h^3))^{15),}$$

so findet man zur Bestimmung von  $\zeta$  die nichtlineare Integro-Differentialgleichung

$$(51) \quad \zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R}{\varrho} d s' = l + \frac{1}{\pi R^2} [U^{(3)} + U^{(3)} + \dots] \\ - \frac{1}{JR^2} [\psi_*(X_1, Y_1) + \dot{\psi}(X_1, Y_1)],$$

auf deren rechter Seite  $\zeta$  entweder von mindestens zweiter Ordnung auftritt oder aber mit dem als hinreichend klein angenommenen Parameter  $h$

<sup>15)</sup>  $l$  bedeutet einen noch frei verfügbaren kleinen Parameter, der nachträglich so festgelegt werden kann, daß der Flächeninhalt von  $T_1$  mit demjenigen von  $T$  übereinstimmt. Da in die Bestimmung der Konstanten  $c$  mit  $\Theta_*$  noch  $\zeta$  eingeht, ist nach Auflösung der Integro-Differentialgleichung (51) in (50) der Ausdruck für  $\zeta$  einzusetzen.



behaftet ist. Die von  $\zeta$  freien Glieder der rechten Seite sind (gemäß (50), (32) und (24)) mindestens von der Ordnung  $h^2$ . Bekanntlich wird man in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten auf Integro-Differentialgleichungen von demselben Typus geführt. Die Beziehung (51) entspricht speziell derjenigen, die bei dem Existenzbeweis ringförmiger Gleichgewichtsfiguren von kreisförmigem Querschnitt ohne Zentralkörper die maßgebende Rolle spielt<sup>14)</sup>. Die weitere Behandlung der Gleichung (51), insbesondere ihre Auflösung mittels des Verfahrens der sukzessiven Approximationen, erfolgt nun in der a. a. O. angegebenen Weise.

Man betrachtet zunächst die homogene Integralgleichung

$$(52) \quad \zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R}{\varrho} d s' = 0.$$

Sie besitzt die beiden normierten linear unabhängigen Eigenfunktionen

$$(53) \quad u_1 = \frac{\sin s}{\sqrt{\pi}}, \quad u_2 = \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}}.$$

Setzt man nach dem E. Schmidtschen Verfahren der Kernzerspaltung

$$(54) \quad N(s, s') = \log \frac{R}{\varrho} - \sin s \sin s' - \cos s \cos s',$$

so wird

$$(55) \quad \begin{aligned} \zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R}{\varrho} d s' &= \zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' N(s, s') d s' \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sin s \int_0^{2\pi} \zeta' \sin s' d s' - \frac{1}{\pi} \cos s \int_0^{2\pi} \zeta' \cos s' d s', \end{aligned}$$

und der Kern  $N(s, s')$  hat keine Nullösungen mehr. Wir wollen nun annehmen, daß der gesuchte Röhrenquerschnitt die Geraden  $y = 0$ ,  $x = 0$  zu Symmetriegeraden besitzt. Dann ist

$$(56) \quad \int_0^{2\pi} \zeta' \sin s' d s' = 0, \quad \int_0^{2\pi} \zeta' \cos s' d s' = 0,$$

und die Integro-Differentialgleichung (51) geht über in

$$(57) \quad \begin{aligned} \zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' N(s, s') d s' &= l + \frac{1}{\pi R^2} [U^{(3)} + U^{(3)} + \dots] \\ &\quad - \frac{1}{J R^2} [\psi_*(X_1, Y_1) + \dot{\psi}(X_1, Y_1)]. \end{aligned}$$

Die Beziehungen (51) und (57) entsprechen dem Fall der Querschnittsbestimmung bei Vorhandensein der auf S. 449 eingeführten Wände. Handelt

es sich dagegen um die ursprünglich betrachtete allseitig unbegrenzte Flüssigkeit, so hat man a. a. O. nur das Glied  $\psi$  zu unterdrücken.

Durch die in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren schon mehrfach durchgeführten Untersuchungen<sup>16)</sup> ist die Existenz der Lösung unseres Problems sichergestellt. Unter den erwähnten Voraussetzungen läßt sich daher die Gestalt der Kurve  $S_1$  derart bestimmen, daß die Flüssigkeitsbewegung permanent wird.

Sind im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen die Wirbelzylinder abwechselnd mit der Wirbelstärke  $+J$  und  $-J$  besetzt, so liefert uns eine sinngemäße Übertragung der soeben entwickelten Methode eine Integro-Differentialgleichung von demselben Bau wie (51), die Lösung des modifizierten Problems. Untersucht man statt dessen den Querschnitt eines einzigen Wirbelzylinders von nahezu kreisförmigem Querschnitt, der sich inmitten einer von zwei festen ebenen Wänden ( $x = -\frac{L}{2}$ ,  $x = \frac{L}{2}$ ) begrenzten homogenen Flüssigkeit befindet, so führt eine unendliche Folge von Spiegelungen an den Wänden offensichtlich auf die soeben angegebene Fragestellung der unendlichen Folge von Wirbelzylindern alternierender Wirbelstärke in einer unbegrenzten Flüssigkeit zurück (Fig. 3). Die vor-

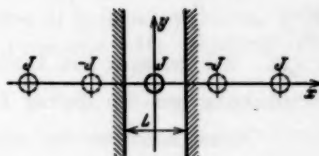


Fig. 3.

stehende Problemstellung läßt sich naturgemäß nach verschiedenen Richtungen hin erweitern<sup>17)</sup>. Nachdem aber in § 1 die Methode in aller Ausführlichkeit entwickelt wurde, soll im folgenden nur die Behandlung derjenigen Bewegungen angedeutet werden, die in der Naturbetrachtung die wichtigste Rolle spielen.

<sup>16)</sup> Vgl. außer den schon mehrfach zitierten Abhandlungen Lichtensteins [insbesondere loc. cit. 4) a) und b)] die Darstellung in § 4 (S. 112–121) seiner Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931. Man überzeugt sich vor allem ohne Mühe, daß Ungleichheitsbeziehungen von der a. a. O. S. 118 angegebenen Art (Formel (138) und (139)) bestehen.

<sup>17)</sup> Derartige Erweiterungen werden durch die in loc. cit. 1) a), b), c) angeführten Beispiele nahegelegt. Vgl. ferner A. Masotti, Atti Pontif. Accad. Scienze 84 (1931), S. 209–216, der seinen Untersuchungen über ähnliche Fragen die Greensche Funktion zugrunde legt.

## § 2.

## v. Kármánsche Wirbelstraßen bei endlichem Wirbelröhrenquerschnitt.

Die folgende Anordnung von zwei unendlichen Folgen paralleler zylindrischer Wirbel der in § 1 behandelten Art wurden eingehender, insbesondere von Herrn v. Kármán in seinen bekannten Abhandlungen über den Flüssigkeitswiderstand untersucht<sup>18)</sup>. Während aber dort der Querschnitt der einzelnen Röhren unendlich klein vorausgesetzt wird, soll im folgenden der als endlich (nur im Verhältnis zu dem gegenseitigen Abstand der Wirbelachsen klein) angenommene Querschnitt derart bestimmt werden, daß die Bewegung, auf ein in Richtung der Wirbelstraßen mit passender konstanter Geschwindigkeit fortschreitendes Achsenkreuz bezogen, permanent wird.

In einer allseitig unbegrenzten Flüssigkeit befinden sich zwei unendliche Folgen von Wirbelzylindern von nahezu kreisförmigem Querschnitt. Die erste Folge erhalten wir, indem wir das in § 1 betrachtete System in Richtung der positiven  $y$ -Achse um die Strecke  $\frac{D}{2}$  verschieben<sup>19)</sup>. Die Wirbelstärke habe in allen untereinander kongruenten Gebieten  $\hat{T}_1^{(n)}$ , deren Schwerpunkte in den Punkten

$$\hat{x} = nL, \hat{y} = +\frac{D}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

liegen, den Betrag  $J (> 0)$ . Wir gelangen nun durch Spiegelung an der  $x$ -Achse und Parallelverschiebung um den Betrag  $L = \frac{L}{2}$  in Richtung



Fig. 4.

dieser Achse zu der zweiten Folge, indem wir die verschobenen Spiegelbilder  $\bar{\hat{T}}_1^{(n)}$  von  $\hat{T}_1^{(n)}$  sämtlich mit der konstanten Wirbelstärke  $-J$  besetzen. Endlich setzen wir  $M = \text{Min}(D, L)$  und den Wert  $h = \frac{R}{M}$  hinreichend klein voraus (Fig. 4).

An die Stelle der in § 1 (8) verwendeten Funktion tritt nach Einführung eines neuen, durch die Relationen

$$(1) \quad x = \hat{x}, \quad y = \hat{y} - \frac{D}{2}$$

<sup>18)</sup> Man vergleiche das in der Fußnote <sup>2)</sup> Gesagte. — Herr Villat widmet in seinem schon mehrfach zitierten Buche [siehe loc. cit. <sup>1)</sup> b)] dem eingehenden Studium der Bénard-Kármánschen Wirbelstraßen einen breiten Raum (siehe besonders Kap. IV und V, S. 52–109). — Vgl. ferner die programmatische Darstellung des ganzen hierher gehörigen Fragenkomplexes bei Lichtenstein loc. cit. <sup>3)</sup> a), S. 468–470.

<sup>19)</sup> In Abweichung der in § 1 gebrauchten Bezeichnungsweise bedeute jetzt  $(\hat{x}, \hat{y})$  das ursprünglich zugrunde gelegte Achsenkreuz.

mit dem ursprünglichen verknüpften Systems, wenn wir noch die  $x$ - $y$ -Ebene als die Gaußsche Ebene der komplexen Zahlen  $z = x + iy$  deuten, nuncmehr das über den Bereich  $T_1^0 = T_1$ , der diesmal nur die  $y$ -Achse als Symmetriegerade besitzen möge, erstreckte Flächenintegral

$$(2) \quad f(z) = \varphi + \psi i = -\frac{J}{\pi i} \int_{T_1} \log \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2L} (z - z')}{\sin \frac{\pi}{2L} (z + iD + L - z')} \right] dx' dy',$$

und man findet

$$(3) \quad \psi(x, y) = \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \left\{ \log \left| \sin \frac{\pi}{2L} (z - z') \right| - \log \left| \cos \frac{\pi}{2L} (z + iD - z') \right| \right\} dx' dy'.$$

Wir führen neben dem festen Achsenkreuz  $x$ - $y$  ein mit der Geschwindigkeit

$$(4) \quad c = i\pi R^2 \tau_* \frac{J}{2L} \operatorname{tg} \frac{\pi iD}{2L} - w \quad \left( \int_{T_1} dx' dy' = \pi R \tau_* \right)$$

in der Richtung der positiven  $x$ -Achse bewegtes neues System  $x$ - $y$  ein, das in dem betrachteten Augenblick gerade mit dem festen Achsenkreuz zusammenfällt. Hierbei bedeutet  $w$  einen vorläufig noch unbestimmt gelassenen kleinen Parameter. Die zugehörige Strömungsfunktion lautet also

$$(5) \quad \psi(x, y) = \psi(x, y) - cy.$$

Daher liefert die Produktdarstellung der  $\sin$ -Funktion unter Berücksichtigung der Beziehung

$$(6) \quad c + w = JR^2 \tau_* \sum_{v=1}^{\infty} \frac{-2D}{(2v-1)^2 L^2 + D^2}$$

in einem auf  $S_1$  gelegenen Punkte  $(X_1, Y_1)$

$$\psi(X_1, Y_1) = -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_0} dx' dy' + JR^2 \tau_* \log \frac{\pi}{2} + wY_1 + \psi_*(X_1, Y_1),$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi_*(X_1, Y_1) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ -\frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_{-1}} dx' dy' - \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_2} dx' dy' \right. \\ \left. + \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_{-(2v-1)}} dx' dy' \right. \\ \left. + \frac{J}{\pi} \int_{T_1} \log \frac{L}{r_{2v-1}} dx' dy' + \varphi_0^{(v)} + {}_0\psi^{(v)} Y_1 \right\}, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$(8) \quad \begin{aligned} \psi^{(v)} &= J R^2 \tau_* \frac{2D}{(2v-1)^2 L^2 + D^2}, \\ \psi_0^{(v)} &= J R^2 \tau_* \log \frac{(2v-1)^2 L^2 + D^2}{(2vL)^2} \end{aligned}$$

sowie

$$(9) \quad \begin{aligned} r_{-1}^2 &= (2vL + X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2, \\ r_1^2 &= (2vL - X_1 + x')^2 + (Y_1 - y')^2, \\ r_{-(2v-1)}^2 &= ([2v-1]L + X_1 - x')^2 + (D + Y_1 + y')^2, \\ r_{1-1}^2 &= ([2v-1]L - X_1 + x')^2 + (D + Y_1 + y')^2 \\ &\quad (v = 1, 2, 3, \dots), \\ r_0^2 &= (X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2 \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Man findet nun leicht in Analogie zu (33), § 1 mit Rücksicht auf die Lage des Schwerpunktes von  $T_1$

$$(10) \quad \varphi_*(X_1, Y_1) = O(h^3),$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi(X_1, Y_1) &= -JR^2 \log \frac{L}{R} + JR^2 \zeta - \frac{JR^2}{\pi} \Theta_* \log \frac{L}{R} - \frac{JR^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' \log \frac{R}{\varrho} d\vartheta' \\ &\quad - \frac{J}{\pi} [U^{(3)} + U^{(5)} + \dots] + JR^2 \tau_* \log \frac{\pi}{2} + w Y_1 + \varphi_*(X_1, Y_1). \end{aligned}$$

Aus der Bedingung, daß  $S_1$  eine relative Stromlinie darstellen muß,  $\varphi(X_1, Y_1) = \bar{c}$  ( $\bar{c}$  konstant), gewinnt man zur Bestimmung von  $\zeta$  eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung vom Typus (51), § 1, die in der üblichen Weise durch sukzessive Approximationen aufgelöst werden kann. Da diesmal nur die  $y$ -Achse als Symmetriegerade von  $T_1$  vorausgesetzt wurde, verschwinden nicht die beiden in (56), § 1 angeführten Integralausdrücke, sondern nur der zweite. Indessen läßt sich nun der bisher unbestimmt gelassene Parameter  $w$  eindeutig so bestimmen, daß auch das erste Integral verschwindet. Damit ist, da sich auch die für das Gelingen des Verfahrens der sukzessiven Approximationen maßgebenden Ungleichheiten als erfüllt erweisen, die eindeutige Lösung der Integro-Differentialgleichung für hinreichend kleine Parameterwerte sichergestellt.

### § 3.

#### v. Kármánsche Wirbelstraßen bei endlichem Röhrenquerschnitt in einer von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit.

Im Gegensatz zu unseren früheren Ausführungen denken wir uns jetzt die das Wirbelsystem des § 2 enthaltende Flüssigkeit einseitig durch

die ebene Wand  $x = \frac{L}{2} = L$  begrenzt<sup>20)</sup>. Derjenige Raumteil, dem der Koordinatenursprung angehört, sei mit homogener inkompressibler Flüssigkeit erfüllt und enthalte das in § 2 beschriebene Wirbelsystem, soweit es in das Gebiet  $x < \frac{L}{2}$  fällt. Die Achsen der zwei einseitig unendliche Folgen bildenden parallelen zylindrischen Wirbel von nahezu kreisförmigem Querschnitt durchsetzen also die  $x$ - $y$ -Ebene in den Punkten  $x = -2\nu L$ ,  $y = 0$  und  $x = -(2\nu + 1)L$ ,  $y = -D$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) (vgl. Fig. 5). Der Grundbereich  $T_1$  werde diesmal bezüglich der Geraden  $x = 0$ ,  $y = 0$  symmetrisch vorausgesetzt, während alle übrigen Annahmen bestehen bleiben.

Durch Spiegelung an der Geraden  $x = L$  gelangen wir zu einem Wirbelsystem in einer allseitig unbegrenzten Flüssigkeit, bei dem die Spiegelbilder der ursprünglichen Röhrenquerschnitte mit entgegengesetzt gleicher Wirbelstärke besetzt sind (Fig. 5).

Wir legen den weiteren Betrachtungen nunmehr die außerhalb aller Gebiete  $\tilde{T}_1^{(n)}$ ,  $\tilde{T}_1^{(n)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) reguläre analytische Funktion

$$f(z) = \varphi + i\psi$$

$$(1) \quad = -\frac{J}{\pi i} \int_{\tilde{T}_1} \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{z - z'}{2L}\right) \Gamma\left(\frac{z + iD + L - z'}{2L}\right)}{\Gamma\left(\frac{z - z'}{2L}\right) \Gamma\left(2 - \frac{z + iD + L + z'}{2L}\right)} dz', dz''$$

zugrunde.

Wegen  $\Gamma(1 - z) = -z\Gamma(-z)$ ,  $\Gamma(2 - z) = -z(1 - z)\Gamma(-z)$  und mit Rücksicht auf die Symmetrievoraussetzungen gilt

$$(2) \quad \psi(x, y) = \frac{J}{\pi} \int_{\tilde{T}_1} \left( \log \left| \frac{z - z'}{2L} \right| - \log \left| \frac{z + iD + L - z'}{2L} \right| \cdot \left| 1 - \frac{z + iD + L - z'}{2L} \right| \right. \\ \left. + \log \left| \frac{\Gamma\left(-\frac{z - z'}{2L}\right) \Gamma\left(\frac{z + iD + L - z'}{2L}\right)}{\Gamma\left(\frac{z - z'}{2L}\right) \Gamma\left(-\frac{z + iD + L - z'}{2L}\right)} \right| \right) dz' dz''.$$



Fig. 5.

<sup>20)</sup> Einseitig unbegrenzte Wirbelreihen unendlich kleinen Querschnittes untersuchte Herr J. L. Synge, Proc. Roy. Irish Acad. 37 (1927), A, S. 95 ff., allerdings ohne auf die durch die Spiegelung modifizierte Fassung einzugehen. Vgl. ferner H. Villat, loc. cit. 1) b), S. 91 ff.

Wie zu Eingang des § 1 überzeugt man sich leicht, daß  $\psi$  außerhalb aller  $\hat{T}_1^{(n)}$  und  $\bar{T}_1^{(n)}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) der Laplaceschen Differentialgleichung, in sämtlichen Gebieten  $\hat{T}_1^{(n)}$  und  $\bar{T}_1^{(n)}$  der Poissonschen Differentialgleichung  $\Delta \psi = 2J$  bzw.  $= -2J$  genügt, je nach Besetzung durch die Wirbelstärke  $J$  oder  $-J$ .

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \hat{r}_v^2 &= (2vL - \mathfrak{X}_1 + x')^2 + (\mathfrak{Y}_1 - y')^2 & (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \\ \bar{r}_0^2 &= (L + \mathfrak{X}_1 - x')^2 + (D + \mathfrak{Y}_1 - y')^2, \\ (3) \quad \bar{r}_v^2 &= ((2v-1)L - \mathfrak{X}_1 + x')^2 + (D + \mathfrak{Y}_1 - y')^2, & (v = 1, 2, \dots), \\ \bar{r}_{-v}^2 &= ((2v+1)L + \mathfrak{X}_1 - x')^2 + (D + \mathfrak{Y}_1 - y')^2 \end{aligned}$$

und bringt man durch den am Summenzeichen angefügten Akzent zum Ausdruck, daß der Integralausdruck über  $\bar{r}_1$  fehlt, so liefert die Produktdarstellung der  $\Gamma$ -Funktion für einen auf  $S_1$  gelegenen Punkt  $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1)$

$$\begin{aligned} (4) \quad \psi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1) &= -\frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\hat{r}_0} dx' dy' + \frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\bar{r}_0} dx' dy' - C \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{v} - \frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\bar{r}_{-v}} dx' dy' + \frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\bar{r}_v} dx' dy' \right. \\ &\left. - \frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\bar{r}_v} dx' dy' + \frac{J}{\pi} \int_{\tau_1} \log \frac{2L}{\bar{r}_{-v}} dx' dy' \right\}, \end{aligned}$$

unter  $C$  die Eulersche Konstante verstanden. Man überzeugt sich nun leicht, daß das zweite Integral rechterhand in (4) sich wie  $O(h)$  und der in geschweiften Klammern befindliche Summand sich wie  $\frac{1}{v^3} O(h)$  verhält.

Da nun die weiteren Betrachtungen den oben in § 1 auseinandergesetzten völlig parallel verlaufen, verzichten wir auf ihre weitere Durchführung.

#### § 4.

##### Schlußbemerkung.

Die exakte Bestimmung der Gestalt der nahezu kreisförmig angenommenen Wirbelröhrenquerschnitte bei permanenten Bewegungen von Wirbelfäden endlichen Querschnitts in einer zweidimensionalen Flüssigkeit führte uns in unseren Untersuchungen immer wieder auf eine Integro-Differentialgleichung von gleicher Bauart. Die linken Seiten stimmten überein und die rechten Seiten unterschieden sich nur, der besonderen Form des Problems entsprechend, durch die Entwicklung, die von dem Einfluß aller anderen



Wirbelzylinder auf den gerade betrachteten herrührte. Die Größenordnung dieser zusätzlichen Einwirkung auf die Gestalt des Röhrenquerschnittes war gering genug, nämlich von der Ordnung  $O(h)$  bzw.  $O(h^2)$ , um die Auflösung der Integro-Differentialgleichung nach der Methode der sukzessiven Approximationen in allen Fällen zu gestatten. Es ist klar, daß noch viele weitere Beispiele derartiger Bewegungen, die bisher nur für unendlich dünne Wirbelfäden vorliegen, eine gleiche Behandlung bei endlichem Querschnitt zulassen. Erwähnt sei z. B. der seiner Natur nach einfachere Fall zweier Wirbelstraßen, die nur durch Spiegelung an ihrer Mittelparallelen ohne die von Kármánsche zusätzliche Translation auseinander hervorgehen, dieselbe Konfiguration bei Vorhandensein einer einseitigen Begrenzung durch eine ebene Wand (wie in § 3), ferner die zu Ende des § 1 erwähnte Problemstellung eines zwischen zwei parallelen ebenen Wänden befindlichen Wirbelzylinders. Eine weitere Modifikation besteht etwa darin, daß man bei geeigneter Abänderung der Voraussetzungen an die Stelle nahezu kreisförmiger nahezu elliptische Querschnitte treten läßt. In diesem Falle nimmt die für das Problem maßgebliche Integro-Differentialgleichung im wesentlichen, d. h. bezüglich ihrer linken Seite, dieselbe Gestalt an wie diejenige, auf die man bei der Untersuchung ringförmiger Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörper geführt wird <sup>21)</sup>.

In Verallgemeinerung einer von Lichtenstein ausgesprochenen Aufgabestellung <sup>22)</sup> sei nur noch der Fall in aller Kürze erwähnt, daß ein Wirbelzylinder konstanter Stärke  $J$  sich inmitten einer Flüssigkeitsmasse befindet, die von einem in Richtung der positiven und negativen  $z$ -Achse unbegrenzten prismatischen Gefäß rechteckigen Querschnittes eingeschlossen ist. Der Zylinder besitzt zwei zu den Gefäßwänden parallele Symmetrieebenen, seine Schwerachse fällt mit der Gefäßachse zusammen. Unter der Voraussetzung, daß der Durchmesser der Wirbelröhre gegenüber dem Durchmesser des Gefäßquerschnittes klein ausfällt, ist der nahezu kreisförmige Querschnitt der Wirbelröhre so zu bestimmen, daß die auf das Achsenkreuz  $x-y-z$  bezogene Flüssigkeitsbewegung permanent wird. Durch unbegrenzt wiederholte Spiegelung gelangt man von dieser Fassung des Problems zu einer doppelt unendlichen Folge kongruenter Wirbelröhren

<sup>21)</sup> Vgl. V. Garten, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Zentralkörper. Math. Zeitschr. 35 (1931), S. 684—745, insb. S. 695 und 742.

<sup>22)</sup> Vgl. die Problemstellung bei Lichtenstein, loc. cit. <sup>1)</sup> a), S. 469. Es wird hier nur der Fall eines prismatischen Gefäßes quadratischen Querschnittes erörtert. — Eingehende Untersuchungen des Problems im Fall unendlich dünner Wirbelröhren — es werden auch endlich viele in dem Gefäß angenommen — findet man bei Herrn Jaffé [vgl. loc. cit. <sup>1)</sup> c)] sowie im Anschluß an seine wichtigen Ausführungen bei Herrn Villat, loc. cit. <sup>1)</sup> b), S. 117 ff.

$W^{(n,m)}$  in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Schwerpunkte der Querschnitte  $T_1^{(n,m)}$  liegen in den Gitterpunkten

$$x = nL, \quad y = mD, \quad z = 0 \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Man hat diesmal das über  $T_1 = T_1^{(0,0)}$  erstreckte Flächenintegral

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = -\frac{J}{\pi i} \int_{T_1} \left( \log \frac{\sigma(z-z') \sigma(z-L-iD-z')}{\sigma(z-L+z') \sigma(z-iD-z')} \right) dx' dy'$$

zugrunde zu legen, wobei  $\sigma(z) = \sigma\left(z \middle| \frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}\right)$  die zum Periodenpaare  $(\omega = 2L, \omega' = i2D)$  gehörige Weierstraßsche Sigmafunktion bezeichnet. Unter Verwendung der Produktdarstellung der  $\sigma$ -Funktion gelangt man wie in den vorhergehenden Paragraphen zu einer Reihenentwicklung für die Strömungsfunktion  $\psi$ . Alle weiteren Betrachtungen, Zurückführung des Problems auf eine Integro-Differentialgleichung von dem oben mehrfach betrachteten Typus und ihre Auflösung durch das Verfahren der sukzessiven Approximationen, verlaufen den vorhergehenden Ausführungen völlig analog, so daß auf ihre Durchführung an dieser Stelle verzichtet werden kann.

Leipzig, den 20. 5. 1933.

(Eingegangen am 21. 5. 1933.)

# Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren.

Von

Kurt Friedrichs in Braunschweig.

---

Die vorliegende Arbeit entstand aus dem Versuch, mit den direkten Methoden der Variationsrechnung auch die Eigenwertprobleme solcher linearer partieller Differentialgleichungen zu lösen, die kein gewöhnliches Punktspektrum besitzen und also nicht der Variationsrechnung selbst zugänglich sind. Insbesondere sollte auf diese Weise die Spektraltheorie der quantentheoretischen Energieoperatoren ausgehend von Schrödingers Darstellung gewonnen werden.

Bei der näheren Durchführung dieses Versuchs zeigte sich, daß eine große Reihe gleichartiger Schlüsse und Begriffe bei den verschiedenen Problemen sich einheitlich fassen lassen, wenn man sie der Symbolik der allgemeinen Operatorentheorie des Hilbertschen Raumes unterordnet; und zwar der des „abstrakten“ Hilbertschen Raumes, wie sie zuerst konsequent durch v. Neumann [7. 2] ausgearbeitet wurde. Die früher bevorzugte Darstellung des Hilbertschen Raumes durch unendlich viel Veränderliche erweist sich als unhandlich zur Darstellung von Funktionenräumen. Überdies kann, wie v. Neumann [7. 1] erkannt hat, die Darstellung nicht beschränkter Linearoperatoren durch unendliche Matrizen geradezu irreführend sein.

Dagegen erwies es sich als unnötig, die allgemeine Spektraltheorie nicht beschränkter Operatoren von v. Neumann heranzuziehen, da wir von vornherein nur halbbeschränkte Operatoren betrachten; für solche kann die Spektraltheorie unmittelbar auf die der beschränkten Operatoren zurückgeführt werden. In der Tat sind die meisten Energieoperatoren nach unten halbbeschränkt. Auch bei der Behandlung von Eigenwertdifferentialgleichungen durch Variationsrechnung wurde die Halbbeschränktheit wesentlich ausgenutzt.

Eine Theorie halbbeschränkter Operatoren findet sich bei A. Wintner [13]; allerdings ist sie wesentlich auf unendliche Matrizen bezogen.

Man hat zwar bisher schon mehrfach Eigenwertprobleme von Differentialgleichungen auf die Hilbertsche Theorie zurückgeführt (vgl. z. B. [6]);

doch in der Weise, daß man mit Hilfe der explizit bekannten Greenschen Funktion die beschränkte Reziproke des Differentialoperators aufsuchte. Meist handelt es sich um die Fälle, bei denen ein diskretes Punktspektrum auftritt.

Darüber hinaus führt vor allem die Theorie der Differentialgleichungen mit Singularitäten von H. Weyl [12. 1, 12. 2]<sup>1)</sup>.

Diese Weylsche Theorie wurde von Stone [10. 2] allgemeiner aufgenommen und ohne Reduktion auf Integraloperatoren anders entwickelt.

Wesentlich wird bei dieser Theorie die bekannte zweiparametrische Schar der Lösungen der Differentialgleichungen benutzt; und von daher rühren die Schwierigkeiten bei dem Versuch einer unmittelbaren Übertragung auf partielle Differentialgleichungen<sup>2)</sup>.

Im Teil I dieser Arbeit wird die Spektraltheorie halbbeschränkter symmetrischer Operatoren im abstrakten Hilbertschen Raum entwickelt. Man kann diese Theorie leicht gewinnen, wenn man neben Operatoren noch zugehörige Formen betrachtet. Ohne Einschränkung sei diese Form  $G$  positiv halbbeschränkt; d. h. es gebe ein positives  $\gamma$ , so daß mit der Einheitsform  $H$  gilt

$$G \geq \gamma H.$$

Man kann nun die Form  $G$  als Maßform eines neuen Hilbertschen Raumes (eines Teilraumes des ursprünglichen) auffassen; dann wird  $H$

<sup>1)</sup> Weyl behandelt die Eigenwertgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu - \lambda u = 0$$

für eine Funktion  $u(x)$  in  $x \geq 0$ . Dabei sei  $p > 0$  und  $p$  und  $q$  stetig in  $x \geq 0$ . Bei  $x = 0$  sei eine Randbedingung  $\cos \theta u + \sin \theta \frac{du}{dx} = 0$  gestellt. Weyl zeigt, daß zwei Fälle eintreten können,

1. der Grenzfunktall, bei dem außer der Existenz von  $\int_0^\infty u^2 dx$  keine weitere Bedingung für  $u$  bei  $x = \infty$  zu stellen ist, und

2. der Grenzkreisfall, bei dem noch eine zyklische einparametrische Schar von Randbedingungen bei  $x = \infty$  zur Auswahl steht.

Weyl zeigt ferner, wie die Eigenfunktionen des Streckenspektrums aus den nicht im Hilbertschen Raum gelegenen Lösungen der Eigenwertdifferentialgleichung durch Integration nach dem Eigenwert zu gewinnen sind.

<sup>2)</sup> Bei Abfassung dieser Arbeit bemerke ich, daß Carleman [1] angibt, es sei leicht, die Theorie von Weyl auf Gleichungen von mehr Variablen zu übertragen, sei es direkt, sei es vermittle der Theorie der Hermiteschen Integralgleichungen.

eine beschränkte Form. Die für beschränkte Formen bekannte Spektralzerlegung führt so unmittelbar zur Spektralzerlegung der halbbeschränkten Form  $G^3$ ).

Solche halbbeschränkten Formen  $G$  können stets aus halbbeschränkten Operatoren gewonnen werden. Die Spektralzerlegung solcher Operatoren ist aber nur dann möglich und auf diesem Wege zu gewinnen, wenn sie „selbstadjungiert“ (hypermaximal) sind. Diese Bedingung läßt sich nun für halbbeschränkte Operatoren durch wesentlich abgeschwächtere ersetzen, die auch für unsere Differentialoperatoren leichter nachzuweisen sind.

Schließlich werden noch die von Hilbert [5. 2] und Weyl [12. 3] herrührenden Kriterien dafür, daß das Spektrum z. T. diskret ist, auf halbbeschränkte Operatoren übertragen.

Im Teil II wird die vorangehende Theorie auf Differentialoperatoren angewandt. Wir haben uns dabei auf typische Fälle beschränkt. Der Operator sei

$$-\sum_{r=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_r^2} + v(x_1, \dots, x_n),$$

anzuwenden auf Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Vollständig wird nur der Fall  $n = 1, 2, 3$  durchgeführt. Wir behandeln einmal den Fall (1) des unendlichen Gebietes mit stetiger nach unten beschränkter Funktion  $v$ ; zweitens (2) wird eine Singularität von  $v$  in einem Punkte zugelassen. Sodann wird ein endliches Gebiet zugrunde gelegt, an dessen Rande die Funktion  $f$  (3) oder ihre normale Ableitung verschwinden soll (4); aus Bequemlichkeit wird dieses Gebiet als Strecke, Kreis, Kugel gewählt. Die Ergebnisse in den Fällen endlichen Gebietes sind nicht neu, ihre Behandlung wurde mit aufgenommen, um zu zeigen, wie weit die Theorie aller Fälle gemeinsam durchgeführt werden kann.

Die erste Aufgabe ist, die Räume der zulässigen Funktionen anzugeben. Diese sind nun zunächst keine Hilbertschen Räume; sie werden aber durch Adjunktion idealer Elemente zu Hilbertschen Räumen fortgesetzt; wir verzichten darauf, diese idealen Elemente durch nach Lebesgue quadratisch integrierbare Funktionen zu realisieren; insbesondere deshalb,

<sup>3)</sup> Übrigens ergibt sich von hier aus auch ein einfacher Zugang zur Spektraltheorie beliebiger unbeschränkter selbstadjungierter Linearoperatoren. Dieser neue Weg bietet gegenüber den bisherigen von v. Neumann [7. 2], Stone [10. 1], Fr. Riesz [9] den prinzipiellen Vorzug, daß er nicht voraussetzt, daß der zugrunde gelegte Hilbertsche Raum komplex ist; er soll an anderer Stelle durchgeführt werden.

weil gezeigt werden kann, daß die „Eigenelemente“, die vor allem interessieren, doch schon den Ausgangsfunktionsräumen angehören<sup>4)</sup>).

Auch der Operator ist zunächst nur in einem Raum zweimal differenzierbarer Funktionen erklärt und wird dann formal, aber eindeutig abgeschlossen.

Die Hauptaufgabe ist, nachzuweisen, daß dieser Operator selbstadjungiert ist. Hier liegen überhaupt die eigentlichen Schwierigkeiten der ganzen Theorie. Ihre Überwindung gelingt durch Übertragung der insbesondere von Courant [2. 1, 2. 3, 2. 6, 4. 1] entwickelten Schlußweisen, die bei den direkten Methoden der Variationsrechnung entscheidend sind.

Es zeigt sich so, daß an den für konkrete Differentialoperatoren notwendigen Überlegungen durch die Einordnung in die abstrakte Operatorentheorie kaum etwas gespart wird. Gewonnen ist — abgesehen von der mehr systematischen Anordnung — die Möglichkeit, solche Fälle zugleich mit zu behandeln, bei denen ein diskontinuierliches Spektrum auftritt.

Das *Ergebnis* des zweiten Teiles ist vor allem die Spektralzerlegung des Differentialoperators. Darunter ist die Existenz einer „Spektralschar“, einer Schar von Projektionsoperatoren im Sinne der allgemeinen Spektralt heorie verstanden (vgl. Teil I, Nr. 4). Es wird außerdem gezeigt, daß die Eigenelemente dieser Projektionsoperatoren zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind. Wir verzichten darauf, diese Projektionsoperatoren und ihre Eigenelemente mit Hilfe der Lösungen der Eigenwertdifferentialgleichungen darzustellen. Wohl folgt unmittelbar für die Eigenfunktionen der Punkteigenwerte, daß sie der Eigenwertdifferentialgleichung genügen. Die Eigenfunktionen des Streckenspektrums könnte man im Falle einer Dimension nach Weyl durch Integration nach dem Eigenwert aus den Lösungen der Eigenwertdifferentialgleichung gewinnen; in den separierbaren Fällen bei mehr Dimensionen ist dasselbe möglich, wie in einer anderen Arbeit gezeigt werden soll; für eine solche Darstellung im allgemeinen Fall bei mehr Dimensionen liegen keine Ansätze vor; hierauf das Hauptschwergewicht der Untersuchung zu legen, scheint mir auch nicht angemessen zu sein.

Ein weiteres Ergebnis bezieht sich auf die Diskussion des Spektrums. Es kann unter einfachen Bedingungen für das „Zusatzpotential“  $v$  die Natur des Spektrums genauer bestimmt werden. Es liegt nämlich ein diskretes ins Unendliche anwachsendes Punktspektrum vor, wenn das

<sup>4)</sup> Dies Verfahren entspricht ganz dem Vorgang von Hilbert bei seiner Zurückführung der Integralgleichungen auf Gleichungen mit unendlich viel Veränderlichen [5. 1].

Gebiet endlich ist. Dasselbe gilt beim unendlichen Gebiet, wenn das Zusatzpotential  $v$  im Unendlichen über alle Schranken wächst. Besitzt dagegen das Zusatzpotential einen endlichen unteren Limes im Unendlichen, so ist das Spektrum unterhalb dieses Wertes diskret.

Diese Kriterien entsprechen einem Teil der Kriterien, die Weyl in seiner Theorie der Differentialgleichungen mit Singularitäten aufgestellt hat; sie können aber in einer von der Anzahl der Variablen unabhängigen Weise bewiesen werden.

Die vorliegende Arbeit enthält den 1. Teil dieser Untersuchungen, der 2. Teil wird in einem folgenden Heft erscheinen.

### Literatur.

- [1] Carleman, T.  
Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. Verh. d. intern. Math. Kong. Zürich 1932. Bd. I, S. 59.
- [2] Courant, R.  
1. Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der math. Physik. Math. Zeitschr. 7. 2. S. 13.  
3. Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik. Math. Annalen 85 (1922). 4. S. 316—317. 5. S. 296.  
6. Über direkte Methoden bei Variations- und Eigenwertproblemen. Jahresber. d. d. Math. Vereinig. 34 (1925), S. 105 ff.  
7. und Hilbert, D. Methoden der mathematischen Physik I (1931), 2. Aufl., Kap. VI, § 5.
- [3] Dirac, P. A. M.  
Die Prinzipien der Quantenmechanik, § 10 (1930).
- [4] Friedrichs, K.  
1. Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Math. Annalen 96 (1927), S. 205 ff. 2. S. 229.
- [5] Hilbert, D.  
1. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Kap. 13, 14. 2. Kap. 11, Satz 35.
- [6] Lichtenstein, L.  
Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 127—160.
- [7] Neumann, J. v.  
1. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. J. f. reine u. angew. Math. 161 (1929), S. 208.  
2. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen 102 (1929), S. 50 ff. 3. S. 70, Def. 5 und Satz 9, S. 72, Def. 9. 4. S. 103, Satz 41. 5. S. 103, <sup>58</sup>).  
6. Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. of Math. 33 (1932), S. 299.
- [8] Rellich, F.  
Ein Satz über mittlere Konvergenz. Gött. Nachr. 1930.



[9] Riesz, Fr.

1. Les systèmes d'équations lineaires (1913), Nr. 72.
2. Über die linearen Transformationen, Acta Litt. ac Sci. Sectio Math. Szeged 5 (1930). 3. S. 19—54.

[10] Stone, M. H.

1. Linear Transformations in Hilbert Space. New York 1932. Chap. V.
2. Chap. X, § 3.

[11] Toeplitz, O.

Die Jacobische Transformation ..., Gött. Nachr. 1907, S. 101—109.

[12] Weyl, H.

1. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen. Gött. Nachr. 1909, S. 37.
2. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten. Math. Annalen 68 (1910), S. 220.
3. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollständig ist. Palermo Rend. 27 (1909), S. 373—392.

[13] Wintner, A.

Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, § 111.

## 1. Teil.

### Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren.

#### 1. Grundbegriffe.

Es sei erlaubt, zunächst einige wohlbekannte (vgl. [7. 2]) Grundbegriffe und Sätze über Formen und Operatoren zusammenzustellen in einer für unsere Zwecke geeigneten Bezeichnung, um von anderer Literatur unabhängig zu sein.

Unter einem *Raum*  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{F}$  von Elementen  $x, h, g, f$  sei stets ein reeller *linearer* Raum mit — wenn nicht anders bemerkt — wenigstens abzählbar unendlich vielen linear unabhängigen Elementen verstanden.

Eine *Bilinearform* ordnet jedem Paar von Elementen  $x, x_1$  eine reelle Zahl zu, linear in  $x$  und  $x_1$ ; wir bezeichnen<sup>\*)</sup> sie mit

$$x_1 A x.$$

Wir setzen stets

$$x_1 A x = x A x_1$$

voraus, d. h.  $A$  sei *symmetrisch*.

Eine aus einer solchen Bilinearform bestehende quadratische Form  $x A x$  heiße „nie negativ“, wenn

$$x A x \geq 0$$

<sup>\*)</sup> Diese Symbolik ist derjenigen von Dirac nachgebildet. Unsere ganze Theorie ist auch im komplexen Raum zu entwickeln, mit nur geringen durchaus geläufigen Abänderungen.

gilt; für solche Formen gilt schon — wie aus der bekannten Schlußweise folgt — die Schwarz-Ungleichung.

$$x_1 A x \leq \sqrt{(x_1 A x_1)} \sqrt{(x A x)}.$$

Positiv-definit nennen wir sie nur, wenn aus  $x A x = 0$  stets  $x = 0$  folgt.

Ist in einem Raum  $\mathfrak{X}$  durch eine positiv-definite „Maßform“  $x X x$  eine Metrik  $|x| = \sqrt{x X x}$  eingeführt, läßt sich Dichte einer Menge in  $\mathfrak{X}$  und Konvergenz einer Folge  $x$  erklären. Wir wollen sagen:

Eine Folge  $x$  konvergiert *stark* ( $X$ )

I „in sich“, wenn  $|x_\nu - x_\mu| \rightarrow 0, \quad \nu, \mu \rightarrow \infty$

II gegen  $x$ , wenn  $|x_\nu - x| \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty$

gilt.

Ist der Raum *separabel* (d. h. er enthält eine abzählbare dichte Menge) und *abgeschlossen* (auch vollständig) (d. h. zu jeder in sich konvergenten Folge gibt es ein Grenzelement), heißt er ein (abstrakter) *Hilbertscher Raum*.

Wir wollen im folgenden einen Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  von Elementen  $h$  zugrunde legen mit der Maßform<sup>6)</sup>  $H$ .

Wesentlich für unsere Behandlung ist, daß öfter auch Teilräume von  $\mathfrak{H}$ , z. B.  $\mathfrak{G}$  als Hilbertsche Räume mit einer anderen Maßform, z. B.  $G$  herangezogen werden, und daß dann Konvergenz und Dichte auf sie bezogen werden. Wir sprechen dann z. B. von Konvergenz ( $G$ ) und von  $G$ -Dichte.

Teilräume  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \dots$  von  $\mathfrak{H}$ , in denen Formen und Operatoren erklärt sind, seien stets als  $H$ -dicht in  $\mathfrak{H}$  vorausgesetzt.

Ein Operator  $A$  in  $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{H}$  erklärt, ordnet jedem Element  $f$  aus  $\mathfrak{F}$  ein  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  zu.

Zu jedem Operator  $A$  in  $\mathfrak{F}$  „gehört“ die Form  $A$  in  $\mathfrak{F}$ :

$$f_1 A f = (f_1 H A f).$$

Der Operator heißt *symmetrisch*, wenn es die zugehörige Form ist, wenn nicht anders bemerkt, seien Operatoren stets als *symmetrisch* und *linear* vorausgesetzt.

Ein Operator  $B$  in  $\mathfrak{F}$  heißt *beschränkt*<sup>7)</sup>, wenn es seine Form  $B$  ist: es gibt zwei reelle Zahlen  $\beta, \beta'$ , so daß  $\beta (f H f) \leq (f B f) \leq \beta' (f H f)$  gilt.

<sup>6)</sup> Die übliche Schreibweise entsteht, indem man  $H$  durch  $\cdot$  ersetzt.

<sup>7)</sup> Der nicht symmetrische Operator  $S$  heißt *beschränkt*, wenn für  $f, f_1$  aus  $\mathfrak{F}$  gilt:

$$|f H S f_1| \leq C |f| |f_1|.$$

Die nächst einfache Klasse bilden die *halbbeschränkten Formen*. Eine Form  $G$ , in  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{H}$  definiert, heißt (nach unten) *positiv-halb-beschränkt*<sup>6)</sup> mit der (unteren) Schranke  $\gamma$ , wenn es ein  $\gamma > 0$  gibt, so daß für alle Elemente  $g$  aus  $\mathfrak{G}$

$$g G g \geq \gamma (g H g)$$

ist.

Entsprechend heißt ein Operator *positiv-halbbeschränkt*, wenn es die zugehörige Form ist.

Wichtig ist für das Folgende die Eigenschaft der „Abgeschlossenheit“, die positiv-halbbeschränkte Formen besitzen können.

Eine positiv-halbbeschränkte Form  $G$  heißt *abgeschlossen* in  $\mathfrak{G}$ , wenn der Raum  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen ist mit  $g G g$  als Maßform.  $\mathfrak{G}$  ist dann auch ein Hilbertscher Raum mit  $G$  als Maßform<sup>7)</sup>.

Für (nicht notwendig halbbeschränkte) Operatoren  $A$ , in dichten Teilmengen  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{H}$  definiert, hat v. Neumann [7.3] einen Begriff der Abgeschlossenheit eingeführt, dem der vorangehende nachgebildet ist. Seine Formulierung ist gleichwertig mit der folgenden (ähnlich bei [7.6]):

Ein Operator  $A$  in  $\mathfrak{F}$  heißt *abgeschlossen*, wenn der Raum  $\mathfrak{F}$  abgeschlossen ist mit

$$A / H A / + / H / \quad (\text{kurz } A^2 + H)$$

als Maßform.

## 2. Fortsetzung durch Abschließen.

Die Differentialoperatoren, die wir vor allem im Auge haben, sind meist nicht in abgeschlossenen Räumen und selbst nicht abgeschlossen gegeben, während diese Eigenschaft bei der allgemeinen Spektraltheorie vorausgesetzt wird. Schon aus diesem Grunde wird man dazu geführt, zu untersuchen, ob sich Räume, Operatoren und Formen in erweiterten Definitionsbereichen zu abgeschlossenen fortsetzen lassen.

Es sei ein Raum  $\mathfrak{F}'$  von Elementen  $h$  mit der Maßform  $H$  gegeben. Den Raum  $\mathfrak{F}'$  zu einem Raum  $\mathfrak{H}$  fortsetzen heißt: weitere — auch  $h$

<sup>6)</sup> Ohne die Annahme  $\gamma > 0$  hieße die Form nur halbbeschränkt, eine solche kann aber stets durch Addition von  $(1 - \gamma)(g H g)$  zu einer positiv-halb-beschränkten gemacht werden.

<sup>7)</sup> Man konstruiert sich leicht eine abzählbare  $G$ -dichte Teilmenge  $(\mathfrak{G})$  von  $\mathfrak{G}$ . Zunächst gibt es — Separabilität von  $\mathfrak{H}$  — in jeder Teilmenge  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{H}$  eine abzählbare  $H$ -dichte Menge  $(\mathfrak{M})$ . Man bilde nun die Folge der Teilmengen  $\mathfrak{G}_n$  von  $\mathfrak{G}$ , die durch die Bedingung  $g G g \leq n(g H g)$  gekennzeichnet sind. Jedes Element  $g$  gehört zu einer von ihnen. Die Menge  $(\mathfrak{G}_n)$  (d. h. die abzählbare  $H$ -dichte Teilmenge von  $\mathfrak{G}_n$ ) ist dann auch  $G$ -dicht in  $\mathfrak{G}_n$  und die Summe der  $(\mathfrak{G}_n)$  hat die von  $(\mathfrak{G})$  gewünschte Eigenschaft.

genannte — (ideale) Elemente adjungieren, für sie zusammen mit den Elementen aus  $\mathfrak{S}'$  Addition, Multiplikation mit reellen Zahlen und die Form  $H$  positiv-definit definieren.

Es gilt dann der Satz:

Satz 1. Ist der Raum  $\mathfrak{S}'$  mit der Maßform  $H$  separabel, so kann er zu einem abgeschlossenen, also Hilbertschen Raume  $\mathfrak{S}$  fortgesetzt werden; und zwar nur auf eine Weise<sup>10)</sup>, so, daß  $\mathfrak{S}'$  dicht liegt in  $\mathfrak{S}$ .

Beweis. Jeder Folge  $h_\nu$  aus  $\mathfrak{S}'$ , die in sich konvergiert

$$|h_\nu - h_\mu| \rightarrow 0,$$

ordne man, wenn nicht schon ein Grenzelement aus  $\mathfrak{S}'$  existiert, ein ideales Grenzelement  $h$  zu. Zweien solcher Folgen  $h_1, h_2$ , für die  $|h_1 - h_2| \rightarrow 0$  strebt, ordne man dasselbe Grenzelement zu. Besitzen zwei Folgen  $h_1, h_2$ , Grenzelemente  $h_1, h_2$  (aus  $\mathfrak{S}'$  oder ideale), so besitzt  $h_1, H h_2$ , einen Grenzwert; als ihn definiere man  $h_1 H h_2$ . Man zeigt leicht:  $H$  ist dann in ganz  $\mathfrak{S}$  bilinear, positiv definit, und jede in Satz 1 behauptete Fortsetzung kann auf diese Weise erzeugt werden.

Es sei in  $\mathfrak{S}' \leq \mathfrak{S}$  ein Operator  $A$  definiert. Den Operator  $A$  in  $\mathfrak{S}'$  in einen Teilraum  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{S}' < \mathfrak{F} \leq \mathfrak{S}$ ) fortsetzen, heißt, ihn für die Elemente von  $\mathfrak{F}$ , die nicht in  $\mathfrak{S}'$  liegen, so definieren, daß er in ganz  $\mathfrak{F}$  linear und symmetrisch wird.

Entsprechend erklärt sich die Fortsetzung einer Form.

Es gelten dann die Sätze:

Satz 2. Ein beschränkter Operator  $B$  bzw. eine beschränkte Form  $B$ , die nur in einem dichten Teilraum von  $\mathfrak{S}$  erklärt sind, können eindeutig mit denselben Schranken  $\beta$  in  $\mathfrak{S}$  fortgesetzt werden<sup>11)</sup>.

Satz 3. Ein Operator  $G$ , im Raum  $\mathfrak{S}'$  der Elemente  $f$  erklärt, führe zu einer positiv halbbeschränkten Form  $G$  mit der Schranke  $\gamma > 0$

$$|HGf| = |Gf| \geq \gamma (|Hf|).$$

Dann gibt es einen  $\mathfrak{S}'$  enthaltenden Teilraum  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{S}' \leq \mathfrak{G} \leq \mathfrak{S}$ ), in den sich die Form  $G$  zu einer abgeschlossenen mit derselben Schranke  $\gamma$  fortsetzen läßt.  $\mathfrak{G}$  und  $G$  in  $\mathfrak{G}$  sind eindeutig bestimmt, wenn  $\mathfrak{S}'$   $G$ -dicht liegen soll in  $\mathfrak{G}$ .

Es heiße  $G$  in  $\mathfrak{G}$  die zu  $G$  in  $\mathfrak{S}'$  bzw.  $G$  in  $\mathfrak{S}'$  gehörige abgeschlossene Form.

<sup>10)</sup> D. h. zwei Fortsetzungen sind so aufeinander abbildbar, daß zugleich Multiplikation mit reellen Zahlen, Addition und Werte der Form  $H$  abgebildet werden.

<sup>11)</sup> Entsprechendes gilt auch für nicht symmetrische Operatoren.

Vor dem Beweis von Satz 3 erwähnen wir noch

**Satz 4.** Zu jedem Operator  $A$  in  $\mathfrak{F}'$  gibt es einen  $\mathfrak{F}'$  enthaltenden Teilraum  $\mathfrak{F}$  von  $\mathfrak{H}$ , in dem sich eine abgeschlossene Fortsetzung von  $A$  definieren läßt.  $\mathfrak{F}$  und  $A$  in  $\mathfrak{F}$  sind eindeutig bestimmt, wenn  $\mathfrak{F}'$  in  $\mathfrak{F}$  dicht liegen soll mit  $A^2 + H$  als Maßform.

$A$  in  $\mathfrak{F}$  heißt der abgeschlossene Operator von  $A$  in  $\mathfrak{F}'$ .

Der Satz 4 und sein einfacher Beweis findet sich bei v. Neumann [7. 3].

**Bemerkung zu Satz 3 und 4.** Der Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  führe zur Form  $G$  in  $\mathfrak{F}'$ . Es seien  $G$  in  $\mathfrak{F}$  der zugehörige abgeschlossene Operator,  $G$  in  $\mathfrak{G}$  die zugehörige abgeschlossene Form. Dann liegt  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{G}$ .

Wir beweisen zuerst diese Bemerkung, dann Satz 4 und zum Schluß Satz 3.

**Beweis der Bemerkung.** Liegt  $f$  in  $\mathfrak{F}$ , so kann es  $H$ -approximiert werden durch eine Folge  $f_v$ , für die auch  $Gf_v$   $H$ -konvergiert, also gilt auch

$$(f_v - f_\mu) H G (f_v - f_\mu) \rightarrow 0 \quad \text{für } v, \mu \rightarrow \infty,$$

d. h.

$$(f_v - f_\mu) G (f_v - f_\mu) \rightarrow 0,$$

also konvergiert  $f_v$  auch in bezug auf  $G$ ; das Grenzelement  $f$  muß nach Satz 3 auch in  $\mathfrak{G}$  liegen.

Sodann sei der Beweis von Satz 4 nach v. Neumann kurz referiert. Konvergiert für eine Folge  $f_v$  die Form

$$(f_v - f_\mu) H (f_v - f_\mu) + A (f_v - f_\mu) H A (f_v - f_\mu) \rightarrow 0 \quad \text{bei } v, \mu \rightarrow \infty,$$

so gibt es Grenzelemente  $f_0$  und  $h_0$ , so daß

$$f_v \rightarrow f_0, \quad A f_v \rightarrow h_0 (H).$$

Alle Elemente  $f_0$ , die so entstehen können, bilden den offenbar linearen Raum  $\mathfrak{F}$ . Wenn nun zwei solche Folgen  $f_{1v}, f_{2v}$ , dasselbe Grenzelement  $f_{10} = f_{20}$  besitzen, so besitzen auch  $A f_{1v}$  und  $A f_{2v}$  dasselbe Grenzelement; denn für alle  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  gilt

$$h H (f_{1v} - f_{2v}) \rightarrow 0,$$

also auch für

$$h = A f,$$

wo  $f$  alle Elemente aus  $\mathfrak{F}'$  darstellt, d. h.

$$A f H (f_{1v} - f_{2v}) = f H A (f_{1v} - f_{2v}) \rightarrow 0 \quad \text{bei } v, \mu \rightarrow \infty$$

und also

$$f H (h_{10} - h_{20}) = 0;$$

da  $\mathfrak{F}'$  dicht liegt, folgt  $h_{10} = h_{20}$ . Nun kann durch  $A f_0 = h_0$  der Operator  $A$  in ganz  $\mathfrak{F}$  definiert werden; er bleibt offenbar linear und symmetrisch.

Der Beweis von Satz 3 wird ähnlich geführt; übrigens kann nicht jede positiv-halbbeschränkte Form zu einer abgeschlossenen Form fortgesetzt werden; eine Zusatzbedingung wie z. B. die, daß sie zu einem Operator gehört, ist notwendig.

Zum Beweise von Satz 3 werden wir nach Satz 2 den Raum  $\mathfrak{F}'$  mit der Maßform  $G$  durch Adjunktion von zunächst idealen Elementen abschließen zu einem Raum  $\mathfrak{G}$  von Elementen  $g$  mit der Maßform  $G$ . Jede Folge  $f$ , von Elementen aus  $\mathfrak{F}'$ , die mit  $G$  als Maßform in sich konvergiert, konvergiert ebenso mit  $H$  als Maßform wegen

$$\gamma(f H f) \leq |G f|,$$

besitzt also ein Grenzelement  $h$  aus  $\mathfrak{H}$ ; es ist aber zunächst nicht ausgeschlossen, daß zwei Folgen  $f_1$ , und  $f_2$ , zwei verschiedene Grenzelemente  $g_1$  und  $g_2$  entsprechen, während die Grenzelemente  $h_1 = h_2$  identisch sind. Daß das nicht eintritt, soll gezeigt werden. Aus der Voraussetzung, daß zu  $G$  ein Operator  $G$  gehört, folgern wir nämlich

3, 1. Wenn für eine Folge  $f$ , aus  $\mathfrak{F}'$

$$h H f_v \rightarrow 0 \quad \text{für alle } h \text{ aus } \mathfrak{H}$$

gilt, so folgt

$$f G f_v \rightarrow 0 \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{F}'^{12}.$$

Denn es gilt

$$f G f_v = G f H f_v \rightarrow 0.$$

Aus 3, 1 folgt nun leicht

3, 2. Wenn für eine Folge  $f$ , aus  $\mathfrak{F}'$  gilt

$$(f_r - f_v) G (f_r - f_v) \rightarrow 0 \quad \text{für } v, \mu \rightarrow \infty$$

und

$$f_r H f_v \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow \infty,$$

so gilt auch

$$f_r G f_v \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow \infty.$$

<sup>12)</sup> Übrigens gilt, wenn  $f, G f$ , beschränkt bleibt,  $g G f_v \rightarrow 0$  auch für alle  $g$  aus  $\mathfrak{G}$ , da  $\mathfrak{F}'$   $G$ -dicht liegt in  $\mathfrak{G}$ .

Es bedeutet dann Hilfssatz 3, 1:

Wenn eine solche Folge  $f$ , schwach konvergiert in  $\mathfrak{H}$  mit  $H$  als Maß, so auch in  $\mathfrak{G}$  mit  $G$  als Maß.

Diese Eigenschaft (3, 1) ist auch gleichwertig mit der Halbstetigkeit von  $G$  bei schwacher  $G$ -Konvergenz; der folgende Beweis ist nichts als die abstrakte Formulierung häufig angewandter Halbstetigkeitsbeweise; vgl. auch die verwandte Schlußweise bei Courant [2. 4].

Denn für eine solche Folge ist die Voraussetzung von (3, 1) erfüllt; also folgt  $f_\mu G f_\nu \rightarrow 0$  bei festem  $\mu$ . Jetzt ziehe man die Schwarz-Ungleichung

$$|f_\mu G f_\nu - f_\nu G f_\mu| \leq \sqrt{(f_\nu - f_\mu) G (f_\nu - f_\mu)} \sqrt{f_\mu G f_\mu}$$

heran. Die untere Grenze der rechten Seite für  $\nu \rightarrow \infty$  strebt mit wachsendem  $\mu$  gegen Null; die untere Grenze der linken Seite für  $\nu \rightarrow \infty$  ist  $f_\mu G f_\mu$ ; also strebt auch  $f_\mu G f_\mu \rightarrow 0$  mit wachsendem  $\mu$ .

Nun erkennt man unmittelbar: Sind  $f_1, f_2$  zwei Folgen aus  $\mathfrak{F}'$ , die zwei Grenzelemente  $g_1, g_2$  und zwei Grenzelemente  $h_1, h_2$  definieren, und ist  $h_1 = h_2$ , so sind für die Differenz  $f = f_1 - f_2$ , die Voraussetzungen von (3, 2) erfüllt; es folgt also  $(f_1 - f_2) G (f_1 - f_2) \rightarrow 0$ , woraus  $(g_1 - g_2) G (g_1 - g_2) = 0$  und also  $g_1 = g_2$  folgt.

Ist  $g_1 = g_2$  ein reales Element aus  $\mathfrak{F}'$ , so ist  $g_1 = g_2 = h_1 = h_2$ ; denn die Folge  $f_1$  konvergiert ja auch in bezug auf  $H$  gegen  $g_1$ . Ist dagegen  $g_1 = g_2$  ein ideales Element aus  $\mathfrak{G}$ , so identifizieren wir es mit  $h_1 = h_2$ . Dadurch aber wird  $\mathfrak{G}$  zu einem Teilraum von  $\mathfrak{H}$ .

### 3. Operator einer Form.

Während unmittelbar jedem Operator eine Form zugehört, ist das Umgekehrte nur in beschränktem Maße der Fall. Es gilt nach F. Riesz (vgl. z. B. [9, 2]).

**Satz 5.** Zu jeder beschränkten Form  $B$  in  $\mathfrak{H}$  gehört ein beschränkter Operator  $B$  in  $\mathfrak{H}$ , so daß gilt

$$h B h = h H B h.$$

**Beweis.** Es sei erlaubt, einen einfachen Beweis anzugeben, der auf die Darstellung durch ein Orthogonalsystem keinen Bezug nimmt.

Wir stellen das *Minimumproblem*: Jedem Element  $k_1$  aus  $\mathfrak{H}$  ein solches Element  $h = k_0$  zuzuordnen, für das

$$J[h] = h H h - 2 h B k_1$$

möglichst klein wird. Sicher ist  $J[h]$  nach unten beschränkt, da  $B$  beschränkt ist. Es gibt also eine untere Grenze  $d$  und eine Minimalfolge  $h_n$ .

Für sie folgt

$$d_n = h_n H h_n - 2 h_n B k_1 \rightarrow d$$

und aus

$$(h_n + \varepsilon h) H (h_n + \varepsilon h) - 2 (h_n + \varepsilon h) B k_1 \geq d,$$

daß

$$(d_n - d) + 2 \varepsilon (h H h - h B k_1) + \varepsilon^2 h H h \geq 0,$$



also in  $\varepsilon$  nie negativ ist, so daß

$$\sqrt{(d_r - d) h H h} \geq |h H h_r - h B k_1|$$

gilt für alle  $h$  aus  $\mathfrak{S}$ . Hieraus folgt zunächst

$$h H h_r - h B k_1 \rightarrow 0;$$

sodann, indem man  $h = h_r - h_\mu$  setzt und  $r$  mit  $\mu$  vertauscht.

$$\begin{aligned} (h_r - h_\mu) H (h_r - h_\mu) &= |(h_r - h_\mu) H h_r - (h_r - h_\mu) B k_1| \\ &\quad + |(h_\mu - h_r) H h_\mu - (h_\mu - h_r) B k_1| \\ &\leq (\sqrt{d_r - d} + \sqrt{d_\mu - d}) \sqrt{(h_r - h_\mu) H (h_r - h_\mu)} \end{aligned}$$

und also

$$(h_r - h_\mu) H (h_r - h_\mu) \leq (\sqrt{d_r - d} + \sqrt{d_\mu - d})^2 \rightarrow 0.$$

D. h. aber,  $h_r$  konvergiert gegen ein Grenzelement  $k_0$ ; für dieses ergibt sich mit jedem  $h$  aus  $\mathfrak{S}$

$$(*) \quad h H k_0 - h B k_1 = 0.$$

Die Zuordnung des  $k_0$  zum  $k_1$  bezeichnen wir als Operator  $B$ . D. h. wir setzen

$$k_0 = B k_1.$$

Es gilt dann

1.  $B$  ist eindeutig; denn die Differenz zweier  $k_0$ , die zum selben  $k_1$  gehören, müßte nach (\*) auf allen  $h$  orthogonal sein.

2.  $B$  ist linear; denn die Summe zweier  $k_0$  erfüllt die Relation (\*) für die Summe der  $k_1$ . Ihr Bestehen ist aber für die Minimumeigenschaft kennzeichnend, da aus ihr

$$\begin{aligned} (k_0 + h) H (k_0 + h) - 2(k_0 + h) B k_1 \\ \geq k_0 H k_0 - 2k_0 B k_1 = d \end{aligned}$$

folgt.

3.  $B$  gehört zur Form  $B$ ; denn (\*) geht für  $k_1 = h$  über in

$$h H B h - h B h = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar: 4.  $B$  ist symmetrisch und 5.  $B$  ist beschränkt.

Als neuen Satz formulieren wir:

Satz 6. Zu einer abgeschlossenen, durch  $\gamma > 0$  halbbeschränkten Form  $G$  in  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{S}$  gibt es einen beschränkten Operator  $B$ , so daß

$$g G B h = g H h$$

für  $g$  aus  $\mathfrak{G}$ ,  $h$  aus  $\mathfrak{S}$  gilt. Es ist

$$0 \leq h H B h \leq \frac{1}{\gamma} (h H h)$$

und der Wertebereich von  $B$  liegt in  $\mathfrak{G}$ .

Dieser Operator  $B$  wird sich nachher als Reziproke eines zu  $G$  zugehörigen Operators erweisen.

Beweis. Im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{G}$  ist  $H$  eine beschränkte Form

$$g H g \leq \frac{1}{2} (g G g);$$

also gibt es nach Satz 5 einen in  $\mathfrak{G}$  erklärten beschränkten Operator  $B$ , für den

$$(**) \quad g H h = g G B h$$

zunächst für alle  $h$  aus  $\mathfrak{G}$  gilt; es ist, indem man  $g = B h$  mit  $h$  aus  $\mathfrak{G}$  setzt,

$$(B h G B h)^2 = (B h H h)^2 \leq (B h H B h) (h H h) \leq \frac{1}{2} (B h G B h) (h H h)$$

oder

$$\dagger \quad (B h G B h) \leq \frac{1}{2} (h H h),$$

d. h.

$$(***) \quad (h H B h) \leq \frac{1}{2} (h H h).$$

Diese zunächst für  $h$  in  $\mathfrak{G}$  gültige Relation zeigt, daß  $B$  auch  $H$ -beschränkt und also auf  $\mathfrak{H}$  fortsetzbar ist. Aus  $\dagger$  und der vorausgesetzten Abgeschlossenheit der Form  $G$  folgert man, daß  $B h$  stets in  $\mathfrak{G}$  liegt und danach, daß die Relationen  $(**)$  und  $(***)$  auch für alle  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  bestehen.

Der Satz 6 hätte auch bewiesen werden können, indem man ohne Bezug auf Satz 5 unmittelbar die Minimumforderung anwendet<sup>13)</sup>.

Aus dem Satz 6 folgt unmittelbar

Satz 7. Zu einer abgeschlossenen positiv-halbbeschränkten Form  $G$  in  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{H}$  gibt es in einem  $G$ -dichten Teilraum  $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{G}$  einen vermöge

$$g H G f = g G f, \quad f \text{ aus } \mathfrak{F}_1$$

zugehörigen Operator, dessen Wertebereich  $\mathfrak{H}$  ist. Er heiße der „maximal zugehörige“ Operator zu  $G$ .

Beweis. Man konstruiere nach Satz 6 den beschränkten Operator  $B$ ; der Wertebereich von  $f = B h$  sei  $\mathfrak{F}_1$ ; es liegt dann  $\mathfrak{F}_1$  in  $\mathfrak{G}$ . Jedem  $f$  aus  $\mathfrak{F}_1$  entspricht nun nur ein  $h$ ; denn aus  $B h = 0$  folgt wegen

$$g G B h = g H h = 0 \quad \text{für alle } g \text{ aus } \mathfrak{G}$$

<sup>13)</sup> Satz 6 ist verwandt mit dem Satz von Toeplitz [11] über die Grenzresolvente positiv-definiten Formen von unendlich viel Veränderlichen, der übrigens ähnlich bewiesen werden kann, bequemer als mit der Jacobischen Transformation. (Siehe Mathem. Annalen 109, S. 254–256). Der Satz von Toeplitz bildet auch für Wintner [13] den Ausgangspunkt seiner Theorie der halbbeschränkten Matrizen.

auch  $h = 0$ . Somit ist in  $\mathfrak{F}_1$  die Reziproke von  $B$  eindeutig definiert; sie heiße  $G$ : d. h.  $Bh = f$  sei gleichwertig mit  $h = Gf$ .

Der Raum  $\mathfrak{F}_1$  ist  $G$ -dicht in  $\mathfrak{G}$ ; denn sonst gäbe es ein Element  $g_0 \neq 0$  aus  $\mathfrak{G}$ , das auf  $\mathfrak{F}_1$   $G$ -orthogonal wäre:

$$g_0 Gf = 0; \text{ also auch } g_0 G B g_0 = g_0 H g_0 = 0, \text{ d. h. } g_0 = 0.$$

Nunmehr folgt:

1.  $G$  ist linear; weil  $G$  eindeutig und  $B$  linear ist.
2.  $G$  ist symmetrisch; denn  $B$  ist symmetrisch.

Zusatz zu Satz 7. Ist  $G'$  in  $\mathfrak{F}' \leq \mathfrak{G}$  ein Operator, der zur Form  $G$  gehört, d. h. für den mit  $f'$  aus  $\mathfrak{F}'$ ,  $g$  aus  $\mathfrak{G}$  gilt:

$$g Gf' = g H G' f',$$

so ist der „maximal zugehörige“ Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  Fortsetzung von  $G'$  in  $\mathfrak{F}'$ .

Beweis. Mit dem Operator  $B$  von Satz 6 bilde man für das Element  $f'$  aus  $\mathfrak{F}'$  das Element  $B G' f'$  aus  $\mathfrak{F}_1$ ; für alle  $g$  aus  $\mathfrak{G}$  gilt dann

$$g G B G' f' = g H G' f' = g G f'; \text{ also } B G' f' = f'; \text{ d. h. } f' \text{ in } \mathfrak{F}_1.$$

#### 4. Selbstadjungierte (hypermaximale) Operatoren.

Eine Spektralzerlegung ist, wie v. Neumann [7. 2] gezeigt hat, nicht für jeden abgeschlossenen symmetrischen Operator möglich; dazu muß (nach E. Schmidt) die Bedingung der *Hypermaximalitt* [7. 3] erfüllt sein; dieselbe Bedingung hat Stone [10. 1] als *Selbstadjungiertheit* seiner Spektraltheorie vorangestellt.

Definition. Es sei ein symmetrischer Operator  $A$  in  $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{H}$  erklärt.  $A$  in  $\mathfrak{F}$  heißt selbstadjungiert, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist einem Element  $h_0$  aus  $\mathfrak{H}$  ein anderes  $h_1$  aus  $\mathfrak{H}$  zugeordnet, so daß für alle  $f$  aus  $\mathfrak{F}$  gilt

$$h_0 H A f = h_1 H f,$$

so liegt  $h_0$  in  $\mathfrak{F}$  und es ist  $A h_0 = h_1$ .

Ein selbstadjungierten Operator ist offenbar stets abgeschlossen.

Es gilt bekanntlich

Satz 8. Ein beschränkter Operator ist selbstadjungiert.

Dem stellen wir gegenüber

Satz 9<sup>14)</sup>. Der einer abgeschlossenen Form  $G$  in  $\mathfrak{G}$  maximal zugehörige Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$  ist selbstadjungiert. Wir sprechen dann vom zugehörigen selbstadjungierten Operator.

Beweis. Es ist nämlich nach v. Neumann [7. 4] jeder symmetrische Operator mit dem Wertebereich  $\mathfrak{H}$  selbstadjungiert. Denn dann gibt es zu  $h_1$  ein  $f_0$ , so daß  $A f_0 = h_1$  ist; also gilt

$$h_0 H A f = A f_0 H f = f_0 H A f,$$

und da die  $A f$  ganz  $\mathfrak{H}$  durchlaufen,  $f_0 = h_0$ . Daraus folgt die Behauptung nach Satz 7.

Wir können nun zeigen, daß für positiv halbbeschränkte Operatoren die Selbstadjungiertheit schon aus *schwächeren Bedingungen* folgt, die für unsere Differentialoperatoren leichter nachzuprüfen sind.

Es sei  $G$  in  $\mathfrak{F}$  ein abgeschlossener positiv-halbbeschränkter Operator,  $g G g$  in  $\mathfrak{G}$  die nach Satz 3 zugehörige abgeschlossene Form,  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  der nach Satz 7 und 9 zu ihr gehörige selbstadjungierte Operator. Dann führen wir die „iterierten“ Räume

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{G}_3, \dots$$

ein, die aus allen denjenigen Elementen  $f$  von  $\mathfrak{F}_1$  bestehen, für die bzw.  $G f$  in

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_2, \dots$$

liegt. Alsdann gilt

Satz 10. Es ist  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ , d. h.  $G$  in  $\mathfrak{F}$  ist selbstadjungiert, wenn für irgendein  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) gilt

$$(\mathfrak{F}_n) \quad \mathfrak{F}_n \text{ liegt in } \mathfrak{F}$$

oder

$$(\mathfrak{G}_n) \quad \mathfrak{G}_n \text{ liegt in } \mathfrak{F}.$$

Beweis. Da  $\mathfrak{F}_{n+1}$  in  $\mathfrak{G}_n$  liegt, genügt es, Satz 10 unter der Voraussetzung  $(\mathfrak{F}_n)$  zu beweisen. Da nach Zusatz zu 7 und  $(\mathfrak{F}_n)$  die in  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_n$  erklärten Operatoren  $G$  Fortsetzungen voneinander sind und  $\mathfrak{F}$  abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen:

<sup>14)</sup> In Satz 9 liegt auch der Beweis einer *Vermutung* von v. Neumann [7. 5].

Ein positiv-halbbeschränkter Operator kann zu einem selbstadjungierten Operator mit derselben unteren Schranke fortgesetzt werden.

Denn sei dieser Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$ ; dann werde die zugehörige Form  $G$  nach Satz 3 zu einer abgeschlossenen fortgesetzt; der zugehörige selbstadjungierte Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  ist nach Zusatz zu 7 Fortsetzung von  $G$  in  $\mathfrak{F}'$ ; daß er zur selben unteren Schranke gehört, folgt daraus, daß das für die Form  $G$  gilt.

Offen bleibt aber noch, ob eine solche Fortsetzung auch auf andere Weise möglich ist.

Der abgeschlossene Operator von  $G$  in  $\mathfrak{F}_n$  ist  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$ . Zum Beweise beachte man, daß  $\mathfrak{F}_n$  der Wertebereich von  $B^n h$  ist, wo  $B$  die Reziproke von  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  nach Satz 6 ist. Daraus folgt, daß  $\mathfrak{F}_n$  dicht liegt in  $\mathfrak{H}$ ; anderenfalls gäbe es ein Element  $h_0 \neq 0$  mit  $0 = h_0 H B^n h = B^n h_0 H h$  für alle  $h$ , woraus  $B^n h_0 = B^{n-1} h_0 = \dots = h_0 = 0$  folgte. Sei nun  $f_1$  ein Element von  $\mathfrak{F}_1$ , so gibt es eine Folge  $f'$  aus  $\mathfrak{F}_{n+1}$ , für die  $f' \rightarrow G f_1$  strebt. Alsdann strebt  $B f' \rightarrow f_1$  und  $G(B f') \rightarrow G f_1$ , d. h. der abgeschlossene Operator zu  $G$  in  $\mathfrak{F}_n$  ist für  $f_1$  erklärt und ergibt  $G f_1$ .

### 5. Spektralzerlegung.

Vor Formulierung und Beweis des Spektralsatzes halbbeschränkter Formen sei eine Reihe von bekannten Begriffen und Zusammenhängen über die Spektralschar dargestellt in einer für unsere Zwecke geeigneten Symbolik und Anordnung.

Die Darstellung der Spektralzerlegung ist nach v. Neumann [7.2] auf die „Projektions- oder Einzeloperatoren“ zu gründen.

Ein *Projektionsoperator*  $P$  ist ein in  $\mathfrak{H}$  definierter Operator, der der Relation

$$P^2 = P$$

genügt; offenbar ist  $1 - P$  auch ein solcher.

Die Elemente  $P h$  und  $(1 - P) h$  sollen *Eigen-* und *Gegenelemente* von  $P$  heißen; ihre Wertbereiche  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{P}$  *Eigen-* und *Gegenraum* von  $P$ .

Die Forderung der Symmetrie

$$P h_1 H h_2 = h_1 H P h_2$$

für  $h_1, h_2$  aus  $\mathfrak{H}$  ist gleichwertig mit

$$P h_1 H (1 - P) h_2 = 0$$

d. h., damit, daß Eigen- und Gegenelemente oder Eigen- und Gegenraum von  $P$  *orthogonal* sind.

Gleichwertig ist auch die Identität

$$h H h = P h H P h + (1 - P) h H (1 - P) h.$$

Für die zu symmetrischem  $P$  gehörige Form  $P$ , die „Einzelform“ gilt

$$0 \leq h P h \leq h H h,$$

wobei Gleichheit (für alle  $h$ ) nur für  $P = 0$  bzw.  $P = 1$  besteht. Insbesondere folgt so die Beschränktheit von  $P$  aus der Symmetrie.

Die hier auf die Einheitsform  $H$  bezogenen Eigenschaften lassen sich analog auch in bezug auf andere Formen erklären. Wir sagen,  $P$  ist *symmetrisch* in bezug auf die Form  $A$  in  $\mathfrak{F}$ , kurz: *A-symmetrisch* in  $\mathfrak{F}$ ,

wenn mit  $f$  auch  $Pf$  in  $\mathfrak{F}$  liegt und die gleichwertigen Identitäten für  $f, f_1, f_2$  aus  $\mathfrak{F}$  bestehen:

$$\begin{aligned} P f_1 A f_2 &= f_1 A P f_2, \\ P f A (1 - P) f &= 0, \\ f A f &= P f A P f + (1 - P) f A (1 - P) f. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$0 \leq f A P f \leq f A f.$$

Ein Projektionsoperator  $P$  ist mit einem Operator  $A$  in  $\mathfrak{F}$  vertauschbar, wenn mit  $f$  auch  $Pf$  in  $\mathfrak{F}$  liegt und

$$A P f = P A f$$

gilt. Es ist  $P$  vertauschbar mit  $A$  in  $\mathfrak{F}$ , sobald  $P$  symmetrisch ist außer in bezug auf  $H$  auch in bezug auf die zu  $A$  gehörige Form  $f A f$  in  $\mathfrak{F}$ .

Im folgenden sei stets vorausgesetzt, daß  $P$  symmetrisch ist (d. h.  $H$ -symmetrisch in §).

Daß zwischen zwei Projektionsoperatoren  $P_1, P_2$  für alle  $h$  aus  $\mathfrak{F}$  die Beziehung

$$h P_1 h \geq h P_2 h$$

besteht, ist gleichbedeutend damit, daß der Eigenraum von  $P_1$  den von  $P_2$  und der Gegenraum von  $P_2$  den von  $P_1$  enthält. In Formeln:

$$P_2 P_1 = P_2, \quad (1 - P_2)(1 - P_1) = (1 - P_1) \quad \text{oder} \quad P_1 P_2 = P_2.$$

Es ist dann auch  $P_1 - P_2$  ein Projektionsoperator.

Die *Spektralschar* ist eine Schar von Projektionsoperatoren, die von einem reellen Parameter  $\alpha$  so abhängen, daß die zugehörigen Formen monoton sind. An den Stellen  $\alpha$ , an denen diese Formen unstetig sein können, sind zwei Projektionsoperatoren als Grenzwerte von oben und unten zu gewinnen. Es empfiehlt sich, von vornherein jedem Wert von  $\alpha$  zwei Projektionsoperatoren zugeordnet zu denken, deren Formen von oben bzw. unten stetig sind. Der bequemerer Ausdrucksweise wegen seien die Projektionsoperatoren Symbolen  $\alpha^+$  und  $\alpha^-$  (statt  $\alpha + 0$  und  $\alpha - 0$ ) zugeordnet. So motiviert sich folgende Erklärung:

Jeder reellen Zahl  $\alpha$  seien die Symbole  $\alpha^+, \alpha^-$  zugeordnet; allgemein seien  $\alpha^+$  und  $\alpha^-$  mit  $\alpha^*$  bezeichnet; für  $\alpha = \infty$  und  $\alpha = -\infty$  seien  $\alpha^* = \infty^-$  und  $\alpha^* = -\infty^+$  eingeführt. Wir setzen  $\alpha_1 < \alpha_2^+$  wenn  $\alpha_1 < \alpha_2$  ist, ferner  $\alpha^- < \alpha^+$ .

Das Intervall

$$\Delta \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

enthalte jeden Punkt  $\alpha$ , für dessen beide Symbole  $\alpha^*$  gilt:  $\alpha_1 \leq \alpha^* \leq \alpha_2$ ; so sind zugleich Intervalle mit und ohne Endpunkte erfaßt;  $(\alpha^-, \alpha^+)$  enthält nur den Punkt  $\alpha$ .

Es sei nun jedem  $\alpha$  ein Projektionsoperator  $P_\alpha$  zugeordnet, derart, daß für jedes  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  mit den zugehörigen Formen  $h P_\alpha h$  gilt:

1. Ist

$$\alpha_1 < \alpha_2, \text{ so } h P_{\alpha_1} h \leq h P_{\alpha_2} h.$$

2. Strebt für  $\nu \rightarrow \infty$

$$\alpha_\nu \downarrow \alpha, \text{ so } h P_{\alpha_\nu} h \downarrow h P_\alpha h,$$

$$\alpha_\nu \uparrow \alpha, \text{ so } h P_{\alpha_\nu} h \uparrow h P_\alpha h.$$

Dann heißt  $P_\alpha$  eine *Spektralschar*.

Die Spektralschar heißt *vollständig*, wenn gilt

$$P_{-\infty^+} = 0, \quad P_{\infty^-} = 1.$$

Der *Differenzoperator*

$$P_{\Delta\alpha} = P(\alpha_1, \alpha_2) = P_{\alpha_2} - P_{\alpha_1}$$

des Intervalles  $\Delta\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  ist wieder Projektionsoperator. Es ist der *Sprungoperator*

$$P(\alpha^-, \alpha^+) \neq 0$$

nur für eine höchstens abzählbare Menge von Werten  $\alpha$ , den *Punkteigenwerten*.

Der *Spektralsatz* für *beschränkte Formen* werde — wie es für uns zweckmäßig ist — in folgender Form ausgesprochen.

Satz 11. Sei  $B$  in  $\mathfrak{H}$  eine beschränkte Form mit den Schranken  $\beta, \bar{\beta}$ ;  $B$  in  $\mathfrak{H}$  der zugehörige Operator. Dann gibt es genau eine vollständige Spektralschar  $Q_\beta$ , so daß gilt

1.  $Q_\beta$  ist symmetrisch in bezug auf die Form  $B$  und in bezug auf  $H$ .

2. Es bestehen die beiden „Eigenwertungleichungen“

$$\beta_2(h H Q_\beta h) \leq (h B Q_\beta h) \leq \beta_1(h H Q_\beta h)$$

mit  $\Delta\beta = (\beta_1, \beta_2)$  für alle  $h$  aus  $\mathfrak{H}$ .

Zusatz 11, 1. Es ist  $Q_{\beta^-} = 0, Q_{\beta^+} = 1$ .

Zusatz 11, 2. Der Operator  $B$  in  $\mathfrak{H}$  ist mit den  $Q_\beta$  vertauschbar.

Der Beweis von Satz 11 und der Zusätze ist aus den üblichen Formulierungen des Spektralsatzes leicht zu entnehmen (vgl. insbesondere Fr. Riesz [9. 3]).

Der *Spektralsatz* für abgeschlossene positiv halbbeschränkte Formen lautet:

Satz 12. Sei  $G$  in  $\mathfrak{G}$  eine durch  $\gamma > 0$  nach unten halbbeschränkte abgeschlossene Form,  $G$  in  $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$  der zugehörige selbstadjungierte



Operator. Dann gibt es genau eine vollständige Spektralschar  $R_\gamma$ , so daß gilt

1.  $R_\gamma$  ist symmetrisch in bezug auf die Form  $G$  in  $\mathfrak{G}$  und in bezug auf  $H$  in  $\mathfrak{H}$ .

2. Es bestehen die beiden „Eigenwertungleichungen“

$$\gamma_1(g H R_{\Delta\gamma} g) \leq (g G R_{\Delta\gamma} g) \leq \gamma_2(g H R_{\Delta\gamma} g)$$

mit  $\Delta\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  für alle  $g$  aus  $\mathfrak{G}$ .

Zusatz 12, 1. Es ist  $R_{\gamma^-} = 0$ ,  $R_{\infty^-} = 1$ .

Zusatz 12, 2. Der Operator  $G$  in  $\mathfrak{H}_1$  ist mit den  $R_\gamma$  vertauschbar.

Zusatz 12, 3. Die Eigenelemente der Differentialoperatoren  $R_{\Delta\gamma}$  endlicher Intervalle  $\Delta\gamma$  liegen in  $\mathfrak{H}_1$ .

Die Spektralschar  $R_\gamma$  liefert — so werden wir sagen — die *Spektralzerlegung* von  $G$  in  $\mathfrak{G}$  und von  $G$  in  $\mathfrak{H}_1$ .

Beweis. Satz 12 ist eine einfache Folge von Satz 11. Denn: Im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{G}$  wird  $H$  eine in bezug auf  $G$  beschränkte Form mit den Schranken 0 und  $\frac{1}{\gamma} = \bar{\beta}$ ; es ist Satz 11 anwendbar; er liefert eine Spektralschar  $Q_\beta$ . Nun werde  $\beta = \frac{1}{\gamma}$  für  $\beta > 0$  gesetzt; dann wird durch

$$R_{\gamma^+} = 1 - Q_{\beta^-}, \quad R_{\gamma^-} = 1 - Q_{\beta^+}$$

auch eine Spektralschar erklärt. Und zwar ist sie vollständig; denn erstens folgt nach Zusatz 11, 1, daß  $Q_{\bar{\beta}^+} = 1$  d. h.  $R_{\gamma^-} = 0$  gilt. Um zweitens  $R_{\infty^-} = 1 - Q_{0^+} = 1$  zu zeigen, ist der Nachweis von  $Q_{0^+} = 0$  erforderlich; wäre nicht  $Q_{0^+} = 0$ , so gäbe es ein Eigenelement  $h = Q_{0^+} h$  von  $Q_{0^+}$  und nach der zweiten Eigenwertungleichung mit  $\beta_1 = 0^+$  müßte  $(h H h) \leq 0$  sein, woraus aber  $h = 0$  folgte.

Da  $R(\gamma_1^+, \gamma_2^+) = Q(\beta_1^-, \beta_2^-)$  ist, gehen die Eigenwertungleichungen von Satz 11 unmittelbar in die von Satz 12 über. Ebenso folgt unmittelbar die  $G$ -Symmetrie der  $R_\gamma$  in  $\mathfrak{G}$ ; die Symmetrie in bezug auf  $H$  folgt allerdings zunächst nur in  $\mathfrak{G}$ ; die  $R_\gamma$  sind ja überhaupt durch obige Definition nur in  $\mathfrak{G}$  definiert. Nun folgt aber aus der  $H$ -Symmetrie der  $R_\gamma$  in  $\mathfrak{G}$  ihre  $H$ -Beschränktheit in  $\mathfrak{G}$ ; also sind die  $R_\gamma$  auf ganz  $\mathfrak{H}$  fortsetzbar und zwar — wie man sofort sieht — ohne ihren Charakter als Spektralschar einzubüßen.

Damit ist die Existenz der Spektralschar von  $\mathfrak{G}$  gezeigt. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, daß in umgekehrter Weise die eindeutige Spektralschar von  $H$  im Raume  $\mathfrak{G}$  aus der von  $G$  gewonnen werden kann.

Um Zusatz 12, 2 zu beweisen, ist noch zu zeigen, daß für  $f$  aus  $\mathfrak{F}_1$  auch  $R_\gamma f$  in  $\mathfrak{F}_1$  liegt. Es ist aber für alle  $f, f_1$  aus  $\mathfrak{F}_1$

$$R_\gamma f H G f_1 = R_\gamma f G f_1 = f G R_\gamma f_1 = G f H R_\gamma f_1 = R_\gamma G f H f_1.$$

Da aber  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  selbstadjungiert ist, folgt, daß  $R_\gamma f$  in  $\mathfrak{F}_1$  liegt und daß  $G R_\gamma f = R_\gamma G f$ .

Zum Beweise von Zusatz 12, 3 beachten wir, daß nach 12, 2 der Operator  $G R_{\Delta\gamma}$  ( $\Delta\gamma$  endlich) in  $\mathfrak{F}_1$  anwendbar ist. Aus den Eigenwertungleichungen folgt aber, daß  $G R_{\Delta\gamma}$  in bezug auf  $H$  symmetrisch und beschränkt ist; denn das ist für die zugehörige Form

$$f H G R_{\Delta\gamma} f = f G R_{\Delta\gamma} f$$

der Fall. Es ist also der Operator  $G R_{\Delta\gamma}$  auf ganz  $\mathfrak{F}$  fortsetzbar; er heiße dann  $(G R_{\Delta\gamma})$  in  $\mathfrak{F}_1$ . Nun gilt mit  $f$  aus  $\mathfrak{F}_1$

$$(G R_{\Delta\gamma}) h H f = R_{\Delta\gamma} h H G f$$

zunächst für alle  $h$  aus  $\mathfrak{F}$  und also auch für alle  $h$  aus  $\mathfrak{F}_1$ . Da  $G$  selbstadjungiert ist, folgt, daß  $R_{\Delta\gamma} h$  in  $\mathfrak{F}_1$  liegt und daß  $G R_{\Delta\gamma} h = (G R_{\Delta\gamma}) h$  ist.

## 6. Vollstetigkeit und diskretes Spektrum.

Es gibt von Hilbert und Weyl herrührende einfache Kriterien dafür, daß das Spektrum eines Operators in einem Intervall nur aus diskreten Punkteigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Für diese Kriterien soll hier eine einfache Beweisaneinanderordnung gegeben werden, die zugleich ihre Übertragung auf nicht beschränkte Operatoren ermöglicht. Zunächst setzen wir fest:

Eine Spektralschar  $P$  hat in einem abgeschlossenen Intervall  $\Delta\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  ein *diskretes Spektrum*<sup>15)</sup>, wenn der Eigenraum von  $P_{\Delta\alpha}$  endliche Dimension hat.

Es folgt leicht, daß  $P_\alpha$  in diesem Intervall in  $\alpha$  konstant ist bis auf endlich viele Sprungstellen (Punkteigenwerte), deren Eigenräume endliche Dimension besitzen<sup>16)</sup>.

Ferner: Das Spektrum heiße diskret in irgendeinem Intervall, wenn es in jedem abgeschlossenen Teilintervall diskret ist. Das Spektrum heiße überhaupt diskret, wenn es in jedem Intervall diskret ist.

<sup>15)</sup> Auch „diskretes Punktspektrum“.

<sup>16)</sup> Die Eigenwerte eines nicht diskreten Punktspektrums können dicht liegen oder unendliche Vielfachheit besitzen.

Wir führen nun den Begriff der *Vollstetigkeit* in bezug auf eine positiv-definite Form ein in Verallgemeinerung des Hilbertschen Begriffs der Vollstetigkeit. Wir kennzeichnen die Vollstetigkeit auch anders als Hilbert durch eine Eigenschaft<sup>17)</sup>, die beim Nachweis der folgenden Sätze bequem zu benutzen und bei der Anwendung auf Differentialoperatoren bequem nachzuweisen ist.

**Definition.** Es sei  $gGg$  eine positiv definite Form in einem Hilbertschen Raum  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{H}$ . Dann heiße die Form  $gVg$  in  $\mathfrak{G}$  *vollstetig* relativ zu  $G$ , (kurz  $G$ -vollstetig), wenn es zu jedem  $\varepsilon$  endlich viele Elemente  $h_1, h_2, \dots, h_n$  aus  $\mathfrak{H}$  gibt, so daß gilt:

$$|gVg| \leq \sum_{i=1}^n (h, Hg)^2 + \varepsilon (gGg).$$

Unmittelbar erhält man den

**Hilfssatz:** Sei ein Teilraum  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{G}$  von unendlicher Dimension; (d. h. er enthalte unendlich viel linear unabhängige Elemente). Dann enthält  $\mathfrak{Z}$  auch ein Element  $z \neq 0$ , für das

$$|zVz| \leq \varepsilon (zGz)$$

gilt, also auch ein Element  $z$  mit  $zGz = 1$  und beliebig kleinem  $zVz$ .

Denn da der Raum  $\mathfrak{Z}$  von unendlicher Dimension ist, enthält er sicher ein Element, das auf beliebig vielen  $h_1, h_2, \dots, h_n$  orthogonal ist.

Das Kriterium von Hilbert [5.2] lautet:

**Satz 16.** Eine Form  $hVh$  in  $\mathfrak{H}$ , die  $H$ -vollstetig ist, besitzt ein *diskretes* Punktspektrum in jedem Null nicht enthaltenden Intervall<sup>18)</sup>.

Das Weylsche Kriterium [12.3] bezieht sich auf die Abänderung des Spektrums einer beschränkten Form, wenn man eine vollstetige addiert. Wir begnügen uns hier damit, dies Kriterium auf positiv halbbeschränkte Formen zu übertragen<sup>19)</sup>.

**Satz 17.** Es sei die Form  $G$  in  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{H}$  halbbeschränkt mit der unteren Schranke  $\gamma > 0$  und abgeschlossen; es sei die Form  $gVg$  vollstetig im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{G}$  mit der Maßform  $G$ .

Dann besitzt  $G + V$  ein diskretes Punktspektrum unterhalb  $\gamma$  (d. h. in jedem abgeschlossenen Intervall unterhalb  $\gamma$ ).

**Zusatz 18.** Ist die Einheitsform  $H$  vollstetig in bezug auf  $G$ , so besitzt  $G$  selbst ein überhaupt diskretes Punktspektrum.

<sup>17)</sup> Sie ist verwandt mit der von Hellinger und Toeplitz in ihrem Enzyklopädieartikel bevorzugten Kennzeichnung der Vollstetigkeit.

<sup>18)</sup> Es gilt auch die Umkehrung.

<sup>19)</sup> Die Übertragung des allgemeinen Weylschen Kriteriums auf beliebige nicht beschränkte Operatoren soll an anderer Stelle geschehen.

Die Beweise für die genannten Sätze werden ganz einfach, wenn man sich entsprechend der Methode, die F. Rellich [8] zur Untersuchung des Spektrums von Differentialgleichungen angewandt hat, auf den Hilfssatz stützt.

Diesen Hilfssatz wenden wir zunächst zum Beweise des ersten Kriteriums (Satz 16) an. Angenommen, es gäbe ein Null nicht enthaltendes Intervall  $\Delta \alpha = (\alpha_1, \alpha_2^*)$ , in dem das Spektrum von  $V$  nicht diskret wäre, so daß der zu  $\Delta \alpha$  gehörige Eigenraum  $\mathfrak{Z}$  der Spektralschar von  $V$  von unendlicher Dimension wäre, d. h. unendlich viele lineare unabhängige Eigenelemente  $z$  besäße; dann gäbe es nach dem Hilfssatz in  $\mathfrak{Z}$  auch ein  $z$ , für das  $zHz = 1$  und  $zVz$  beliebig klein wäre; das aber widerspricht wegen  $\alpha_1 > 0$  oder  $\alpha_2 < 0$  den Eigenwertungleichungen, die

$$\alpha_1(zHz) \leq zVz \leq \alpha_2(zHz)$$

verlangen.

Zum Beweise des zweiten Kriteriums, Satz 17, nehmen wir an, zu einem Intervall mit der oberen Grenze  $\gamma(1-\varepsilon) < \gamma$  gehörte ein Eigenraum  $\mathfrak{Z}$  von  $G + V$  mit unendlich viel linear unabhängigen Elementen  $z$ ; für sie besteht die Eigenwertungleichung

$$zGz + zVz \leq \gamma(1-\varepsilon)(zHz);$$

sie steht aber in Widerspruch mit  $zGz \geq \gamma(zHz)$ , wenn wir nach dem Hilfssatz 3 aus dem Teilraum  $\mathfrak{Z}$  des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{U}$  ein Element  $z$  herausgreifen, für das  $zGz = 1$ , aber  $zVz$  beliebig klein ist.

Zusatz 18 folgt daraus, daß für die Eigenelemente  $z$  von  $(\alpha_1, \alpha_2)$  die zweite Eigenwertungleichung

$$zGz \leq \alpha_2(zHz)$$

besteht, was für ein  $z$  mit  $zGz = 1$  und beliebig kleinem  $zHz$  zum Widerspruch führt.

(Eingegangen am 14. 7. 1933.)

# Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten.

Von

Fritz John in Göttingen.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	488
§ 1. Lösungsansatz durch Fourierzerlegung . . . . .	491
§ 2. Die Funktion $J(\zeta)$ . . . . .	493
§ 3. Partialbruchentwicklung von $\frac{e^{irx}}{J(r)}$ . . . . .	497
§ 4. Auflösung der Gleichung (4) . . . . .	501
§ 5. Fall einer nur von einer Variablen abhängigen Lösung . .	504
§ 6. Die Radonschen Probleme . . . . .	513
§ 7. Zurückführung der Auflösung von (4) auf zwei Aufgaben .	514

## Einleitung.

Aufgaben, die in der Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten bestehen, sind verschiedentlich behandelt worden.

Herr Radon<sup>1)</sup> hat das Problem behandelt, eine Punktfunktion aus ihren Ebenenintegralen und das weitere, eine Ebenenfunktion aus ihren Punktmittelwerten zu bestimmen. Die erste Radonsche Aufgabe ist für eine beliebige Dimensionszahl auch von Frl. Mader<sup>2)</sup> behandelt worden. Von Herrn Funk<sup>3)</sup> ist im Anschluß an eine Arbeit von Minkowski<sup>4)</sup> die Aufgabe gelöst, eine Funktion auf der Kugel aus ihren Großkreisintegralen zu bestimmen.

In dieser Arbeit soll das folgende Problem behandelt werden:

Es liege eine Schar von kongruenten, parallelen, geschlossenen Hyperflächen des  $R_p$  vor. Gesucht ist eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_p) = f(x)$ , von der das Integral über jede dieser Flächen (bzw. über das Innere jeder

<sup>1)</sup> Ber. Verb. Sächs. Akad. 69, S. 262—277.

<sup>2)</sup> Math. Zeitschr. 26, S. 646—652.

<sup>3)</sup> Math. Annalen 74, S. 286.

<sup>4)</sup> Ges. W. II, S. 277—279.

dieser Flächen) vorgegeben ist. Bezeichnet  $\bar{V}$  eine der Flächen der Schar,  $V$  ihr Inneres, so ist also die Integralgleichung

$$(1a) \quad g(x) = \int_{\bar{V}} f(x + \eta) d\sigma_\eta$$

bzw.

$$(1b) \quad g(x) = \int_V f(x + \eta) dv_\eta$$

nach  $f$  aufzulösen. ( $d\sigma$  Oberflächen-,  $dv$  Volumenelement)<sup>5)</sup>.

Statt (1a), (1b) zu betrachten, kann man auch Gleichungen von etwas allgemeinerem Typus

$$(2a) \quad g(x) = \int_{\bar{V}} f(x + \eta) Q(\eta) d\sigma_\eta$$

bzw.

$$(2b) \quad g(x) = \int_V f(x + \eta) Q(\eta) dv_\eta$$

behandeln, wo  $Q$  eine willkürliche Ortsfunktion ist. Dabei werden über  $\bar{V}$  und  $Q$  noch gewisse Voraussetzungen gemacht werden, z. B. Konvexität von  $\bar{V}$ .

Es stellt sich heraus, daß Gleichungen von der Form (2a), (2b) nicht eindeutig lösbar sind, man kann noch Zusatzbedingungen für die Lösung hinzufügen. Die *Eindeutigkeit* läßt sich z. B. erzwingen, indem man  $f$  ein bestimmtes Verhalten im Unendlichen vorschreibt; das empfiehlt sich jedoch nicht, weil man dann nicht die *Existenz* einer diesen Bedingungen genügenden Funktion garantieren kann. Es erweist sich als adäquater, die Werte von  $f$  innerhalb der festen Fläche  $\bar{V}$  willkürlich (bis auf gewisse Randbedingungen) vorzuschreiben; vollständig eindeutig ist die Lösung dann noch nicht bestimmt; dabei ist die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung in gewisser Weise zurückführbar auf die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit des zweiten Radonschen Problems (S. 515.)

Man kann eine Gleichung (2a) oder (2b) manchmal als Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung deuten. Es kann vorkommen, daß die Lösung  $u(x_1, \dots, x_p, t) = u(x, t)$  einer solchen Gleichung, für die für  $t = 0$

$$u = f, u_t = 0, \dots, u_t \dots_t = 0$$

<sup>5)</sup> Es wird zur Abkürzung immer die vektorielle Schreibweise verwandt werden;  $x, \eta, \dots$  bezeichnen die Punkte  $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p), \dots$ ;  $(x\eta)$  bedeutet das

innere Produkt  $\sum_{i=1}^p x_i y_i$ ,  $|x|$  den Ausdruck  $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2} \right|$ .

ist, sich in der Gestalt

$$(3) \quad u(x, t) = \int_{V(t)} f(x + \eta) Q(t, \eta) d\eta,$$

darstellen läßt; ist nun  $u$  für  $t = 1$  vorgegeben, für die übrigen  $t$  gesucht, so hat man eine Gleichung der Form (2b) für die Anfangswerte  $f$ , nach deren Auflösung man  $u$  angeben kann; man kann aber noch  $f$  und damit  $u(x, 0)$  willkürlich innerhalb  $\bar{V}$  vorgeben. Im  $x_1, \dots, x_n, t$ -Raum gedeutet besagt das, daß man eine Lösung  $u$  angeben kann, die auf einer Hyperebene  $t = 1$  willkürlich vorgegeben ist und außerdem noch auf dem Teil der Hyperebene  $t = 0$ , der von einem charakteristischen Kegel mit der Spitze auf der Ebene  $t = 1$  ausgeschnitten wird. (Wenn sich die Lösung der Differentialgleichung in der Form (3) darstellen läßt, so stellt  $V(t)$  das Abhängigkeitsgebiet der Lösung von den Anfangswerten, also den ebenen Schnitt des charakteristischen Kegels dar.)

Liegt z. B. die Gleichung

$$\Delta u - \frac{p-1}{t} u_t - u_{tt} = 0$$

vor, so ist die Lösung  $u(x, t)$ , für die

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

ist, durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_p} \int_{\Omega} f(x + t\eta) d\omega_\eta$$

gegeben, wenn  $\Omega$  die Einheitskugel im  $R_p$  um 0,  $d\omega_\eta$  ihr Oberflächenelement,  $\omega_p$  ihre Oberfläche bezeichnet. Man kann dann  $u$  auf der Ebene  $t = 1$  willkürlich  $= g(x)$  und noch auf der Ebene  $t = 0$  für  $|x| \leq 1$  vorschreiben und daraus  $u$  für alle  $t$  zu bestimmen suchen; dann hat man nur für  $f$  die hier behandelte Aufgabe zu lösen.

Eine physikalische Fragestellung führt auf denselben Problemkreis. Man hat ein Kraftfeld  $\mathfrak{R}(x_1, x_2, x_3)$ , das man mit Hilfe eines inhomogenen Probekörpers  $V$ , dessen „Dichte“-Verteilung durch  $Q$  gegeben wird, bestimmen will (ohne den Grenzübergang zu unendlich kleinen Probekörpern zu vollziehen); vernachlässigt werden soll die Wirkung des Probekörpers auf das Feld. Man verschiebt den Körper  $V$  beliebig parallel zu sich und mißt an jeder Stelle die auf  $V$  wirkende resultierende Kraft. Dann stellt jede Komponente von  $\mathfrak{R}$  eine Raumfunktion  $f$  dar, für die der Ausdruck (2b) vorgegeben ist; die Bestimmung des Kraftfeldes läuft auf die Auflösung einer solchen Integralgleichung hinaus. Da bei dieser Anwendung die Existenz der Lösung feststeht, es aber darauf ankommt,



daß sie eindeutig bestimmt ist, wird man hier besser Annahmen über das Verhalten von  $f$  im Unendlichen machen. (Vgl. die S. 510 ff. abgeleitete Lösung für den Fall einer Einheitskugel  $V$ .)

Zur Lösung der Gleichungen (2) werden zwei Wege eingeschlagen. Der erste knüpft daran an, daß man eine formale Lösung unmittelbar durch Fourierzerlegung erhalten kann [§ 1]. Diese Lösung ist aber aus im allgemeinen divergenten Integralen zusammengesetzt; um sie zu einer sinnvollen zu machen, hat man geeignete Konvergenz erzeugende Terme abzuziehen. Diese werden durch die Partialbruchentwicklung eines gewissen Ausdrucks geliefert, die in § 2 bis 3 diskutiert wird. Man erhält dann direkt diejenige Funktion, die (2) genügt und innerhalb  $V$  vorgegebene Werte annimmt. Die so erhaltenen Lösungen sind zwar formal einfach, enthalten aber noch die Fouriertransformierten der vorgegebenen Funktionen statt dieser selbst.

Der andere Weg benutzt, daß sich die Auflösung von (2) in die beiden folgenden Aufgaben aufspalten läßt:

I. Bestimmung einer Ebenenfunktion aus ihren Punktmittelwerten oder einer Punktfunktion aus ihren Ebenenintegralen.

II. Bestimmung einer Lösung von (2), die nur von einer Koordinate abhängt.

I ist das von Radon behandelte Problem [§ 6]. II läßt sich auf Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art zurückführen [§ 5]. In § 7 wird am Beispiel der Gleichung (2a) mit  $p = 3$ ,  $Q = 1$  und  $V$  als Einheitskugel mit dieser Methode eine einfache explizite Lösung hergestellt (Bestimmung einer Funktion aus ihren Einheitskugelintegralen).

### § 1.

#### Lösungsansatz durch Fourierzerlegung.

$f(x_1, \dots, x_p) = f(x)$  sei eine stetige Funktion. Sei

$$(4) \quad g(x) = \int_V f(x + \eta) Q(\eta) d\eta,$$

vorgegeben; (um in diesem Paragraphen nicht alles zweimal zu sagen, betrachten wir nur diese Gleichung; will man die Gleichung (2a) behandeln, so hat man nur überall  $do_\nu$  für  $d\eta_\nu$  zu schreiben).

Es werde angenommen, daß  $f$  eine absolut konvergente Fourierzerlegung besitzt:

$$(5) \quad f(x) = \int_{K_p} e^{i\alpha x} \bar{f}(\alpha) d\alpha.$$

Dann wird, da man die Integrationen vertauschen darf,

$$(6) \quad g(x) = \int_{R_p} e^{i(x\lambda)} \bar{f}(\lambda) J(\lambda) d\lambda,$$

wenn

$$(7) \quad \int_V e^{i(\eta\lambda)} Q(\eta) dv_\eta = J(\lambda)$$

gesetzt wird. Es wäre also

$$(8) \quad \bar{f}(\lambda) J(\lambda) = \bar{g}(\lambda)$$

die Fouriertransformierte von  $g$ . Da  $J$  offenbar beschränkt ist, besitzt auch  $g$  eine absolut konvergente Fourierzerlegung.  $\bar{f}$  ist so durch  $\bar{g}$  überall, wo  $J$  nicht verschwindet, eindeutig bestimmt; da  $J(\lambda)$ , wie wir S. 496 sehen werden, nicht in einem ganzen Gebiet verschwindet und  $\bar{f}$  stetig ist, so ist  $\bar{f}$  und damit auch  $f$  durch  $\bar{g}$ , also durch  $g$  eindeutig bestimmt.

Eine Lösung  $f$  von (4), die eine absolut konvergente Fourierzerlegung (und eine stetige Fouriertransformierte) besitzt, ist eindeutig bestimmt.

Die Fourierzerlegung von  $f$  ist sicher absolut und damit gleichmäßig konvergent, wenn

$$\bar{f}(\lambda) = O\left(\frac{1}{r^{p+1}}\right) \quad (r = |\lambda|)$$

ist; das ist sicher der Fall, wenn  $f(\lambda)$   $2\left[\frac{p+2}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar ist und alle diese Ableitungen  $O\left(\frac{1}{r^{p+1}}\right)$  sind; dann ist  $\bar{f}$  auch stetig. Es kann also z. B. keine diesen Regularitätsbedingungen genügende Lösung  $f \neq 0$  der homogenen Gleichung

$$(9) \quad \int_V f(x + \eta) Q(\eta) dv_\eta = 0$$

geben. Dennoch gibt es, wie wir sehen werden, eine große Mannigfaltigkeit anderer Lösungen dieser Gleichung.

Man kann versuchen, (8) zur Auflösung von (4) zu benutzen. Man zerlegt  $g$  nach Fourier:

$$g(x) = \int_{R_p} e^{i(x\lambda)} \bar{g}(\lambda) d\lambda$$

und hätte dann formal

$$(10) \quad f(x) = \int_{R_p} \frac{e^{i(x\lambda)}}{J(\lambda)} \bar{g}(\lambda) d\lambda.$$

Wegen der Nullstellen von  $J$  hat dieser Ausdruck aber im allgemeinen keinen Sinn.

Um aus (10) doch eine Lösung von (4) zu erhalten, kann man zu

$$(11) \quad \frac{e^{i(\zeta \xi)}}{J(\zeta)}$$

in (10) einen passenden Ausdruck additiv hinzufügen, der die Unstetigkeitsstellen von (11) weghebt, ohne an der Gleichung (4) etwas zu ändern. Diese additiven Terme werden wir von der Form  $\varphi(x) = e^{i(\zeta \xi)}$  wählen, wo  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_p)$  eine Nullstelle von  $J(\zeta)$  ist; weil für ein solches  $\varphi$

$$(12) \quad \int_V \varphi(x + \eta) Q(\eta) d\eta = e^{i(\zeta \xi)} \int_V e^{i(\zeta \eta)} Q(\eta) d\eta = e^{i(\zeta \xi)} J(\zeta) = 0$$

gilt, sie also Lösungen von (9) sind. Ein Aggregat von solchen Termen  $\varphi(x)$ , die noch die Unstetigkeiten von (11) wegheben, erhält man durch die Partialbruchentwicklung von (11), die in den beiden folgenden Paragraphen abgeleitet wird.

## § 2.

### Die Funktion $J(\zeta)$ .

Um Aussagen über  $J(\zeta)$  machen zu können, muß man verschiedene Bedingungen für  $V$  und  $Q$  formulieren. Wir setzen voraus, daß  $\bar{V}$  eine zum Nullpunkt symmetrisch gelegene,  $\left[\frac{p+5}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbare konvexe Fläche ist; weiterhin, daß das Produkt der Hauptkrümmungsradien von  $\bar{V}$  in jedem Punkte der Fläche  $> 0$  ist.  $Q$  sei  $\left[\frac{p+5}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar und ebenfalls zum Nullpunkt symmetrisch definiert, d. h.  $Q(\eta) = Q(-\eta)$ . Außerdem sei in  $V$   $Q > 0$ .

Wir stellen  $J(\zeta)$  durch ein einfaches Integral dar. Sei  $\zeta = r\xi$ , wo  $r = |\zeta|$  und  $\xi$  ein Einheitsvektor ist. Dann ist  $(\eta \zeta)$  konstant auf den Ebenen des  $\eta$ -Raumes normal zur Richtung  $\xi$ . Wir bezeichnen mit  $(s, \xi) = (-s, -\xi)$  die Ebene mit der (vom 0-Punkt abgewandten) Normalenrichtung  $\xi$  und dem Abstand  $s$  vom 0-Punkt. Dann sei

$$(13) \quad P(s, \xi) = \int Q(\eta) d\sigma_\eta,$$

wo das Integral über den ebenen Schnitt von  $(s, \xi)$  mit  $V$  zu erstrecken ist. („Masse“ des Schnittes.) Es ist

$$(14) \quad J(\zeta) = J(r\xi) = \int_{-\alpha(\xi)}^{+\alpha(\xi)} e^{irs} P(s, \xi) ds,$$

wenn  $(\alpha(\xi), \xi)$  die Tangentialebene an  $\bar{V}$  normal zu  $\xi$  ist.

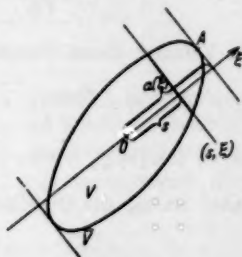


Fig. 1.

[Behandelt man die Aufgabe (2a), so ist ja

$$J(3) = \int_{\bar{V}} e^{i(\eta)} Q(\eta) d\sigma,$$

zu setzen; es gilt dann ebenfalls (14), wenn man  $P$  statt durch (13) durch

$$(15) \quad P(s, \xi) = \int \frac{Q(\eta)}{\cos(N, \xi)} d\sigma,$$

definiert, wo das Integral über das  $(p-2)$ -dimensionale Schnittgebilde von  $\bar{V}$  mit der Ebene  $(s, \xi)$  zu erstrecken ist und  $N$  die Flächennormale auf  $\bar{V}$  bedeutet.]

$P(s, \xi)$  ist nach Voraussetzung über  $Q$  und  $\bar{V}$  eine gerade Funktion von  $s$ . Wichtig ist das Verhalten von  $P$  in der Umgebung von  $s = \pm a(\xi)$ . Die Ebene  $(a, \xi)$  berühre  $\bar{V}$  im Punkte  $A$ . Denkt man die Fläche  $\bar{V}$  auf die Hauptkrümmungsrichtungen und die Normalenrichtung in  $A$  als Koordinatenachsen bezogen, so nimmt ihre Gleichung die Form

$$(16) \quad a - s = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{x_i^2}{2\varrho_i} + (\text{höhere Glieder})$$

an.  $\varrho_1, \dots, \varrho_{p-1}$  sind die Hauptkrümmungsradien in  $A$ .  $P(s, \xi)$  ist dann das Integral der Funktion  $Q$  über den Bereich der Ebene  $x_p = -s$ , der von dem Gebilde (16) (der Dupinschen Indikatrix) begrenzt wird. Es ist in erster Annäherung für  $s$  nahe an  $a$

$$\sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} \frac{\omega_{p-1}}{p-1} 2^{\frac{p-1}{2}} (a-s)^{\frac{p-1}{2}}$$

das Volumen dieses Bereiches und

$$(16') \quad P(s, \xi) = \frac{\omega_{p-1}}{p-1} 2^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) (a-s)^{\frac{p-1}{2}} + (a-s)^{\frac{p}{2}} P_1(s, \xi),$$

wo  $P_1$  für  $|s| \leq a$  eine  $\left[\frac{p+3}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist.

Dabei ist  $\omega_p$  die Oberfläche der Einheitskugel des  $R_p$ ,  $\frac{\omega_p}{p}$  ihr Volumen:

$$\omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Da  $P$  gerade in  $s$  ist, kann man auch schreiben

$$(17) \quad P(s, \xi) = \frac{\omega_{p-1}}{p-1} \frac{\sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A)}{a^{\frac{p-1}{2}}} (a^2 - s^2)^{\frac{p-1}{2}} + (a^2 - s^2)^{\frac{p}{2}} P_2(s, \xi),$$

wo  $P_2$  wieder  $\left[\frac{p+3}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar ist.

[Ist speziell  $V$  die Einheitskugel und  $Q = 1$ , so reduziert sich  $P$  auf den ersten Term

$$P(s, \xi) = \frac{\omega_{p-1}}{p-1} (1-s^2)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Ist  $P$  durch (15) definiert, so kann man ihm eine zu (17) analoge Form geben. Im Falle der Einheitskugel und  $Q = 1$  wird dann

$$(18) \quad P(s, \xi) = \omega_{p-1} (1-s^2)^{\frac{p-1}{2}}.]$$

$J(\xi) = J(r\xi)$  ist eine ganze analytische Funktion von  $r$ . Es folgt dann aus (17)

$$J(\xi) = J(r\xi) = \frac{\sqrt{e_1 \dots e_{p-1}} \sqrt{a} (2\pi)^{p/2} Q(A)}{r^{p/2}} J_{p/2}(ar) \\ + \int_{-a}^{+a} (a^2 - s^2)^{p/2} P_2(s, \xi) e^{rs} ds,$$

wo  $J_n$  die  $n$ -te Besselsche Funktion bedeutet<sup>6)</sup>. Wegen der bekannten asymptotischen Entwicklung von  $J_n$ <sup>7)</sup> und durch mehrmalige partielle Integration des zweiten Terms folgt dann, wenn für jedes  $\nu$

$$\left| r - \frac{\pi}{a} \left( \nu + \frac{p-1}{4} \right) \right| \geq \delta > 0$$

gilt,

$$(19) \quad J(r\xi) = \frac{\sqrt{2e_1 \dots e_{p-1}} (2\pi)^{p/2} \cos\left(ar - \frac{p+1}{4}\pi\right)}{r^{\frac{p+1}{2}}} \left(1 + \frac{O\theta}{\sqrt{|r|}}\right),$$

wo  $|\theta| \leq 1$  und  $C$  eine nur von  $V$ ,  $Q$  und  $\delta$  abhängige Konstante ist. Diese Abschätzung gilt für beliebige komplexe  $r$  mit positivem Realteil<sup>8)</sup>; da  $J(r\xi)$  gerade in  $r$  ist, bedeutet das keine Beschränkung der Allgemeinheit für  $r$ . Somit wird für große  $|r|$   $J(r\xi)$  asymptotisch durch die Funktion

$$h(r) = \frac{(2\pi)^{p/2} \sqrt{2e_1 \dots e_{p-1}} \cos\left(ar - \frac{p+1}{4}\pi\right)}{r^{\frac{p+1}{2}}}$$

dargestellt, wobei der Fehler  $O\left(\frac{|h(r)|}{\sqrt{|r|}}\right)$  ist.

<sup>6)</sup> Poissonsche Integraldarstellung der Besselschen Funktion. Vgl. Watson, Theory of Bessel Functions, S. 48.

<sup>7)</sup> Watson l. c. <sup>6)</sup>, S. 199.

<sup>8)</sup> Watson l. c. <sup>6)</sup>, S. 201.

Zur Abkürzung werde  $J(r)$  für  $J(r\xi)$  geschrieben. Ersetzt man in der Formel

$$J'(r) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{J(z)}{(z-r)^2} dz,$$

wo als Integrationsweg ein Einheitskreis um  $r$  gewählt ist,  $J$  durch  $h$ , so folgt bei Subtraktion

$$|J'(r) - h'(r)| \leq \max |J - h| \leq \frac{O}{\sqrt{|r|}} \cdot |h|.$$

Danach gilt auch

$$(20) \quad J'(r) = h'(r) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|r|}}\right) \right) \\ = \frac{-(2\pi)^{p/2} \sqrt{2} \varrho_1 \dots \varrho_{p-1} a \sin\left(ar - \frac{p+1}{4}\pi\right)}{r^{\frac{p+1}{2}}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|r|}}\right) \right),$$

solange man sich keiner 0-Stelle von  $h'(r)$  nähert.

Aus (19) folgt schon, daß zu vorgegebenem  $\delta$  jede 0-Stelle von  $J(r)$  mit genügend großem  $r$  in einer  $\delta$ -Umgebung einer 0-Stelle von  $h$  liegen muß. Bildet man andererseits

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{J'(r)}{J(r)} dr - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h'(r)}{h(r)} dr = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{J'(r)}{J(r)} dr - 1,$$

wo die Integrale über einen Kreis vom Radius  $\delta$  um eine (sicher reelle) 0-Stelle  $\alpha$  von  $h$  zu erstrecken ist, so folgt, daß für genügend große  $|\alpha|$  dieser Ausdruck verschwinden muß, d. h. daß für genügend große  $|\alpha|$  genau eine 0-Stelle von  $J$  in einer  $\delta$ -Umgebung einer 0-Stelle  $\alpha$  von  $h$  liegt. Aus (19) folgt aber, daß diese 0-Stelle reell ist, denn danach haben für genügend große  $|\alpha|$   $J(\alpha - \delta)$  und  $J(\alpha + \delta)$  verschiedenes Vorzeichen, so daß dann mindestens eine reelle 0-Stelle im Intervall  $\alpha - \delta \leq r \leq \alpha + \delta$  liegt.

Zusammenfassend folgt so: Ordnet man die 0-Stellen von  $J(r\xi)$  etwa nach der Größe der Realteile in eine Reihe:  $\dots, -\beta_3, -\beta_2, -\beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  ( $\beta_{-i} = -\beta_i$ ;  $r = 0$  ist wegen  $Q > 0$  keine 0-Stelle von  $J$ ), so sind von einem bestimmten  $\nu$  an alle  $\beta$ , reell und es gilt asymptotisch

$$(21) \quad \beta_\nu(\xi) \sim \frac{1}{a(\xi)} \left( \nu + \frac{p-1}{4} \right) \pi + m\pi,$$

wo  $m$  eine gewisse feste ganze Zahl ist.

Ist speziell  $Q = 1$ , so ist wegen der Konvexität von  $V P(s, \xi)$  für  $s \geq 0$  eine monoton abnehmende Funktion von  $s$  (das ist nicht mehr

der Fall, wenn  $P$  durch (15) definiert wird). Dann hat nach einem Satze von Pólya<sup>9)</sup> für  $p \geq 4$

$$J(r\xi) = \int_{-a}^{+a} e^{i r s} P(s, \xi) ds$$

sicher nur reelle Wurzeln.

Nach (21) werden die Flächen des  $\mathfrak{J}$ -Raumes, auf denen  $J(\mathfrak{J})$  verschwindet, asymptotisch, je weiter man sich vom Ursprung entfernt, um so mehr der Reziprokfläche von  $\bar{V}$  ähnlich, d. h. derjenigen Fläche, die von den Polen der Tangentialebenen von  $\bar{V}$  bezüglich der Einheitskugel um 0 gebildet wird; denn diese Reziprokfläche wird von den Punkten  $\frac{1}{a(\xi)} \cdot \xi$  gebildet.

### § 3.

#### Partialbruchentwicklung von $\frac{e^{i r x}}{J(r)}$ .

Aus (20) und (21) folgt, daß die Reihe

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \beta_r x}}{(r - \beta_r) \beta_r^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} J'(\beta_r)}$$

absolut und gleichmäßig in  $x$  für reelle  $x$  und komplexe  $r$  konvergiert, wenn  $r$  mit keiner Nullstelle von  $J(r\xi)$  zusammenfällt. Sei noch

$\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_\mu(x, \xi)$  der Anfang der Entwicklung von  $\frac{e^{i r x}}{J(r)}$  nach Potenzen von  $r$ .

Dann stellt der Ausdruck

$$(22) \quad H(r, x, \xi) = \frac{e^{i r x}}{r^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} J(r, \xi)} - \frac{1}{r^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_\mu(x, \xi) r^\mu - \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \beta_r(\xi) x}}{(r - \beta_r) J'(\beta_r) \beta_r^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}}$$

<sup>9)</sup> Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze der Analysis, Bd. II, S. 69, 173. (Für  $p=4$  ist zwar  $f(t) = P(t, \xi)$  nicht mehr 2-mal stetig differenzierbar, wie dort vorausgesetzt; der Beweis des Satzes von Pólya ist aber auch auf diesen Fall anwendbar, weil  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P(t, \xi)$  noch integrierbar ist.)



eine ganze analytische Funktion in  $r$  und für reelle  $x$  eine stetige Funktion in  $x$  dar.

Wir wollen diesen Ausdruck für festes reelles  $x$  mit  $-a \leq x \leq +a$  abschätzen. Zunächst werde angenommen, daß  $r$  von 0 und jeder Wurzel  $\beta_v$  von  $J$  mindestens den Abstand  $1/a$  hat.  $c_1, c_2, \dots$ , mögen nur von der Wahl von  $V$  und  $Q$  abhängige Konstanten bezeichnen. Wegen (21) und (20) gibt es ein  $c_1$ , so daß

$$|\beta_{\mu+v} - \beta_v| \geq |\mu| c_1, \quad |\beta_\mu| \geq |\mu| c_1$$

für alle  $\mu, v$  und daher ein  $c_2$ , so daß

$$\left| J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \right| \geq c_2 \sqrt{|v|}$$

ist. Es wird dann, wenn

$$\beta_\mu < \text{Realteil}(r) < \beta_{\mu+1}$$

ist, und um die Ideen zu fixieren,  $\mu > 2$  vorausgesetzt wird,

$$\begin{aligned} (23a) \quad \left| \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta_v x}}{(r - \beta_v) J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right| &\leq \sum_{v=-\infty}^{\mu-1} \frac{1}{(\beta_\mu - \beta_v) \left| J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \right|} \\ &+ \frac{1}{|r - \beta_\mu| \cdot \left| J'(\beta_\mu) \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \right|} + \frac{1}{|r - \beta_{\mu+1}| \cdot \left| J'(\beta_\mu) \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \right|} \\ &+ \sum_{v=\mu+2}^{\infty} \frac{1}{|\beta_v - \beta_{\mu+1}| \cdot \left| J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \right|} \\ &\leq \frac{1}{c_1 c_2} \sum_{v=-\infty}^{\mu-1} \frac{1}{(\mu - v) \sqrt{v}} + \frac{2a}{c_2 \sqrt{\mu}} + \frac{1}{c_1 c_2} \sum_{v=\mu+2}^{\infty} \frac{1}{(v - \mu) \sqrt{v}} \\ &\leq \frac{c_2 \log \mu}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist wegen  $|r| \geq \frac{1}{a}$

$$(23b) \quad \left| \frac{1}{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \sum_{v=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_v(x, \xi) r^v \right| \leq \frac{1}{|r|} \sum_{v=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} |A_v(x, \xi)| a^{\left[\frac{p+1}{2}\right] - v}.$$

Ist  $\tau = \text{Imaginärteil}(r)$ , so gibt es wegen (19) und der Voraussetzung über  $r$  ein  $c_4$ , so daß

$$|J(r)| \geq c_4 e^{|\tau|a}$$

ist; also wegen  $|x| \leq a$

$$(23c) \quad \left| \frac{e^{rx}}{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} J(r)} \right| \leq \frac{1}{c_4} \frac{e^{-\tau x - |\tau|a}}{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \leq \frac{1}{c_4} \frac{e^{|\tau|(x-a)}}{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \leq \frac{1}{c_4} \frac{1}{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}}.$$

Aus (23 a, b, c) folgt, daß  $H(r, x, \xi)$  für festes  $|x| \leq a$  in  $r$  beschränkt ist:  $|H| \leq M$ , solange  $r$  von 0 und jedem  $\beta$ , mindestens den Abstand  $1/a$  hat. Denken wir um jeden der Punkte  $r = 0$  und  $r = \beta$ , der  $r$ -Ebene einen Kreis vom Radius  $1/a$  geschlagen, so liegen diese Kreise nach (21) für genügend große  $|v|$  getrennt. Ist auf dem Rande eines solchen Kreises oder eines aus mehreren solchen Kreisen bestehenden Gebietes  $|H| \leq M$ , so nach dem Maximumprinzip auch im Innern. Daraus folgt, daß  $H$  eine in der ganzen  $r$ -Ebene beschränkte ganze Funktion ist, also eine Konstante. Da andererseits nach (23 a, b, c)

$$\lim H(r, x, \xi) = 0$$

ist, falls  $r$  auf einer Parallelen zur reellen Achse gegen  $\infty$  geht, ist diese Konstante 0. Damit ist gezeigt:

$$H(r, x, \xi) = 0$$

für  $-a(\xi) \leq x \leq a(\xi)$  und alle  $r$ .

Wir setzen

$$(24) \quad \Gamma(r, x, \xi) = r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} H(r, x, \xi) + \sum_{v=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_v(x, \xi) r^v \\ = \frac{e^{rx}}{J(r)} - r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta_v x}}{(r - \beta_v) J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}}.$$

Dann gilt also für  $-a \leq x \leq +a$

$$(25) \quad \Gamma(r, x, \xi) = \sum_{v=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_v(x, \xi) r^v.$$

Es ist allgemein für beliebige reelle  $x$  und genügend absolut große reelle  $r$

$$(26) \quad |\Gamma(r, x, \xi)| \leq r^{\frac{p+1}{2}} (c_3 |x| + c_0 \sqrt{|r|} \log |r|).$$

Beweis:  $\beta_\mu$  sei die Nullstelle von  $J$ , der  $r$  am nächsten liegt. Dann ist

$$|\Gamma(r, x, \xi)| \leq \left| \frac{e^{i r x}}{J(r)} - \frac{e^{i \beta_\mu x} r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}}{(r - \beta_\mu) J'(\beta_\mu) \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right| + \left| r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq \mu}}^{+\infty} \frac{e^{i \beta_\nu x}}{(r - \beta_\nu) J'(\beta_\nu) \beta_\nu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right|.$$

Man findet mit demselben Beweis wie für (23 a)

$$(27) \quad \left| r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq \mu}}^{+\infty} \frac{e^{i \beta_\nu x}}{(r - \beta_\nu) J'(\beta_\nu) \beta_\nu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right| \leq c_7 |r|^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} - \frac{1}{2} \log |r|$$

für  $|r| \geq 2$ .

Bei Berücksichtigung der Taylorentwicklungen

$$e^{i r x} = e^{i \beta_\mu x} + (r - \beta_\mu) i x e^{i \vartheta_1 x},$$

$$J(r) = (r - \beta_\mu) J'(\beta_\mu) + \frac{(r - \beta_\mu)^3}{2} J''(\vartheta_1) = (r - \beta_\mu) J'(\vartheta_2),$$

$$r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} = \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} + \left[\frac{p+3}{2}\right] (r - \beta_\mu) \vartheta_3^{\left[\frac{p+1}{2}\right]},$$

wo  $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  zwischen  $r$  und  $\beta_\mu$  liegen, folgt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{i r x}}{J(r)} - \frac{e^{i \beta_\mu x} r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}}{(r - \beta_\mu) J'(\beta_\mu) \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right| \\ & \leq \frac{|i x J'(\beta_\mu)| + \left[\frac{p+3}{2}\right] |J'(\beta_\mu)| \left(\frac{\vartheta_3}{\beta_\mu}\right)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} + \left|\frac{J''(\vartheta_1)}{2}\right| + |r - \beta_\mu| |J''(\vartheta_1)| \left[\frac{p+3}{2}\right] \left|\frac{\vartheta_2}{\beta_\mu}\right|^{\frac{p+1}{2}}}{\left|\frac{J(r)}{r - \beta_\mu}\right| \cdot |J'(\beta_\mu)|} \end{aligned}$$

Es ist nun

$$|J''(\vartheta_1)| = \frac{c_8}{|\vartheta_1|^{\frac{p+1}{2}}} \leq c_9 \cdot \frac{1}{|r|^{\frac{p+1}{2}}},$$

wie man aus (20) in derselben Weise wie (20) aus (19) folgern kann; für  $J'(\beta_\mu)$  folgt aus (20) die Abschätzung

$$\frac{c_{10}}{r^{\frac{p+1}{2}}} \leq |J'(\beta_\mu)| \leq \frac{c_{11}}{r^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Außerdem hat man für  $|r - \beta_\mu| \geq \frac{1}{a}$  nach (20) für hinreichend große  $|r|$

$$\left| \frac{J(r)}{r - \beta_\mu} \right| = |J'(\theta_1)| \geq \frac{c_{12}}{|r|^{\frac{p+1}{2}}}$$

und für  $|r - \beta_\mu| \geq \frac{1}{a}$

$$\left| \frac{J(r)}{r - \beta_\mu} \right| \geq a |J(r)| \geq \frac{c_{13}}{|r|^{\frac{p+1}{2}}}.$$

Es ist also für alle genügend großen  $|r|$

$$\left| \frac{e^{i r x}}{J(r)} - \frac{r^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} e^{i \beta_\mu x}}{J'(\beta_\mu) (r - \beta_\mu) \beta_\mu^{\left[\frac{p+3}{2}\right]}} \right| \leq r^{\frac{p+1}{2}} (c_{14} x + c_{15}).$$

Zusammen mit (27) folgt daraus die Behauptung (26).

#### § 4.

##### Auflösung der Gleichung (4).

Sei wie in § 1

$$(4) \quad g(x) = \int_V f(x + \eta) Q(\eta) d\eta$$

gegeben und  $f$  gesucht.  $f$  selbst werde für  $x$  in  $V$  vorgegeben :

$$(28) \quad f(x) = h(x) \quad \text{für } x \text{ in } V.$$

Genauer sei eine Konstante  $c > 1$  gewählt, dann  $g$  für alle  $x$  vorgegeben, für die  $\frac{x}{c}$  in  $V$  liegt und  $f$  für die  $x$  gesucht, für die  $\frac{x}{c+1}$  in  $V$  liegt.  $g$  und  $h$  seien  $(2p+1)$ -mal bzw.  $\frac{3p+3}{2}$ -mal stetig differenzierbar; man denkt sie sich ebensooft stetig differenzierbar in den ganzen Raum derart fortgesetzt, daß sie absolut konvergente Fourierreihen besitzen und auch für alles Folgende hinreichend stark im Unendlichen verschwinden:

$$(29a) \quad g(x) = \int_{R_p} e^{i(x\eta)} \bar{g}(\eta) d\eta \quad \text{für } \frac{x}{c} \text{ in } V,$$

$$(29b) \quad h(x) = \int_{R_p} e^{i(x\eta)} \bar{h}(\eta) d\eta \quad \text{für } x \text{ in } V$$

(man könnte auch Fourier-Reihen verwenden).

Notwendig für die Verträglichkeit der Vorgaben  $g$  und  $h$  ist offenbar

$$(30) \quad g(0) = \int_V h(\eta) Q(\eta) d\eta.$$

Man ist aber genötigt noch weitere Bedingungen als erfüllt anzunehmen. Es soll noch

$$(31) \quad \left( \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_p}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_p^{r_p}} g \right)_{z=0} = \int_V \left( \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_p}}{\partial y_1^{r_1} \dots \partial y_p^{r_p}} h(\eta) \right) Q(\eta) d v_\eta$$

für alle  $r_1 + r_2 + \dots + r_p \leq \left[ \frac{p+1}{2} \right]$  erfüllt sein. (Diese Bedingungen sind offenbar notwendig für die Existenz einer  $\left[ \frac{p+1}{2} \right]$ -mal stetig differenzierbaren Lösung  $f$ , wie durch Differentiation von (4) und Nullsetzen von  $x$  folgt; man kann aber hier bei ihrem Zutreffen nur die Existenz einer stetigen Lösung  $f$  zeigen; vgl. § 5).

Dann ist

$$(32) \quad f(x) = \int_{R_p} (e^{i(x, \xi)} - J(\xi) \Gamma(r, (\xi, x), \xi) \bar{h}(\xi)) d\xi \\ + \int_{R_p} \Gamma(r, (\xi, x), \xi) \bar{g}(\xi) d\xi$$

eine stetige Lösung von (4), die für  $x$  in  $V$  mit  $h$  zusammenfällt (wieder  $\xi = r\xi$  gesetzt, wo  $\xi$  ein Einheitsvektor ist).

Beweis: Die absolute Konvergenz der Integrale und die Stetigkeit von  $f$  folgt nach S. 492 aus (19), (26) und den Regularitätsvoraussetzungen über  $g$  und  $h$ . Es ist

$$(33) \quad \int_V f(x + \eta) Q(\eta) d v_\eta = \int_{R_p} \bar{g}(\xi) \int_V \Gamma(r, (\xi, x) + (x, \eta), \xi) Q(\eta) d v_\eta.$$

Denn das erste Integral in (32) ist nach Definition (24) von  $\Gamma$  aus Ausdrücken der Form  $e^{i\beta, (\xi) \cdot (x, \eta)}$  zusammengesetzt, liefert also nach S. 493 zu (33) keinen Beitrag, weil  $J(\beta, (\xi) \xi) = 0$  ist. Aus denselben Gründen ist nach (7), wenn  $r$  keine Wurzel von  $J(r\xi)$  ist,

$$\int_V \Gamma(r, (\xi, x) + (\xi, \eta), \xi) Q(\eta) d v_\eta = \frac{1}{J(r\xi)} e^{i(\xi, x)r} \int_V e^{ir(\xi, \eta)} Q(\eta) d v_\eta \\ = e^{i(\xi, x)r} = e^{i(\xi, x)};$$

da  $\Gamma(r, x, \xi)$  in allen Argumenten stetig ist, gilt das dann auch für  $r = \beta_\mu$ . Es folgt so

$$\int_V f(x + \eta) Q(\eta) d v_\eta = \int_{R_p} e^{i(x, \eta)} \bar{g}(\xi) d\xi = g(x)$$

und damit der erste Teil der Behauptung.

Weiterhin ist für  $x$  in  $V$

$$|(\xi, x)| \leq a(\xi)$$

nach Definition von  $a$ . Also nach (25)

$$(34) \quad \begin{cases} \Gamma(r, (\xi x), x) = \sum_{v=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} A_v((\xi x), \xi) r^v, \\ f(x) = h(x) + \sum_{v=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \int_{K_p} A_v((\xi x), \xi) r^v \bar{g}(\xi) d\xi \\ \quad - \sum_{v=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \int_{K_p} J(r\xi) A_v((\xi x), x) r^v \bar{h}(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Um die Behauptung  $f(x) = h(x)$  zu erhalten, hat man die Voraussetzungen (31) auszunutzen. Sei die Entwicklung der ganzen Funktion  $J(r\xi)$  nach Potenzen von  $r$

$$J(r\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{K_v(\xi) r^v}{v!};$$

dann ist nach (7)

$$K_v(\xi) = i^v \int_V (\xi \eta)^v Q(\eta) d\eta,$$

ein Polynom vom Grade  $v$  in den Komponenten  $\xi_i$  von  $\xi$ ;  $K_0(\xi)$  ist eine von  $\xi$  unabhängige Konstante  $K_0 \neq 0$ . Dann hat  $\frac{e^{i r x}}{J(r\xi)}$  nach Definition der  $A_v$  eine Entwicklung der Form

$$\frac{e^{i r x}}{J(r\xi)} = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x, \xi) r^v;$$

dabei ist <sup>10)</sup>

$$A_v(x, \xi) = \frac{(-1)^v}{K_0^{v+1}} \begin{vmatrix} K_1(\xi) K_2(\xi) \dots K_v(\xi) & \frac{(ix)^v}{v!} \\ K_0 K_1(\xi) \dots K_{v-1}(\xi) & \frac{(ix)^{v-1}}{(v-1)!} \\ 0 & K_0 \dots K_{v-2}(\xi) & \frac{(ix)^{v-2}}{(v-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots K_0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$A_v(x, \xi)$  ist also ein Polynom in  $x, \xi_1, \dots, \xi_p$  vom Grade  $\leq v$ . Wegen  $\frac{e^{i(-r)(-x)}}{J(-r\xi)} = \frac{e^{i r x}}{J(r\xi)}$  muß  $A_v(-x, -\xi) = (-1)^v A_v(x, \xi)$  sein, d. h.  $A_v$  ist ein gerades oder ungerades Polynom, je nachdem  $v$  gerade oder ungerade ist.

<sup>10)</sup> Vgl. Bieberbach, Funktionentheorie I, S. 161.

Da  $z_i = r \xi_i$  die Komponenten von  $\mathfrak{z}$  und  $x_i$  die von  $\mathbf{x}$  sind, läßt sich so  $A, ((\xi \mathbf{x}), \xi) r^\nu$  als Polynom in den  $z_i$  und  $x_i$  schreiben, wobei die Koeffizienten Polynome in  $r^3$  sind; wegen  $r^3 = \sum_{i=1}^p z_i^2$  hat man so in  $A, ((\xi \mathbf{x}), \xi) r^\nu$  überhaupt ein Polynom vom Grade  $\leq \nu$  in den  $x_i$  und  $z_i$  mit konstanten Koeffizienten  $\alpha$  vor sich. Sei etwa

$$A, ((\xi \mathbf{x}), \xi) = \sum \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p \lambda_1 \dots \lambda_p} x_1^{\mu_1} \dots x_p^{\mu_p} z_1^{\lambda_1} \dots z_p^{\lambda_p} \\ \left( \sum_{i=1}^p (\mu_i + \lambda_i) = \nu \right).$$

Dann ist nach (29 a)

$$\int_{K_p} A, ((\xi \mathbf{x}), \xi) r^\nu \bar{g}(\mathfrak{z}) d\mathfrak{z} \\ = \sum \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p \lambda_1 \dots \lambda_p} x_1^{\mu_1} \dots x_p^{\mu_p} \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_p^{\lambda_p}} g(\mathbf{x}) \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

und folglich nach Voraussetzung (31) und (29 b), (7)

$$= \sum \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p \lambda_1 \dots \lambda_p} x_1^{\mu_1} \dots x_p^{\mu_p} \int_V \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}}{\partial y_1^{\lambda_1} \dots \partial y_p^{\lambda_p}} h(\mathfrak{y}) \right) Q(\mathfrak{y}) d\mathfrak{y} \\ = \sum \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p \lambda_1 \dots \lambda_p} x_1^{\mu_1} \dots x_p^{\mu_p} \int_V d\mathfrak{y} \int_{K_p} d\mathfrak{z} e^{i(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})} Q(\mathfrak{y}) \bar{h}(\mathfrak{z}) \\ = \int_{K_p} J(r \xi) A, ((\xi \mathbf{x}), \xi) r^\nu \bar{h}(\mathfrak{z}) d\mathfrak{z}.$$

Aus (34) folgt dann  $f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ . Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

## § 5.

Fall einer nur von einer Variablen abhängigen Lösung.

$f$  sei konstant auf allen Ebenen mit der Normalrichtung  $\xi$ :

$$f(x \xi) = \Phi(x).$$

Dann müssen auch  $g$  und  $h$  auf diesen Ebenen konstant vorausgesetzt werden:

$$g(x \xi) = \gamma(x), \quad h(x \xi) = \eta(x).$$

Die Gleichung (4) geht nach Definition von  $P$  über in

$$\gamma(x) = \int_{-a(\xi)}^{+a(\xi)} \Phi(x+y) P(y, \xi) dy.$$



Wir lassen den in diesem Paragraphen festen Parameter  $\xi$  fort und haben also  $\Phi$  aus

$$(35a) \quad \gamma(x) = \int_{-a}^{+a} \Phi(x+y) P(y) dy,$$

$$(35b) \quad \Phi(x) = \eta(x) \quad \text{für } |x| \leq a$$

zu bestimmen.

Satz I: Notwendig für die Existenz einer stetigen Lösung von (35a, b) ist

a)  $\gamma(x)$  ist  $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar,

$h(x)$  ist stetig;

b) es ist

$$(36a) \quad \gamma^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu \int_{-a}^{+a} \eta(y) P^{(\nu)}(y) dy$$

für  $\nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{p}{2}\right]$ , und für ungerades  $p$  noch

$$(36b) \quad \gamma^{(\frac{p+1}{2})}(0) = (-\pi)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) (\eta(a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \eta(-a)) \\ - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \int_{-a}^{+a} \eta(y) P^{(\frac{p+1}{2})}(y) dy.$$

Beweis: Durch sukzessive  $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ -malige partielle Integration und Differentiation folgt aus (35a) unter Beachtung von (17)

$$(37a) \quad \frac{\partial^\nu \gamma(x)}{\partial x^\nu} = (-1)^\nu \int_{-a}^{+a} \Phi(x+y) P^{(\nu)}(y) dy$$

für  $\nu = 0, 1, \dots, \left[\frac{p}{2}\right]$ , und für ungerades  $p$  noch

$$(37b) \quad \gamma^{(\frac{p+1}{2})}(x) = (-\pi)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) (\Phi(x+a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \Phi(x-a)) \\ - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \int_{-a}^{+a} \Phi(x+y) P^{(\frac{p+1}{2})}(y) dy.$$

Setzt man  $x = 0$ , so folgen die Bedingungen (36).

Eine Möglichkeit (35a, b) aufzulösen, besteht wieder in Anwendung der Fourierzerlegung. Man findet dann durch Übertragung der Resultate von § 4 auf den vorliegenden Spezialfall analog zu (32)

$$(38) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ixz} - J(z) \Gamma(z, x)) \bar{\eta}(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau, x) \bar{\gamma}(z) dz,$$

wenn

$$(39) \quad \Gamma(z, x) = \frac{e^{izx}}{J(z)} - 2^{\left[\frac{p+3}{2}\right]} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta_v x}}{(z - \beta_v) J'(\beta_v) \beta_v^{\left[\frac{p-3}{2}\right]}},$$

$$\bar{\eta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \eta(x) dx,$$

$$\bar{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} \gamma(x) dx,$$

$$(40) \quad J(z) [= J(z\xi)] = \int_{-a}^{+a} e^{izs} P(s) ds.$$

(38) stellt für  $|x| \leq c$  eine Lösung von (35) dar, wenn  $\eta(x)$  für  $|x| \leq a$  einmal und  $\gamma(x)$  für  $|x| \leq c + a$   $\left[\frac{p+3}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar sind (und im Unendlichen gewissen Regularitätsvoraussetzungen genügen). Die Bedingungen (31) lassen sich im vorliegenden Spezialfall durch die Bedingungen (36) ersetzen; sie sind mit ihnen identisch, wenn  $\eta \left[\frac{p+1}{2}\right]$ -mal differenzierbar ist. Man erhält so:

Satz II: Ist (36) erfüllt und außerdem  $\eta$  stetig differenzierbar,  $\gamma \left[\frac{p+3}{2}\right]$ -mal stetig differenzierbar, so besitzt (35) eine stetige Lösung  $\Phi$ .

Für  $\gamma \equiv 0$  ist auch  $\bar{\gamma} \equiv 0$  und der Ausdruck (38) liefert nach Definition (39) von  $\Gamma$  eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den  $e^{i\beta_v x}$  für  $\Phi(x)$ , die für  $|x| \leq a$  mit der Funktion  $\eta$  übereinstimmen muß. Der vorige Satz liefert dann:

Satz III: Eine im Intervall  $-a \leq x \leq +a$  stetig differenzierbare Funktion  $\eta(x)$ , die den Bedingungen

$$(41a) \quad \int_{-a}^{+a} \eta(y) P^{(v)}(y) dy = 0$$

für  $v = 0, 1, \dots, \left[\frac{p-2}{2}\right]$  und, falls  $p$  ungerade ist, noch

$$(41b) \quad \pi^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} \cdot Q(A) \left( \eta(a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \eta(-a) \right) \\ = \int_{-a}^{+a} \eta(y) P^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}(y) dy$$

genügt, läßt sich für  $|x| \leq a$  durch eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$(42) \quad \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{i\beta_v x}$$

darstellen; dabei sind die  $\beta_v$ , die 0-Stellen der durch (40) definierten Funktion  $J(z)$ .

Jeder Ausdruck, der für alle  $x$  durch eine konvergente Reihe der Form (42) dargestellt wird, die für  $x = 0$  absolut konvergiert (sie konvergiert dann auch gleichmäßig in jedem endlichen Intervall), stellt eine Lösung von (35a) mit  $\gamma = 0$  dar. Nach Satz I hat man so als Ergänzung zu Satz I

Satz IV: Notwendig dafür, daß eine Funktion  $\eta(x)$  im Intervall  $-a \leq x \leq +a$  in eine absolut konvergente Reihe nach den  $e^{i\beta x}$  entwickelbar ist, sind die Bedingungen (41).

*Zweite Methode zur Auflösung von (35).*

Es bezeichne für ganzzahliges  $\nu$   $Y$ , das Intervall

$$(2\nu - 1)a \leq x \leq (2\nu + 1)a.$$

In  $Y_0$  ist  $\Phi$  vorgegeben. Man kann versuchen,  $\Phi$  sukzessive in den einzelnen Intervallen  $Y$ , zu berechnen. Für  $\Phi$  im Intervall  $Y$ , werde die Bezeichnung  $\Phi_\nu$  eingeführt; genauer sei  $\Phi_\nu(x)$  für  $-a \leq x \leq +a$  durch

$$(43) \quad \Phi_\nu(x) = \Phi(x + 2\nu a)$$

erklärt, (also  $\Phi_0(x) = \eta(x)$ ).

Es sei schon  $\Phi_\nu(x)$  bekannt und es werde  $\Phi_{\nu+1}(x)$  gesucht. Nun kann man (35a) in der Form

$$\gamma(x) - \int_a^{(2\nu+1)a-x} \Phi(x+y) P(y) dy = \int_{(2\nu+1)a-x}^a \Phi(x+y) P(y) dy$$

schreiben; daraus folgt bei Ersetzung von  $x$  durch  $x + (2\nu + 1)a$  nach (43)

$$\begin{aligned} \gamma(x + (2\nu + 1)a) - \int_x^a \Phi_\nu(y) P(y - x - a) dy \\ = \int_{-a}^x \Phi_{\nu+1}(y) P(y - x + a) dy \end{aligned}$$

für

$$-a \leq x \leq +a.$$

Das ist eine Volterrasche Integralgleichung erster Art für die Funktion  $\Phi_{\nu+1}$ . (Ist  $\nu$  negativ, so kann man sie auch als ebensolche Gleichung zur Bestimmung von  $\Phi_\nu$  aus dem schon bekannten  $\Phi_{\nu+1}$  auffassen.) Die Aufgabe, die Lösung  $\Phi$  von (35) im Intervall  $Y$ , zu bestimmen, ließe sich also durch Auflösung von  $|\nu|$  Volterraschen Integralgleichungen erster Art erledigen. Diese Gleichungen lassen sich<sup>11)</sup> auf Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art zurückführen und zwar in verschiedener Weise für gerades und ungerades  $p$ .

<sup>11)</sup> Nach Volterra: „Leçons sur les Équations Intégrales“, Kap. II.

Im Falle eines *ungeraden*  $p$  geht man statt von (35 a) von (37 b) aus<sup>12)</sup>, ersetzt dort  $x$  durch  $x + (2\nu + 1)a$  und erhält nach (43)

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-\pi)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) \Phi_{\nu+1}(x) \\ & - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \int_{-a}^x \Phi_{\nu+1}(y) P^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}(y-x+a) dy \\ & = \pi^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) \Phi_{\nu}(x) \\ & + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \int_x^a \Phi_{\nu}(y) P^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}(y-x-a) dy \\ & - \gamma^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} (x + (2\nu + 1)a). \end{aligned} \right.$$

Das ist eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art zur Bestimmung von  $\Phi_{\nu+1}$  aus  $\Phi_{\nu}$ . Da der Kern  $P^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}(y-x+a)$  stetig in  $x$  und  $y$  ist und ebenso die rechte Seite, gibt es nach bekannten Existenzsätzen für diese Gleichungen eine und nur eine stetige Funktion  $\Phi_{\nu+1}(x)$  im Intervall  $-a \leq x \leq +a$ , die (45) erfüllt<sup>13)</sup>.

Bildet man (45) für  $x = -a$  und ein anderes Mal bei Ersetzung von  $\nu$  durch  $\nu - 1$  für  $x = +a$ , so folgt

$$\Phi_{\nu+1}(-a) - \Phi_{\nu}(a) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (\Phi_{\nu}(-a) - \Phi_{\nu-1}(-a)).$$

Es gilt also schließlich wegen  $\Phi_0 = \eta$ .

$$\Phi_{\nu+1}(a) - \Phi_{\nu}(a) = \pm (\Phi_1(-a) - \eta(a)).$$

Wendet man aber (45) auf  $\nu = 0$ ,  $x = -a$  an, so folgt  $\Phi_1(-a) = \eta(a)$ , wenn (35 b) erfüllt ist, d. h.  $\Phi_{\nu+1}(-a) = \Phi_{\nu}(a)$  für alle  $\nu$ .

Bildet man so mit den durch Auflösung der Volterraschen Integralgleichungen gefundenen Funktionen  $\Phi$ , die Funktion  $\Phi$  nach (43), so ist auf Grund von (36 b)  $\Phi(x)$  auch in den Punkten  $x = 2\nu + 1$  stetig.  $\Phi(x)$  stellt sicher eine Lösung von (37 b) dar; da die Gleichung (35 a) durch  $\frac{p+1}{2}$ -malige Integration aus (37 b) entsteht, garantieren die Bedingungen (36 a) gerade, daß  $\Phi$  auch (35 a) erfüllt. Es gilt so:

Satz V: Ist  $p$  ungerade, so sind die Bedingungen von Satz I auch hinreichend für die Existenz einer stetigen Lösung  $\Phi$  von (35); man erhält diese für

$$2\nu - 1 \leq x \leq 2\nu + 1$$

<sup>12)</sup> Gleichungen der Gestalt (37 b) sind von G. Herglotz und P. Hertz in Math. Annalen 65 als „Integralgleichungen der Elektronentheorie“ behandelt.

<sup>13)</sup> Vgl. loc. cit.<sup>11)</sup>.

durch Auflösung von  $|\gamma|$  Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art. Die Lösung ist dann auch eindeutig bestimmt.

Das entsprechende für gerades  $p$  zeigt man, wie folgt:  $\gamma$  werde als  $(\frac{p}{2} + 1)$ -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Dann ist man nach Satz II der Existenz einer stetigen Lösung  $\Phi$  von (35) sicher; man versucht nur, sie als Lösung einer Volterraschen Integralgleichung zweiter Art darzustellen. Dazu geht man von der letzten Gleichung in (37a) aus, ersetzt  $x$  durch  $x + (2\nu + 1)a$  und erhält nach (43)

$$\begin{aligned} (-1)^{p/2} \gamma^{(p/2)}(x + (2\nu + 1)a) - \int_{-a}^x \Phi_r(x + y + a) P^{(p/2)}(y) dy \\ = \int_{-a}^x \Phi_{r+1}(y) P^{(p/2)}(y - x + a) dy. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung werde mit  $f(x)$  bezeichnet. Dann folgt durch Multiplikation mit  $\frac{1}{\sqrt{z-x}}$  und Integration über  $x$

$$\begin{aligned} (46) \quad \int_{-a}^z \frac{f(x)}{\sqrt{z-x}} dx &= \int_{-a}^z \frac{dx}{\sqrt{z-x}} \int_{-a}^x P^{(p/2)}(y - x + a) \Phi_{r+1}(y) dy \\ &= \int_{-a}^z \Phi_{r+1}(y) L(y, z) dy; \end{aligned}$$

dabei ist

$$L(y, z) = \int_y^z \frac{P^{(p/2)}(y - x + a)}{\sqrt{z-x}} dx.$$

Nach (16') kann man  $P^{(p/2)}(y) = \frac{P_1(y)}{\sqrt{a-y}}$  setzen, wo  $P_1$  stetig ist und  $P_1(a) \neq 0$ . Man hat so

$$L(y, z) = \int_y^z \frac{P_1(y - x + a)}{\sqrt{z-x} \sqrt{a-y}} dx.$$

$L$  ist stetig differenzierbar in  $z$  und es gilt

$$L(z, z) = \pi P_1(a) = \pi (-1)^{p/2} (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{\varrho_1 \dots \varrho_{p-1}} Q(A) \neq 0.$$

Durch Differentiation von (46) nach  $z$  (die linke Seite ist stetig differenzierbar, weil die rechte es ist) folgt dann die gesuchte Volterrasche Integralgleichung zweiter Art für  $\Phi_{r+1}$ :

$$\frac{d}{dz} \int_{-a}^z \frac{f(x)}{\sqrt{z-x}} dx = \pi P_1(a) \Phi_{r+1}(z) + \int_{-a}^z \Phi_{r+1}(y) L_z(y, z) dy,$$

die einen stetigen Kern besitzt. Es gibt eine und nur eine stetige Lösung  $\Phi_{r+1}$  dieser Gleichung. Die aus diesen  $\Phi$ , zusammengesetzte Funktion  $\Phi$  muß die Lösung von (35) sein. Man erhält so

Satz VI: Ist bei geradem  $p$  (36a) erfüllt und außerdem  $\eta$  stetig differenzierbar,  $\gamma$   $\frac{p+2}{2}$ -mal stetig differenzierbar, so ist die Lösung  $\Phi$  von (35), deren Existenz nach Satz II feststeht, eindeutig bestimmt; sie kann für

$$2v - 1 \leq x \leq 2v + 1$$

durch Auflösung von  $|v|$  Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art gefunden werden.

Satz VII: Es kann nicht mehr als eine stetig differenzierbare Lösung von (35a) geben, die im Unendlichen verschwindet.

Beweis: Gäbe es zwei solche, so würde die Differenz eine Lösung der homogenen Gleichung

$$(47) \quad \int_{-a}^{+a} \Phi(x+y) P(y) dy = 0$$

sein, die im Unendlichen verschwindet. Sei  $\Phi(x) = \eta(x)$  für  $|x| \leq a$ . Man kann  $\eta(x)$  für  $|x| \leq a$  nach Satz III durch eine absolut kon-

vergente Reihe  $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_r e^{i\beta_r x}$  darstellen; denn aus (47) folgen durch Differentiation und partielle Integration und Nullsetzen von  $x$  die Relationen (41a, b). Da diese Reihe für alle  $x$  eine Lösung von (47) ist und für  $|x| \leq a$  mit  $\Phi$  übereinstimmt, stimmt sie nach den gezeigten Eindeigkeitsätzen für alle  $x$  mit  $\Phi$  überein. Nun sind nur endlich viele von den  $\beta_r$  nicht reell, etwa  $\beta_{-\mu}, \dots, \beta_{\mu}$ . Aus der Beschränktheit von  $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_r e^{i\beta_r x}$  für alle  $x$  folgt aber die Beschränktheit von  $\sum_{-\mu}^{+\mu} A_r e^{i\beta_r x}$  und folglich das Verschwinden von  $A_{-\mu}, \dots, A_{+\mu}$ . Also ist

$$\Phi(x) = \sum_{|r| > \mu} A_r e^{i\beta_r x}$$

eine fastperiodische Funktion; eine solche kann aber nur im Unendlichen verschwinden, wenn sie identisch verschwindet. Es folgt so  $\Phi = 0$  und damit die Behauptung.

#### Fall einer Einheitskugel V.

Es seien die Integrale der gesuchten Funktion über die Oberflächen aller Einheitskugeln des  $R_p$  vorgegeben. Man hat dann für  $P$  den Ausdruck (18) zu wählen. (35) geht über in

$$(48) \quad \gamma(x) = \omega_{p-1} \int_{-1}^{+1} \Phi(x+y) (1-y^2)^{\frac{p-3}{2}} dy$$

$$\Phi(x) = \eta(x) \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Ist  $p$  ungerade, so kann man (48) statt auf eine Integralgleichung besser auf eine Differentialgleichung zurückführen.

$\Phi(x)$  werde nämlich zunächst als  $\frac{p-3}{2}$ -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt; dann folgt durch  $(p-2)$ -malige Differentiation von (48)

$$\gamma^{(p-2)}(x) = (-2)^{\frac{p-3}{2}} \frac{p-3}{2}! \left[ \left( \Phi^{(\frac{p-3}{2})}(x+1) X(1) - \Phi^{(\frac{p-3}{2})}(x-1) X(-1) \right) \right. \\ \left. - \left( \Phi^{(\frac{p-5}{2})}(x+1) X'(1) - \Phi^{(\frac{p-5}{2})}(x-1) X'(-1) \right) - \dots \right. \\ \left. + (-1)^{\frac{p-3}{2}} \left( \Phi(x+1) X^{(\frac{p-3}{2})}(1) - \Phi(x-1) X^{(\frac{p-3}{2})}(-1) \right) \right].$$

Dabei bedeutet  $X(x)$  das  $\frac{p-3}{2}$ -te Legendresche Polynom. Bei Ersetzung von  $x$  durch  $x+2\nu+1$  erhält man daraus nach (43) für  $a=1$

$$\Phi_{\nu+1}^{(\frac{p-3}{2})}(x) X(1) - \Phi_{\nu+1}^{(\frac{p-5}{2})}(x) X'(1) + \dots + (-1)^{\frac{p-3}{2}} \Phi_{\nu+1}(x) X^{(\frac{p-3}{2})}(1) \\ = \Phi_{\nu}^{(\frac{p-3}{2})}(x) X(-1) - \Phi_{\nu}^{(\frac{p-5}{2})}(x) X'(-1) + \dots \\ + (-1)^{\frac{p-3}{2}} \Phi_{\nu}(x) X^{(\frac{p-3}{2})}(-1) + \frac{1}{(-2)^{\frac{p-3}{2}} \frac{p-3}{2}!} \gamma(x+2\nu+1),$$

wenn  $-1 \leq x \leq 1$ . Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung  $\frac{p-3}{2}$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für  $\Phi_{\nu+1}(x)$ , die unmittelbar explizit zu integrieren ist. Ist  $\Phi$  nur stetig, so setzt man  $\Phi = \psi^{(\frac{p-3}{2})}$  und hat dann für die  $\frac{p-3}{2}$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $\psi$  eine Gleichung der Form (48).

(Man sieht hier leicht ein, daß (48) auch immer eine Lösung besitzt, wenn nur die erste der Bedingungen (36a):

$$\gamma(0) = \omega_{p-1} \int_{-1}^{+1} \eta(y) (1-y^2)^{\frac{p-3}{2}} dy$$

erfüllt ist; nur hat diese Lösung im allgemeinen in den Punkten der Form  $x = 2\nu+1$  Unstetigkeiten.)

Besonders einfach gestaltet sich der Fall  $p=3$ . Dann geht nämlich (48) in

$$(49) \quad \gamma(x) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Phi(x+y) dy$$

über. Man hat  $\gamma$  als stetig differenzierbar,  $\eta$  als stetig vorauszusetzen. Dann ist

$$\frac{\gamma'(x)}{2\pi} = \Phi(x+1) - \Phi(x-1).$$



Es folgt

$$(50) \quad \Phi(x) = \eta(\bar{x}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\frac{x-\bar{x}}{2}} \gamma'(\bar{x} + 2i - 1),$$

wenn  $\bar{x}$  den absolut kleinsten Rest von  $x \pmod{2}$  bezeichnet.  $\Phi$  stellt eine Lösung von (49) dar, wenn nur

$$\gamma(0) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \eta(y) dy$$

erfüllt ist; soll  $\Phi$  in den Punkten  $x = 2\nu + 1$  noch stetig sein, so hat man noch die Relation

$$\eta(+1) - \eta(-1) = \frac{\gamma'(0)}{2\pi}$$

als erfüllt vorauszusetzen. Wird  $\eta(x) = 0$  für  $|x| > 1$  gesetzt, so kann man (50) auch die Form

$$(51) \quad \Phi(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta(x - 2i) + \sum_{i=1}^{\frac{x-\bar{x}}{2}} \gamma'(x - 2i + 1)$$

geben.

Fragt man hier nach Lösungen  $\Phi$ , die für  $x \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergieren, so folgt aus (50)

$$0 = \eta(\bar{x}) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma'(\bar{x} + 2i - 1).$$

Für eine solche Lösung ist also  $\eta$  und damit  $\Phi$  schon eindeutig durch  $\gamma$  bestimmt; es ist dann

$$(52) \quad \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma'(x + 2i - 1);$$

soll auch noch  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$  sein, so folgt genau so

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma'(x - 2\nu - 1).$$

Für die Existenz einer im Unendlichen verschwindenden Lösung  $\Phi$  von (49) ist also außer Regularitätsbedingungen für  $\gamma$  die Bedingung

$$(53) \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma'(x + 2i - 1)$$

für jedes  $x$  notwendig.

## § 6.

## Die Radonschen Probleme.

In diesem Paragraphen sollen die beiden Aufgaben

I. Bestimmung einer Punktfunktion aus ihren Ebenenintegralen,

II. Bestimmung einer Ebenenfunktion aus ihren Punktmittelwerten

gestreift werden. Die Aufgaben sind in gewissem Sinne dual zueinander.

Dabei ist unter dem Integral einer Funktion, die von den Hyper-ebenen des  $R_p$  abhängt, über eine Fläche  $\Sigma$  das Integral derjenigen Punktfunktion über  $\Sigma$  zu verstehen, die jedem Punkte  $P$  von  $\Sigma$  den Wert von  $\Phi$  für die Tangentialebene in  $P$  zuordnet.  $(a, \xi) = (-a, -\xi)$  bezeichne wieder eine Ebene des  $R_p$ . Man hat so

$$\Phi = \Phi(a, \xi) = \Phi(-a, -\xi)$$

als für alle reellen Zahlen  $a$  und alle Einheitsvektoren  $\xi$  erklärte Funktion anzunehmen.

Speziell ist das Integral von  $\Phi$  über eine Kugel vom Radius  $r$  um den Punkt  $x$  durch

$$(54) \quad r^{p-1} \int_{\Omega} \Phi(r + (\xi x), \xi) d\omega_{\xi}$$

gegeben, wo nach  $\xi$  über die Einheitskugel  $\Omega$  zu integrieren ist. Unter dem Punktmittelwert von  $\Phi$  in  $x$  hat man den Mittelwert von  $\Phi$  auf einer infinitesimalen Kugel um  $x$  zu verstehen, also

$$S(x) = \frac{1}{\omega_p} \int_{\Omega} \Phi((x\xi), \xi) d\omega_{\xi}.$$

Die zweite Radonsche Aufgabe besteht darin, diese Gleichung nach  $\Phi$  aufzulösen.

Die Aufgaben I und II haben auch duales Verhalten. Die Lösung von I erscheint eindeutig bestimmt, während es schwieriger ist, Bedingungen für ihre Existenz anzugeben; dagegen läßt sich leicht eine Lösung von II angeben, von der man nur nicht sicher ist, daß sie die einzige ist. Es werde der Einfachheit halber  $p$  als ungerade vorausgesetzt. Die folgenden Lösungsmethoden nach Radon, l. c. <sup>1)</sup>, S. 276–277.

I. Sei die Punktfunktion  $f(x)$  aus

$$(55) \quad \Phi(a, \xi) = \int_{(a, \xi)} f(\eta) d\omega_{\eta}$$

zu bestimmen.  $\frac{f(\eta)}{|\eta|}$  sei über den ganzen Raum  $R_p$ ,  $f(\eta)$  über jede Ebene absolut integrierbar; außerdem sei  $\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a, \xi) = 0$ .

Dann ist der Punktmittelwert von  $\Phi$  im Punkte  $x$

$$S(x) = \frac{1}{\omega_p} \int \Phi((x, \xi), \xi) d\omega_\xi = \frac{\omega_{p-1}}{\omega_p} \int_{R_p} \frac{f(\eta)}{\varrho} dv_\eta$$

$$(\varrho = |\eta - x|).$$

Es folgt

$$\Delta^{\frac{p-3}{2}} S(x) = \frac{(-1)^{\frac{p-3}{2}} (p-3)! \omega_{p-1}}{\omega_p} \int_{R_p} \frac{f(\eta)}{\varrho^{\frac{p-1}{2}}} dv_\eta.$$

$\Delta^{\frac{p-3}{2}} S$  ist so als Potential von Massen der Dichte  $f$  dargestellt. Nach der Poissonschen Gleichung für  $p$  Dimensionen folgt daraus eindeutig bestimmt:

$$(57) \quad f(x) = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{(p-2)! \omega_{p-1}} \Delta^{\frac{p-1}{2}} S(x)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{(p-2)! \omega_{p-1} \omega_p} \Delta^{\frac{p-1}{2}} \int \Phi((x, \xi), \xi) d\omega_\xi.$$

Diese Funktion  $f$  braucht aber keine Lösung von (55) zu sein.

II. Sei  $\Phi(a, \xi)$  aus

$$(58) \quad S(x) = \int_{\xi} \Phi((x, \xi), \xi) d\omega_\xi$$

gesucht. Eine Lösung  $\Phi$  dieser Gleichung erhält man, indem man sie als Ebenenintegral einer Punktfunktion  $f$  ansetzt:

$$\Phi(a, \xi) = \int_{(a, \xi)} f(\eta) d\omega_\eta.$$

Dann ergibt sich  $f$  aus der Formel (57) und es ist folglich

$$(59) \quad \Phi(a, \xi) = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{(p-2)! \omega_{p-1}} \int_{(a, \xi)} \Delta^{\frac{p-1}{2}} S(x) d\omega_x.$$

Dieser Ausdruck stellt unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen für  $S$  eine Lösung von (58) dar.

### § 7.

#### Zurückführung der Auflösung von (4) auf zwei Aufgaben.

Sei  $p$  wie im vorigen Paragraphen ungerade. Man kann die Auflösung von (4) auf das im § 5 behandelte Problem und eine der beiden Radonschen Aufgaben zurückführen. Dabei überträgt sich das verschiedene Verhalten der Radonschen Aufgaben auf die Auflösung von (4).

Fragt man nämlich zunächst nach einer Lösung  $f$  von (4), die die S. 513, Z. 1 und 2 v. u. angegebenen Regularitätsvoraussetzungen für  $f$  erfüllt, so kann man unter der Voraussetzung der Existenz eines solchen  $f$  es wie folgt bestimmen. Man setzt

$$(60) \quad \begin{aligned} \Phi(a, \xi) &= \int_{(a, \xi)} f(x) d\omega_x \\ \gamma(a, \xi) &= \int_{(a, \xi)} g(x) d\omega_x \end{aligned}$$

und integriert die Gleichung (4) über die Ebene  $(a, \xi)$  des  $x$ -Raumes. Dann folgt

$$(61) \quad \int_{-a(\xi)}^{+a(\xi)} \Phi(a+x, \xi) P(x, \xi) dx = \gamma(a, \xi).$$

Man hat also nur die nach Satz VII eindeutig bestimmte Lösung  $\Phi$  dieser Integralgleichung anzugeben, die für  $a \rightarrow \pm \infty$  verschwindet. (Bestimmung einer Lösung  $\Phi$  von (4), die nur von einer Variablen abhängt.) Schließlich  $f$  aus  $\Phi$  zu erhalten, ist die erste Radonsche Aufgabe, die durch (57) gelöst wird. Diese Lösung erscheint also eindeutig bestimmt, während ihre Existenz nicht feststeht.

Sei andererseits eine Lösung  $f(x)$  von (4) gesucht, die für  $x$  in  $V$  mit einer vorgegebenen Funktion  $h(x)$  übereinstimmt. Über  $g$  und  $h$  werden dieselben Voraussetzungen wie in § 4, S. 501, gemacht. Man setzt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\omega_p} \int \gamma((x, \xi), \xi) d\omega_\xi, \\ h(x) &= \frac{1}{\omega_p} \int \eta((x, \xi), \xi) d\omega_\xi. \end{aligned}$$

Die Bestimmung von Lösungen  $\gamma$  und  $\eta$  dieser Gleichungen ist die zweite Radonsche Aufgabe; man kann sie durch (59) lösen. Dann löst man die Gleichung

$$(62) \quad \begin{aligned} \gamma(x, \xi) &= \int_{-a(\xi)}^{+a(\xi)} \Phi(x+y, \xi) P(y, \xi) dy \quad (P \text{ durch (13) bzw. (15) definiert}) \\ &= \int_V \Phi(x+y, \xi) Q(\eta) dv_\eta, \end{aligned}$$

wobei noch

$$\Phi(x, \xi) = \eta(x, \xi)$$

für  $|x| \leq a(\xi)$  sein soll. Das ist die in § 5 behandelte Aufgabe. Im allgemeinen werden aber für diese Vorgaben  $\gamma$  und  $\eta$  nicht die Verträglichkeitsbedingungen (36) erfüllt sein. Genauer kann man nur eine Funktion  $\Phi$  bestimmen, für die statt (62) eine Gleichung der Form

$$\gamma(x, \xi) = \int_{-a(\xi)}^{+a(\xi)} \Phi(x+y, \xi) P(y, \xi) dy + R(y, \xi)$$

erfüllt ist, wo  $R$  ein Polynom in  $y$  vom Grade  $\leq \frac{p-1}{2}$  ist. Dann stellt

$$f(x) = \frac{1}{\omega_p} \int_{\Omega} \Phi((x\xi), \xi) d\omega_\xi$$

eine Lösung einer Gleichung

$$\int_V f(x+\eta) Q(\eta) dv_\eta = g(x) + T(x)$$

dar, wo  $T$  ein Polynom vom Grade  $\leq \frac{p-1}{2}$  in  $x_1, \dots, x_p$  ist und  $f(x) = h(x)$  für  $x$  in  $V$  gilt. Sind die Bedingungen (31) erfüllt, so muß noch  $T$  verschwinden, also  $f$  eine Lösung von (4) sein.

Damit ist also die Auflösung der vorgelegten Aufgabe auf die von (62) zurückgeführt, die sich durch Auflösung von Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art leisten läßt.

Zur Erläuterung der Methoden mag der folgende Spezialfall behandelt werden:

Gesucht ist eine Funktion  $f(x_1, x_2, x_3)$ , für die die Integrale über die Oberflächen aller Einheitskugeln des  $R_3$  verschwinden:

$$(63a) \quad \int_{\Omega} f(x+\eta) d\omega_\eta = 0,$$

und die für  $|x| \leq 1$  mit einer vorgegebenen einmal stetig differenzierbaren Funktion  $h(x)$  übereinstimmt:

$$(63b) \quad f(x) = h(x) \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Dabei sei die notwendige Bedingung

$$\int_{\Omega} h(\eta) d\omega_\eta = 0$$

erfüllt.

Es werde  $h(x) = 0$  für  $|x| > 1$  gesetzt. Zunächst werde noch angenommen, daß  $h$  und  $\frac{\partial h}{\partial n}$  auf der Einheitskugel  $\Omega$  um 0 bei Annäherung von innen her verschwinden und daß  $h$  in  $\Omega$  zweimal stetig differenzierbar ist.  $h$  ist dann auf  $\Omega$  noch mit seiner normalen Ableitung stetig, während die zweiten Ableitungen dort einen Sprung machen können.

Es ist dann nach (59)

$$h(a, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \eta((x\xi), \xi) d\omega_\xi$$

für

$$(64) \quad \eta(a, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(a, \xi)} \Delta h d\sigma$$

(diese Formel bleibt noch gültig, auch wenn sprunghafte Unstetigkeiten der zweiten Ableitungen vorhanden sind).  $\eta(a, \xi)$  ist stetig in  $a$  und verschwindet für  $|a| \geq 1$ . Man hat dann nach (51) in

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \eta(x - 2i\xi, \xi)$$

(die Summe ist nur scheinbar unendlich) eine Lösung der Gleichungen

$$O = \int_{-1}^{+1} \Phi(x + y, \xi) dy \quad \text{für alle } x,$$

$$\Phi(x, \xi) = \eta(x, \xi) \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi((x\xi), \xi) d\omega_{\xi}$$

eine Lösung von (63a), die für  $|x| \leq 1$  mit  $h(x)$  übereinstimmt.

Nun ist

$$(65) \quad f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \eta((x\xi) - 2i\xi, \xi) d\omega_{\xi}.$$

Nach (54) und (64) ist

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta((x\xi) - 2i\xi, \xi) d\omega_{\xi}$$

der Mittelwert der Ebenenintegrale von  $\Delta h$  über die Kugel vom Radius  $2|i|$  um den Punkt  $x$ . Für diesen Mittelwert findet man

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta((x\xi) - 2i\xi, \xi) d\omega_{\xi} = \frac{1}{2} \int \frac{\Delta h}{r} dv,$$

wo rechts über das Äußere der Kugel  $K_{2|i|}$  vom Radius  $2|i|$  um  $x$  zu integrieren ist. Es ist also dieses Integral nach der Greenschen Formel

$$= \begin{cases} -\frac{1}{4|i|} \int \frac{\partial h}{\partial r} d\sigma - \frac{1}{8i^2} \int \frac{h}{K_{2|i|}} d\sigma & \text{für } i \neq 0, \\ -2\pi h(x) & \text{für } i = 0. \end{cases}$$

Da nun  $h$  außerhalb der Einheitskugel  $\Omega$  um 0 verschwindet, sind diese Ausdrücke 0, so lange nicht die Kugel  $K_{2|i|}$  die Kugel  $\Omega$  trifft. Danach ist

$$\int_{\Omega} \eta((x\xi) - 2i\xi, \xi) d\omega_{\xi} = 0$$

außer für  $|i| = |x| - |\bar{x}|$ . Bezeichnet  $K_\mu$  die eine Kugel von geradzahligem Radius um  $x$ , die  $\Omega$  trifft, also die vom Radius  $\mu = |x| - |\bar{x}|$ , so ist für  $|x| > 1$  nach (65)

$$(66a) \quad f(x) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\bar{K}_\mu} \frac{\partial h}{\partial r} d\sigma + \frac{1}{4\pi\mu^3} \int_{\bar{K}_\mu} h d\sigma$$

und

$$(66b) \quad f(x) = h(x) \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

In dem Sonderfall, daß  $|x|$  eine ungerade ganze Zahl ist, kann man dem Zeichen  $|\bar{x}|$  irgendeinen der beiden Werte  $\pm 1$  zulegen, weil die Integrale dann in jedem Falle verschwinden.  $f(x)$  ist also auch stetig auf jeder Kugel von ungeradem Radius um 0 (auch auf  $\Omega$ , weil  $h(x)$  nach Voraussetzung dort verschwindet).

Wir haben so in (66) eine stetige Lösung von (63a, b) unter der Voraussetzung, daß  $h$  und  $\frac{\partial h}{\partial n}$  auf  $\Omega$  verschwinden. Setzt man nur voraus, daß  $h$  auf  $\Omega$  verschwindet und einmal stetig differenzierbar ist, so kann man  $h$  durch solche zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $h_\nu$  approximieren, für die  $h_\nu$  und  $\frac{\partial h_\nu}{\partial n}$  auf  $\Omega$  verschwindet und die mit ihren ersten Ableitungen unabhängig von  $\nu$  beschränkt sind; die  $h_\nu$  können dabei mit ihren ersten Ableitungen  $h$  in jedem inneren Teilgebiet von  $\Omega$  gleichmäßig approximieren.  $f_\nu(x)$  sei die aus  $h_\nu$  nach (66) gebildete Funktion. Dann konvergieren die  $f_\nu(x)$  gleichmäßig in jedem beschränkten Gebiet gegen eine Funktion  $f(x)$ , die stetig sein muß.  $f(x)$  muß dann (63) erfüllen. Die Formel (66) gibt also auch noch eine Lösung des Problems, wenn  $h$  nur einmal stetig differenzierbar ist und auf  $\Omega$  verschwindet.

Läßt man noch die Voraussetzung fallen, daß  $h$  auf  $\Omega$  verschwindet, so denken wir  $h$  approximiert durch die, wie folgt, definierten Funktionen  $h_\nu$ :

$$h_\nu(x) = \begin{cases} h(x) & \text{für } |x| \leq 1 - \frac{1}{\nu}, \\ \nu \cdot h\left(\frac{x}{|x|}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right) \cdot (1 - |x|) & \text{für } 1 - \frac{1}{\nu} \leq |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$h_\nu(x)$  fällt linear zu 0 ab zwischen der Kugel  $\Omega$ , vom Radius  $1 - \frac{1}{\nu}$  um 0 und der Kugel  $\Omega$ . Es bezeichne  $\bar{K}_{\mu,\nu}$  den Teil von  $\bar{K}_\mu$ , der innerhalb  $\Omega$ , liegt; dann wird nach (66)

$$f_\nu(x) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{\bar{K}_{\mu,\nu}} \frac{\partial h}{\partial r} d\sigma - \frac{1}{4\pi\mu^3} \int_{\bar{K}_{\mu,\nu}} h d\sigma \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\bar{K}_\mu - \bar{K}_{\mu,\nu}} \frac{\partial h_\nu}{\partial r} d\sigma + \frac{1}{4\pi\mu^3} \int_{\bar{K}_\mu - \bar{K}_{\mu,\nu}} h_\nu d\sigma.$$



Spaltet man in  $\bar{K}_\mu - \bar{K}_{\mu,\nu}$   $\frac{\partial h}{\partial r}$  in eine Ableitung normal und eine tangential zu  $\Omega$  auf, so ist die letztere gegenüber der ersteren für große  $\nu$  zu vernachlässigen:

$$\frac{\partial h}{\partial r} \sim -\nu h \left( \frac{x}{|x|} \left( 1 - \frac{1}{\nu} \right) \right).$$

Es kommt so

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\bar{K}_\mu - \bar{K}_{\mu,\nu}} \frac{\partial h}{\partial r} d\sigma = -\frac{1}{\sin \varphi} \int_L h(x) ds,$$

wenn  $L$  die Schnittkurve zwischen  $\Omega$  und  $K_\mu$  ist und  $\varphi$  der Winkel, unter dem sich die beiden Kugeln schneiden. Danach konvergieren die  $f_\nu(x)$  gegen

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{1}{4\pi\mu} \int_{\bar{K}_\mu} \frac{\partial h}{\partial r} d\sigma + \frac{1}{4\pi\mu^3} \int_{\bar{K}_\mu} h d\sigma \\ \quad - \frac{1}{4\pi\mu \sin \varphi} \int_L h(x) ds & \text{für } |x| > 1, \\ h(x) & \text{für } |x| < 1, \end{cases}$$

und zwar gleichmäßig in jeder Kugelschale

$$2i-1 \leq |x| \leq 2i+1.$$

$f(x)$  ist dann eine stückweise stetige Funktion mit Sprungstellen an den Kugeln von ungeradem Radius um 0.  $f$  ist eine Lösung von (63a), (63b).

Durch Zurückführung auf die erste Radonsche Aufgabe kann man folgendes Problem lösen: Diejenige Lösung  $f(x)$  (wenn es eine solche gibt) von

$$(67) \quad \int_S f(x+\eta) d\omega_\eta = g(x)$$

zu bestimmen, die im Unendlichen die S. 513 für  $f$  angegebenen Eigenschaften hat.

Nach dem S. 515 angegebenen Rezept hat man, wenn  $\gamma$  und  $\Phi$  durch (60) definiert sind, die Relation (61), die sich hier

$$2\pi \int_{-1}^{+1} \Phi(a+y, \xi) dy = \gamma(a, \xi)$$

schreibt; da für die Lösung  $\Phi(a, \xi)$  dieser Gleichung  $\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a, \xi) = 0$  sein soll, so folgt nach (52) eindeutig

$$\Phi(a, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma'(a+2i-1, \xi).$$

Man hat dann nur noch  $f$  aus den Ebenenintegralen  $\Phi$  zu bestimmen. Diese Aufgabe kann nur eine Lösung  $f$  mit dem angegebenen Verhalten haben:

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta \int_{\Omega} \Phi((x\xi), \xi) d\omega_{\xi}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \gamma'((x\xi) + 2i - 1, \xi) d\omega_{\xi} &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{d\rho} \int_{\Omega} \gamma((x\xi) + \rho, \xi) d\omega_{\xi} \right)_{\rho=2i-1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\rho} \int_{\bar{K}_{2i-1}} \frac{g}{r} dv \right)_{\rho=2i-1} \end{aligned}$$

(wo das Integral über das Äußere der Kugel  $K_{\rho}$  vom Radius  $\rho$  um den Punkt  $x$  zu erstrecken ist)

$$= \frac{1}{2(2i-1)} \int_{\bar{K}_{2i-1}} g d\sigma.$$

Also folgt als gesuchte Lösung

$$(68) \quad f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} \int_{\bar{K}_{2i-1}} \Delta g d\sigma.$$

Für die Existenz einer solchen Lösung  $f$  mit dem angegebenen Verhalten ist nach (53) notwendig, daß

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma'(x + 2i - 1, \xi) = 0$$

für alle  $x$  gilt; also nach Definition von  $\gamma$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{da} \int_{(a+2i-1, t)} g(x) d\sigma_t = 0$$

für alle  $a, \xi$ .

(Eingegangen am 1. 9. 1933.)

## Sätze über Scharen von Flächen zweiter Ordnung.

Von

Ólafur Danielsson in Reykjavík (Island).

In der vorliegenden kleinen Arbeit sollen folgende Sätze bewiesen werden:

1. *Alle Schnittkurven der Flächen einer gewöhnlichen Schar von Flächen zweiter Ordnung haben dasselbe Doppelverhältnis<sup>1)</sup>.* Zum Beispiel haben die Krümmungskurven einer Schar konfokaler Flächen ein bestimmtes Doppelverhältnis, die „Krümmungszahl“ der Flächenschar.

2. Dieses Doppelverhältnis ist gleich dem Doppelverhältnis des tetraedralen Strahlenkomplexes [Reyekomplexes<sup>2)</sup>], zu dem die Erzeugenden der einzelnen Flächen der Schar gehören.

Es sei  $\Sigma$  eine Schar von Flächen zweiter Ordnung, d. h. ein System von Flächen, die von acht beliebigen, reellen oder imaginären Ebenen berührt werden. Es wird vorausgesetzt, daß die Ebenen keine in bezug aufeinander in projektiver Hinsicht spezielle Lage einnehmen. Weiter seien  $\varphi$  und  $\varphi_1$  zwei der Schar  $\Sigma$  angehörige Flächen, und  $k$  ihre Schnittkurve. Die übrigen Flächen von  $\Sigma$  schneiden dann die festgelegte Fläche  $\varphi$  in einem einfach unendlichen System von Kurven vierter Ordnung, erster Art, wozu  $k$  gehört. Das Doppelverhältnis dieser Kurven, d. h. das Doppelverhältnis der vier Berührungsebenen jeder einzelnen Kurve, die durch eine Doppelsekante derselben gelegt werden können, muß dann eine algebraische Funktion des Parameters von  $\Sigma$  sein. Diese Funktion kann aber den Wert 0 nicht annehmen. Denn in diesem Falle müßte die betreffende Kurve einen Doppelpunkt haben, und in diesem Punkte müßten zwei, und folglich sämtliche Flächen von  $\Sigma$  einander berühren. Dies ist aber nicht mit dem allgemeinen Charakter der Schar

<sup>1)</sup> Über das Doppelverhältnis einer Raumkurve vierter Ordnung, erster Art, siehe z. B. Math. Ens. Bd. III, 2, Artikel Staude, Nr. 116.

<sup>2)</sup> Th. Reye, Die Geometrie der Lage, Leipzig 1892, dritte Abteilung. Erster Vortrag.

vereinbar, das Doppelverhältnis kann daher nicht 0 werden<sup>3)</sup> und muß somit eine Konstante sein. Der Satz kann auch auf die folgende Weise bewiesen werden: Als Doppelsekante zur Bestimmung des Doppelverhältnisses der Kurve  $k$  wähle man eine Erzeugende der Fläche  $\varphi$ . Die vier Ebenen, welche die Kurve berühren, haben das gleiche Doppelverhältnis wie die vier in ihnen liegenden Erzeugenden der zweiten Schar, welche die Kurve berühren. Diese vier Erzeugenden liegen auf  $\varphi$  und berühren  $\varphi_1$ , also berühren sie alle Flächen der Schar  $(\varphi, \varphi_1)$ , also ist das Doppelverhältnis von der speziellen Wahl von  $\varphi_1$  unabhängig<sup>4)</sup>. Legt man nun aber die Fläche  $\varphi_1$  fest, so haben ihre Schnittkurven mit den übrigen Flächen von  $\Sigma$  ein konstantes Doppelverhältnis. Zu diesen gehört aber die Kurve  $k$ , und alle Schnittkurven der Flächen haben somit dasselbe Doppelverhältnis, und Satz 1 ist bewiesen.

Die Kurve  $k$  berührt acht Erzeugende der Fläche  $\varphi$ , von jeder Regelschar vier. Das Doppelverhältnis der Kurve ist, wie oben erwähnt, gleich dem Doppelverhältnis dieser vier Erzeugenden. Nun gibt es unter den Flächen von  $\Sigma$  vier, welche aus Doppelebenen bestehen, die von Kegelschnitten begrenzt sind. Das Doppelverhältnis des Kurvensystems muß daher gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte sein, worin diese Kegelschnitte eine beliebige Fläche des Systems schneiden. Ist nun die Schar ein System konfokaler Flächen, so läßt sich dieses Doppelverhältnis leicht berechnen, weil es nämlich in diesem Falle gleich dem Doppelverhältnis der Nabelpunkte einer Symmetrieebene ist. Der Wert des Doppelverhältnisses ist dann  $\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}$ , wo  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Halbachsen der betreffenden Fläche sind. Dies ist also das Doppelverhältnis jeder Krümmungskurve der Fläche, und auch das Doppelverhältnis jeder Krümmungskurve einer mit der ersten konfokalen Fläche. Man könnte es das „Krümmungsverhältnis“ oder die „Krümmungszahl“ des Flächensystems nennen.

<sup>3)</sup> Die Spezialfälle, in denen die Fläche  $\varphi_1$  in eine von einem Kegelschnitt  $h$  begrenzte Doppelsebene übergeht, spielen in dieser Beziehung keine besondere Rolle, indem das betreffende Doppelverhältnis dem Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Kurve  $h$  und der Fläche  $\varphi$  gleich ist. Von diesen Schnittpunkten fallen keine zwei zusammen, da die Kurve  $h$  die Fläche  $\varphi$  im allgemeinen nicht berührt. Wenn der Parameterwert der Fläche  $\varphi_1$  sich dem der Fläche  $\varphi$  annähert, nähert sich die Schnittpunkte  $k$  einer Grenzkurve  $k'$ . Diese Kurve hat keinen Doppelpunkt, denn wenn zwei unendlich benachbarte Flächen einer allgemeinen Schar einander berührten, müßten auch zwei unendlich benachbarte Flächen des reziproken Gebildes — eines allgemeinen Büschels — einander berühren, was unmöglich ist.

<sup>4)</sup> Dieser letztere Beweis ist von Prof. B. L. van der Waerden gefunden und mir durch Prof. O. Blumenthal freundlichst mitgeteilt worden.

Es seien nunmehr  $\varphi$  und  $\varphi_1$  zwei Flächen zweiter Ordnung,  $k$  ihre Schnittkurve und  $ABCD$  das in bezug auf beide Flächen selbstkonjugierte Tetraeder. Weiter sei  $t$  eine Tangente der Kurve  $k$ . Durch die Kurve  $k$  gehen dann vier Kegelflächen zweiter Ordnung, deren Spitzen die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  sind. Die vier Berührungsebenen der Kurve  $k$ , welche durch  $t$  gelegt werden können, enthalten dann je einen der Punkte  $A, B, C$  und  $D$ . Das Doppelverhältnis der Kurve  $k$  ist somit dem Doppelverhältnis dieser Ebenen gleich. Dies ist aber gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, worin  $t$  die Seitenflächen des Tetraeders  $ABCD$  schneidet. Dieses Doppelverhältnis kann auf folgende Weise analytisch bestimmt werden: Die Gleichungen von  $\varphi$  und  $\varphi_1$ , auf das selbstkonjugierte Tetraeder bezogen, seien

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{w^2}{d} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} + \frac{z^2}{c_1} + \frac{w^2}{d_1} = 0.$$

Durch geeignete Wahl des Einheitspunktes kann man so über die Konstanten verfügen, daß sie drei voneinander unabhängige Gleichungen befriedigen, etwa die folgenden:

$$a_1 - a = b_1 - b = c_1 - c = d_1 - d.$$

Setzt man diese Differenzen gleich  $\lambda$ , so hat man die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{w^2}{d} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} + \frac{w^2}{d+\lambda} = 0,$$

und durch Variation von  $\lambda$  erhält man dann eine Schar von Flächen zweiter Ordnung. Es sei  $x_1 y_1 z_1 w_1$  ein Punkt der Schnittkurve der Flächen  $\varphi$  und  $\varphi_1$ . Die Gleichungen der Kurventangente im Punkte  $x_1 y_1 z_1 w_1$  sind dann

$$\frac{x x_1}{a} + \frac{y y_1}{b} + \frac{z z_1}{c} + \frac{w w_1}{d} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x x_1}{a+\lambda} + \frac{y y_1}{b+\lambda} + \frac{z z_1}{c+\lambda} + \frac{w w_1}{d+\lambda} = 0,$$

und die Tangente schneidet die Koordinatenebenen in Punkten, für welche das Verhältnis  $\frac{z}{w}$  die Werte

$$\frac{w_1 \left( \frac{1}{b(d+\lambda)} - \frac{1}{d(b+\lambda)} \right)}{z_1 \left( \frac{1}{b(c+\lambda)} - \frac{1}{c(b+\lambda)} \right)}, \quad \frac{w_1 \left( \frac{1}{a(d+\lambda)} - \frac{1}{d(a+\lambda)} \right)}{z_1 \left( \frac{1}{a(c+\lambda)} - \frac{1}{c(a+\lambda)} \right)}, \quad 0 \quad \text{und} \quad \infty$$

annimmt. Das Doppelverhältnis der Schnittpunkte ist gleich dem Verhältnis der zwei ersten Ausdrücke. Dieses ist aber

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

also von  $\lambda$  unabhängig und stellt somit das konstante Doppelverhältnis des Systems dar.

Die Tangenten der Schnittkurven der Flächen einer gewöhnlichen Schar bilden einen dreifach unendlichen „tetraedralen“ Strahlenkomplex (einen Reyekomplex). Dies ist von den konfokalen Flächen leicht einzusehen, indem in diesem Falle die Tangenten der Krümmungskurven mit den Normalen der Flächen identisch sind. Der tetraedrale Strahlenkomplex zweiten Grades besteht dann — von den singulären Strahlen abgesehen — *nur* aus den Tangenten der Schnittkurven einer einzigen einparametrischen Schar von Flächen zweiter Ordnung, und jeder nicht-singuläre Strahl des Komplexes berührt genau eine solche Kurve.

Reykjavík, im Juni 1933.

(Eingegangen am 19. 8. 1933.)

# Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3.

Von

N. Brusclinsky in Moskau.

Einige der Homologie-Invarianten eines kompakten metrischen Raumes lassen sich, wie neuerdings gezeigt worden ist, durch Eigenschaften stetiger Abbildungen des Raumes charakterisieren: eine  $n$ -dimensionale kompakte Menge läßt sich dann und nur dann wesentlich auf die  $n$ -dimensionale Sphäre abbilden, wenn sie einen nicht berandenden  $n$ -dimensionalen Zyklus enthält<sup>1)</sup>; die Anzahl der Abbildungsklassen eines  $n$ -dimensionalen Polyeders auf die  $n$ -dimensionale Sphäre ist unendlich, falls die  $n$ -te Bettische Zahl nicht Null ist, anderenfalls ist die Klassenanzahl gleich der Ordnung der  $(n - 1)$ -ten Torsionsgruppe<sup>2)</sup>. Beide Sätze gestatten somit, das Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser Bettischer Zahlen sowie die Ordnung gewisser Homologiegruppen aus Abbildungseigenschaften abzulesen. Es erhebt sich die Aufgabe, darüber hinaus auch den Wert Bettischer Zahlen und die Struktur von Bettischen und Torsionsgruppen in ähnlicher Weise zu charakterisieren.

Diese Aufgabe wird im folgenden für einige Spezialfälle gelöst, und zwar für: *die erste Bettische Gruppe*<sup>3)</sup> eines beliebigen kompakten metrischen Raumes; *die dritte Bettische Gruppe eines dreidimensionalen kompakten Raumes*; *die zweite Torsionsgruppe eines dreidimensionalen Polyeders*. Die Möglichkeit dieser gruppentheoretischen Untersuchung beruht auf der Tatsache, daß die Sphären  $S^1$  und  $S^3$  als *Gruppenräume* auftreten<sup>4)</sup>.

1.  $M$  sei eine geschlossene Mannigfaltigkeit, deren Punkte eine stetige Gruppe bilden; diese Gruppe bezeichnen wir ebenfalls mit  $M$ . Es sei  $F$

<sup>1)</sup> Alexandroff, Dimensionstheorie. Math. Annalen 106 (1932), 5. Hauptsatz.

<sup>2)</sup> H. Hopf, Die Klassen der Abbildungen der  $n$ -dimensionalen Polyeder auf die  $n$ -dimensionale Sphäre, Comm. math. Helv. 5 (1932), Satz III.

<sup>3)</sup> Unter der Bettischen Gruppe eines Raumes  $F$  verstehen wir hier die duale Gruppe zur  $r$ -dimensionalen Zyklisis von L. Pontrjagin, Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, Math. Annalen 105 (1931), insbesondere S. 198. Für einen Komplex stimmt diese Gruppe mit der freien oder reduzierten Bettischen Gruppe überein (vgl. Pontrjagin, a. a. O., S. 168–169).

<sup>4)</sup> Wir bemerken andererseits, daß in den von uns betrachteten Spezialfällen die Untersuchung der Menge aller Abbildungsklassen von  $F$  auf  $M$  auf das Studium der Homologie-Eigenschaften von  $F$  zurückgeführt wird.



ein beliebiger kompakter metrischer Raum. Sind  $f$  und  $g$  zwei eindeutige und stetige Abbildungen von  $F$  in  $M$ , so wird durch  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ , wobei  $x$  die Punkte von  $F$  durchläuft und die Multiplikation die Gruppenoperation in  $M$  ist, ebenfalls eine eindeutige und stetige Abbildung von  $F$  in  $M$  erklärt; man erkennt ohne Mühe, daß die Abbildungen von  $F$  in  $M$  bezüglich dieser Multiplikation selbst eine Gruppe  $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}_M^*(F)$  bilden; das Einheitsselement  $e$  von  $\mathfrak{G}^*$  ist diejenige Abbildung, die den Raum  $F$  auf den Einheitspunkt von  $M$  abbildet. Ferner verifiziert man leicht: diejenigen Abbildungen, die zu derselben Abbildungsklasse wie  $e$  gehören, bilden einen Normalteiler  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{G}^*$ ; und: zwei Abbildungen  $f$  und  $g$  gehören dann und nur dann zu derselben Restklasse in bezug auf  $\mathfrak{E}$ , also zu demselben Element der Faktorgruppe  $\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{E}}$ , wenn sie zu einer Abbildungsklasse gehören. Daher dürfen wir sagen: die Abbildungsklassen von  $F$  in  $M$  bilden eine — mit  $\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{E}}$  isomorphe — Gruppe  $\mathfrak{G}_M(F)$ . Ihr Einheitsselement ist die Klasse  $\mathfrak{E}$  der auf einen Punkt zusammenziehbaren Abbildungen.

Wir werden in dieser Arbeit unter  $M$  entweder die Kreislinie  $S^1$ , aufgefaßt als Gruppe ihrer Drehungen, oder die dreidimensionale Sphäre  $S^3$ , aufgefaßt als die von den Quaternionen des Betrages 1 gebildete multiplikative Gruppe (also eine Untergruppe der Drehungen der  $S^3$ ), verstehen; die Gruppen  $\mathfrak{G}_{S^1}(F)$  und  $\mathfrak{G}_{S^3}(F)$  sind nach dem Vorstehenden für alle Räume  $F$  erklärt.

Verstehen wir unter  $\mathfrak{B}^r(F)$  die  $r$ -te Bettische Gruppe von  $F^3$ , unter  $\mathfrak{T}^r(K)$  die  $r$ -te Torsionsgruppe des Komplexes  $K$ , so werden wir die folgenden Sätze beweisen:

**Satz I:** Für jeden kompakten metrischen Raum  $F$  sind die Gruppen  $\mathfrak{B}^1(F)$  und  $\mathfrak{G}_{S^1}(F)$  einander isomorph.

**Satz II:** Für jeden dreidimensionalen kompakten metrischen Raum  $F^3$  ist die Gruppe  $\mathfrak{B}^3(F^3)$  mit der Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}_{S^3}(F^3)$  nach der von den Elementen endlicher Ordnung gebildeten Untergruppe  $U_{S^3}(F^3)$  isomorph<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> Die Gruppe  $G_{S^3}(F^3)$  ist kommutativ. Im Falle, wenn  $F^3$  ein Komplex ist, folgt dies aus dem Satze II<sub>1</sub>. Für den allgemeinen Fall ergibt sich die Behauptung aus dem Satz III unter Berücksichtigung der offensichtlichen Tatsache, daß die Limesgruppe einer direkten Homomorphismenfolge  $\mathfrak{F}(G_n, \omega)$  kommutativ ist, wenn die Gruppen  $G_n$  kommutativ sind. Deswegen bildet die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von  $G_{S^3}(F^3)$  die Untergruppe  $U_{S^3}(F^3)$  von  $G_{S^3}(F^3)$ .

Da die Gruppen  $G_{S^1}(F)$  und  $G_{S^3}(F^3)$  kommutativ sind, so werden wir im folgenden diese Gruppen additiv schreiben.

Unter den Sätzen  $I_K$  und  $II_K$  werden wir die Sätze I und II verstehen, wenn man in ihnen  $F$  durch einen beliebigen Komplex  $K$ , bzw.  $F^3$  durch einen dreidimensionalen Komplex  $K^3$  ersetzt. Dann ist Satz  $II_K$  in dem folgenden schärferen Satz enthalten:

Satz  $II'_K$ : Für jeden dreidimensionalen Komplex  $K^3$  ist  $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$  mit der direkten Summe  $\mathfrak{B}^3(K^3) + \mathfrak{T}^3(K^3)$  isomorph.

Wir werden zunächst die Sätze  $I_K$  und  $II'_K$  und dann durch Grenzübergang die Sätze I und II beweisen<sup>\*)</sup>.

2. Beweis des Satzes  $I_K$ : Unter einem „Charakter“ einer Gruppe  $\mathfrak{A}$  verstehen wir eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{A}$  in die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Sind  $\chi_1, \chi_2$  zwei Charaktere, so wird durch  $\chi(y) = \chi_1(y) + \chi_2(y)$ , für jedes  $y \in \mathfrak{A}$ , ein neuer Charakter  $\chi$  erklärt. Offenbar bilden die Charaktere bezüglich dieser Addition eine Gruppe, die wir  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  nennen. Ist die Gruppe  $\mathfrak{A}$  — die wir uns additiv geschrieben denken — direkte Summe:  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n$ , so ist offenbar  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_1) + \dots + \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_n)$ ; ist  $\mathfrak{A}_i$  ein unendlicher Zyklus, so ist auch  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}_i)$  ein unendlicher Zyklus, da man einen Charakter von  $\mathfrak{A}_i$  durch willkürliche Festsetzung seines Wertes für das erzeugende Element von  $\mathfrak{A}_i$  festlegt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt: ist  $\mathfrak{A}$  direkte Summe endlich vieler unendlicher Zyklen, so ist  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{A}$ .

Dies gilt insbesondere, wenn wir für  $\mathfrak{A}$  die Bettische Gruppe  $\mathfrak{B}^1(K)$  nehmen. Daher wird der Satz  $I_K$  bewiesen sein, wenn wir die Isomorphie der Gruppen  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  und  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$  bewiesen haben werden.

Eine Abbildung  $f$  von  $K$  in  $S^1$  bildet zwei eindimensionale Zyklen, die zu derselben Homologie-Klasse, also zu denselben Elementen von  $\mathfrak{B}^1(K)$  gehören, mit dem gleichen Grade ab; der Grad, mit dem die Summe zweier Zyklen abgebildet wird, ist gleich der Summe der Grade, mit denen die beiden Zyklen abgebildet werden; folglich bewirkt  $f$  einen Charakter von  $\mathfrak{B}^1(K)$ . Gehören  $f$  und  $g$  zu einer Klasse, so bewirken sie denselben Charakter. Mithin ist jeder Abbildungsklasse  $\mathfrak{F}$ , also jedem Element von  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ , ein Charakter  $\chi$  von  $\mathfrak{B}^1(K)$ , also ein Element von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ , eindeutig durch die Bestimmung zugeordnet: Ist  $3$  ein Element von  $\mathfrak{B}^1(K)$ , so ist  $\chi \mathfrak{F}(3)$  der Grad, mit welchem die in  $3$  enthaltenen Zyklen durch die zu  $\mathfrak{F}$  gehörigen Abbildungen abgebildet werden.

<sup>\*)</sup> Man zeigt leicht: Ist die Gruppe  $M$  direktes Produkt von  $M_1$  und  $M_2$ , so ist  $G_M(F)$  direktes Produkt von  $G_{M_1}(F)$  und  $G_{M_2}(F)$ . Infolgedessen gestatten die obigen Sätze, z. B.  $G_{T^n}(F)$  durch  $B(F)$  auszudrücken, wenn  $T^n$  der  $n$ -dimensionale Torus ist (in bekannter Weise als Gruppe aufgefaßt).

Wir werden nun zeigen, daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist; dann wird der Satz  $I_K$  bewiesen sein. Dreierlei ist zu beweisen: a) die Zuordnung ist ein Homomorphismus; b) nur das Einheitsselement  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  — also die Klasse der auf einen Punkt zusammenziehbaren Abbildungen — wird auf das Nullelement von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$  abgebildet (d. h. der Homomorphismus ist eineindeutig); c) jedes Element von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ , also jeder Charakter von  $\mathfrak{B}^1(K)$ , ist einem Element von  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  zugeordnet.

Beweis von a):  $f$  und  $g$  seien zwei Abbildungen von  $K$  in  $S^1$ ,  $z$  sei ein eindimensionaler Zyklus in  $K$ ,  $a$  und  $b$  seien die Grade, mit denen  $z$  durch  $f$  bzw.  $g$  abgebildet wird; zu zeigen ist:  $z$  wird durch  $f \cdot g$  — diese Produktbildung ist in Nr. 1 erklärt — mit dem Grade  $a + b$  abgebildet. Dabei kann man sich auf solche  $z$  beschränken, die eine Homologiebasis in  $K$  bilden, und als solche kann man einfach geschlossene, einmal durchlaufene Polygone wählen. Für ein solches  $z$  sind  $2\pi a$  und  $2\pi b$  die Änderungen, die die Winkelargumente  $\varphi_f(x)$ ,  $\varphi_g(x)$  der Bildpunkte  $f(x)$  bzw.  $g(x)$  erleiden, während der Punkt  $x$  das Polygon  $z$  durchläuft. Nun ist aber, nach Definition der Drehungsgruppe von  $S$ ,  $\varphi_f(x) + \varphi_g(x)$  das Winkelargument von  $f \cdot g(x)$ ; die Änderung dieses Arguments ist daher  $2\pi(a + b)$ , w. z. b. w.

Beweis von b): Daß der Klasse, welche die Abbildung  $f$  enthält, das Nullelement von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$  zugeordnet ist, bedeutet, daß  $f$  jeden eindimensionalen Zyklus von  $K$  mit dem Grade 0 abbildet, daß  $f$  also „algebraisch unwesentlich“ ist; dann ist  $f$  auch „topologisch unwesentlich“, läßt sich also auf einen Punkt zusammenziehen<sup>7)</sup>; d. h. die Klasse von  $f$  ist das Einheitsselement  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ .

Beweis von c): Zu zeigen ist: Bilden die Zyklen  $z_1, z_2, \dots, z_p$  von  $K$  eine Basis in  $\mathfrak{B}^1(K)$ , und sind  $a_1, a_2, \dots, a_p$  willkürlich gegebene ganze Zahlen, so gibt es eine Abbildung von  $K$  in  $S^1$ , durch welche die  $z_i$  mit den Graden  $a_i$  abgebildet werden ( $i = 1, 2, \dots, p$ ). Dabei kann man die  $z_i$  wieder als einfach durchlaufene, einfach geschlossene Polygone annehmen; verstehen wir unter  $K^1$  den von diesen Polygonen gebildeten Komplex, so ist es zunächst leicht, eine Abbildung  $f$  von  $K^1$  in  $S^1$  zu konstruieren, bei der jedes  $z_i$  gerade den Grad  $a_i$  erhält. Sodann verstehen wir unter  $K^2$  den Komplex, der von allen höchstens zweidimensionalen Simplex von  $K$  gebildet wird; da der Teilkomplex  $K^1$  von  $K^2$ , auf dem  $f$  bereits erklärt ist, keinen eindimensionalen Zyklus enthält, der in  $K^2$  berandet, läßt sich  $f$  nach einem allgemeineren Satz<sup>8)</sup> zu einer

<sup>7)</sup> H. Hopf, Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen 104 (1931), Satz V.

<sup>8)</sup> A. a. O. <sup>2)</sup>, Satz II.

Abbildung von  $K^3$  in  $S^1$  erweitern. Um nun schließlich die Abbildung  $f(K^3)$  zu einer Abbildung  $f(K)$  zu erweitern, hat man endlich oft die folgende Aufgabe zu lösen: Es sei  $r \geq 2$ ; auf der Randsphäre  $\bar{S}^r$  des  $(r+1)$ -dimensionalen Simplex  $T^{r+1}$  sei eine Abbildung  $f$  in die Kreislinie  $S^1$  erklärt; man soll  $f$  zu einer Abbildung  $f(T^{r+1})$  in  $S^1$  erweitern. Diese Aufgabe, die damit identisch ist,  $f(\bar{S}^r)$  stetig so abzuändern, daß das Bild ein einziger Punkt von  $S^1$  wird, ist auf Grund des einfachen Zusammenhanges von  $\bar{S}^r$  ( $r \geq 2$ ) lösbar<sup>9)</sup>.

3. Beweis des Satzes  $\Pi_K'$ : Neben den „ganzzahligen“ Charakteren, die in dem vorigen Beweis auftraten, betrachten wir jetzt noch „zyklische“ Charaktere einer Gruppe  $\mathfrak{A}$ , d. h. homomorphe Abbildungen von  $\mathfrak{A}$  in die mod 1 reduzierte additive Gruppe der rationalen Zahlen. Auch sie bilden eine Gruppe; wir nennen sie  $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A})$ . Auch für sie gilt: ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_n$ , so ist  $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_1) + \dots + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_n)$ ; ferner: ist  $\mathfrak{A}_i$  eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ , so ist auch  $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_i)$  eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung  $m$ ; denn ein zyklischer Charakter von  $\mathfrak{A}_i$  wird dadurch eindeutig festgelegt, daß man einem erzeugenden Element von  $\mathfrak{A}_i$  eine willkürliche der Restklassen mod 1 zuordnet, die die Zahlen  $\frac{k}{m}$  mit  $k = 1, 2, \dots, m$  enthalten. Aus den beiden genannten Sätzen folgt, da jede endliche Abelsche Gruppe direkte Summe endlicher Zyklen ist:  $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{A}$  für jede endliche Abelsche Gruppe  $\mathfrak{A}$ .

Hieraus und aus der am Anfang des vorigen Beweises festgestellten Tatsache folgt:  $\mathfrak{B}^3(K) + \mathfrak{T}^3(K) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3(K)) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^3(K))$ , und um den Satz  $\Pi_K'$  zu beweisen, haben wir zu zeigen:

$$\mathfrak{G}_{S^1}(K^3) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3(K^3)) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^3(K^3))^{10)}.$$

Nun bewirkt erstens, analog wie in dem im vorigen Beweis behandelten Falle, jede Abbildungsklasse  $\mathfrak{F}$  von  $K^3$  in  $S^3$  einen ganzzahligen Charakter  $\chi_{\mathfrak{B}}$  der Gruppe  $\mathfrak{B}^3$ , indem man jeder Homologieklassse von  $\mathfrak{B}^3$  den Grad zuordnet, mit dem die in ihr enthaltenen Zyklen durch die Abbildungen aus  $\mathfrak{F}$  abgebildet werden. Zweitens bewirkt  $\mathfrak{F}$  einen zyklischen Charakter  $\zeta_{\mathfrak{T}}$  der Gruppe  $\mathfrak{T}^3$  durch die folgende Festsetzung<sup>11)</sup>: man stelle die Gruppe  $\mathfrak{Q}^3$  der dreidimensionalen algebraischen Komplexe von  $K^3$  als direkte Summe  $\mathfrak{Q}^3 = \mathfrak{Z}^3 + \mathfrak{B}^3$  dar, wobei  $\mathfrak{Z}^3$  die — mit  $\mathfrak{B}^3$  isomorphe — Gruppe der Zyklen ist; ist dann  $X$  ein Element von  $\mathfrak{T}^3$ , so gibt es in  $\mathfrak{B}^3$  einen Zyklus mod  $m$   $v_m^3$ , dessen durch  $m$  geteilter Rand  $\frac{1}{m} v_m^3 \subset X$  ist; der Grad

<sup>9)</sup> A. a. O. <sup>7)</sup>, Beweis des Satzes Va.

<sup>10)</sup> Der Kürze halber lassen wir im weiteren Verlauf des Beweises das Argument  $K^3$  in den Gruppen weg.

<sup>11)</sup> A. a. O. <sup>2)</sup>, § 6.

mod  $m$ , mit dem  $v_m^2$  abgebildet wird, ist  $\equiv m \cdot \zeta_3(X) \bmod m$ . Somit ist jeder Abbildungsklasse, d. h. jedem Element von  $\mathfrak{G}_S$ , ein Element der Gruppe  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^3)$  in eindeutiger Weise zugeordnet. Wir haben zu zeigen, daß dies ein Isomorphismus ist.

Nun ist bereits bekannt, daß diese Zuordnung die Elemente von  $\mathfrak{G}_S$ , also die Abbildungsklassen, und die Elemente von  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^3)$  einander eineindeutig zuordnet<sup>11)</sup>; zu beweisen bleibt: es handelt sich um eine *homomorphe* Abbildung von  $\mathfrak{G}_S$  in  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^3)$ . Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit der folgenden: ist  $z$  ein dreidimensionaler Zyklus oder Zyklus mod  $m$  aus  $K^3$ , und sind  $f$  und  $g$  zwei Abbildungen von  $K^3$  in  $S^3$ , die  $z$  mit den Graden, bzw. Graden mod  $m$ ,  $a$  und  $b$  abbilden, so wird  $z$  durch  $f \cdot g$  — im Sinne der in Nr. 1 erklärten Multiplikation verstanden — mit dem Grade (bzw. Grade mod  $m$ )  $a + b$  abgebildet.

Für den Beweis dürfen wir  $f$  und  $g$  durch Abbildungen aus denselben Abbildungsklassen ersetzen. Daher können wir von vornherein annehmen, daß  $f$  und  $g$  simplizial sind, und daß ihnen dieselben Simplizialzerlegungen von  $K^3$  und  $S^3$  zugrunde liegen. Wir werden sie noch einmal durch Abbildungen  $f', g'$  derselben Klassen ersetzen.

$E$  sei der Einheitspunkt des Gruppenraumes  $S^3$ . Es seien  $x_i^3$  die dreidimensionalen Simplexe von  $K^3$  ( $i = 1, 2, \dots$ );  $S^3$  sowohl wie die  $x_i^3$  seien mit festen Orientierungen versehen. Für jedes  $i$  sei  $h_i^+$  eine Abbildung von  $x_i^3$ , die den Rand von  $x_i^3$  auf den Punkt  $E$ , das Innere von  $x_i^3$  ein-eindeutig mit dem Grade  $+1$  auf  $S^3 - E$  abbildet; daneben werden wir noch die Abbildung  $h_i^-$  betrachten, die durch  $h_i^-(p) = (h_i^+(p))^{-1}$  — im Sinne der Gruppenoperation von  $S^3$  — für alle Punkte  $p \in x_i^3$  erklärt ist, sowie die Abbildung  $h_i^0$ , die das ganze Simplex  $x_i^3$  auf den Punkt  $E$  abbildet.  $h_i^-$  bildet  $x_i^3$  mit dem Grade  $-1$  ab<sup>12)</sup>. Nun sei  $y_i^3$  ein Simplex von  $S^3$ , das  $E$  nicht enthält, aus der den simplizialen Abbildungen zugrunde liegenden Zerlegung von  $S^3$ .

Für jedes  $i$  ist entweder  $f(x_i^3) = +y^3$  oder  $f(x_i^3) = -y^3$ , oder  $f(x_i^3)$  bedeckt das Innere von  $y^3$  nicht; im ersten Falle definieren wir  $f'(x_i^3) = h_i^+(x_i^3)$ , im zweiten  $f'(x_i^3) = h_i^-(x_i^3)$ , im dritten  $f'(x_i^3) = h_i^0(x_i^3)$ ; dies liefert eine Abbildung  $f'$  von  $K^3$ . Durch sie wird, wie man durch Abzählung des Grades im Simplex  $y^3$  erkennt, jeder dreidimensionale Zyklus von  $K^3$  mit demselben Grade abgebildet wie durch  $f$ , und dasselbe gilt für die Zyklen mod  $m$ ; folglich<sup>13)</sup> gehört sie zu derselben Klasse wie  $f$ .

<sup>12)</sup> Denn ist  $q$  die Quaternion mit den Komponenten  $x_0, x_1, x_2, x_3$  auf der durch  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  gegebenen  $S^3$ , so hat  $q^{-1}$  die Komponenten  $x_0, -x_1, -x_2, -x_3$ ; die Abbildung, die alle Quaternionen in ihre Inversen überführt, entsteht also durch Spiegelung an drei Ebenen und hat daher den Grad  $-1$ .

<sup>13)</sup> A. a. O. <sup>1)</sup>, Satz 1.

Analog erklären wir eine Abbildung  $g'$ , die zu derselben Klasse wie  $g$  gehört, und die in jedem  $x_i^3$  mit  $h_i^+$  oder  $h_i^-$  oder  $h_i^0$  übereinstimmt.

Für diese Abbildungen haben wir nun den behaupteten Additionssatz bezüglich der Grade zu beweisen, mit denen ein Zyklus oder Zyklus  $\text{mod } m$  durch  $f'$ ,  $g'$  und  $f' \cdot g'$  abgebildet wird; wir beweisen ihn, indem wir ihn für die Grade beweisen, die die Bilder der einzelnen Simplexe  $x_i^3$  im Simplex  $y^3$  haben. Diese Grade seien  $a_i$  und  $b_i$  für  $f'$  bzw.  $g'$ ; sie sind  $+1$ ,  $-1$ , oder  $0$ . Ist eine dieser beiden Zahlen  $0$ , etwa  $b_i = 0$ , so ist  $g'(x_i^3) = h_i^0(x_i^3) = E$ , also  $f' \cdot g'(x_i^3) = f'(x_i^3)$ , also hat  $f' \cdot g'(x_i^3)$  in  $y^3$  — wie in dem ganzen Gebiet  $S^3 - E$  — den Grad  $a_i = a_i + b_i$ ; die Behauptung ist also richtig. Ist eine der beiden Zahlen  $+1$ , die andere  $-1$ , etwa  $a_i = +1$ ,  $b_i = -1$ , so ist  $f'(x_i^3) = h_i^+$ ,  $g'(x_i^3) = h_i^- = (h_i^+)^{-1}$ , also  $f' \cdot g'(x_i^3) = E$ , also hat  $f' \cdot g'$  den Grad  $0 = a_i + b_i$ , und die Behauptung ist richtig. Ist schließlich  $a_i = b_i = \pm 1$ , so stimmt in  $x_i^3$   $f'$  mit  $g'$  (und mit  $h_i^+$  oder mit  $h_i^-$ ) überein, und daher ist die Abbildung  $f' \cdot g'$  in  $x_i^3$  mit der Abbildung  $(f')^2 = (g')^2$  identisch. Verstehen wir unter  $\varphi$  die Abbildung von  $S^3$  auf sich, die jedem Punkt  $q$  sein Quadrat  $q^2$  zuordnet, so können wir die Abbildung  $(f')^2$  auch dadurch erhalten, daß wir erst  $f'$ , dann  $\varphi$  ausüben, und infolge des Multiplikationssatzes für die Abbildungsgrade ist die Behauptung, daß diese Abbildung den Grad  $a_i + b_i = 2a_i$  hat, identisch mit der folgenden Behauptung, die allein noch zu beweisen bleibt:  $\varphi$  hat den Grad 2.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht zu verifizieren. Die Punkte der durch  $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$  im  $R^4$  gegebenen  $S^3$  lassen sich durch  $x_0 = \cos \alpha$ ,  $x_i = v_i \sin \alpha$  ( $i = 1, 2, 3$ ) darstellen, wobei  $v_i$  die Komponenten eines dreidimensionalen Einheitsvektors sind, der nur für  $\alpha = k\pi$  mit ganzem  $k$ , also nur in den Punkten mit den Koordinaten  $\pm 1, 0, 0, 0$  unbestimmt wird. Das Quadrat der Quaternion mit den Komponenten  $\cos \alpha$ ,  $v_i \sin \alpha$  hat die Komponenten  $\cos 2\alpha$ ,  $v_i \sin 2\alpha$ ; daraus ist ersichtlich, daß ein von dem Punkt  $-1, 0, 0, 0$  verschiedener Punkt  $x_0 = \cos \beta$ ,  $x_i = v_i \sin \beta$  bei der Abbildung  $\varphi$  genau zwei Originalpunkte hat, nämlich  $\cos \frac{\beta}{2}$ ,  $v_i \sin \frac{\beta}{2}$  und  $\cos(\frac{\beta}{2} + \pi)$ ,  $v_i \sin(\frac{\beta}{2} + \pi)$ ; sie sind antipodische Punkte auf der  $S^3$  (dagegen bildet  $\varphi$  alle Punkte mit  $x_0 = 0$  auf  $-1, 0, 0, 0$  ab). Sind daher  $G_1, G_2$  zwei antipodische Gebiete auf  $S^3$ , in denen  $x_0 \neq 0$  ist, so wird jedes von ihnen eindeutig auf dasselbe Bildgebiet  $G$  abgebildet, und dieses hat keinen weiteren Originalpunkt. Da die antipodische Abbildung der  $S^3$  den Grad  $+1$  hat, genügt es für den Beweis der Behauptung, daß  $\varphi$  den Grad  $+2$  hat, zu zeigen, daß  $G_1$  mit dem Grade  $+1$  auf  $G$  abgebildet wird. Dabei können wir annehmen, daß in  $G_1$   $\alpha$  eindeutig erklärt, etwa daß  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  ist; dann wird



durch  $x_0 = \cos t\alpha$ ,  $x_t = v_t \sin t\alpha$  ( $1 \leq t \leq 2$ ) eine eindeutige Deformation erklärt, deren Ergebnis  $\varphi(G_1)$  ist; folglich hat diese Abbildung in der Tat den Grad +1.

4. Für die weiteren Beweise wird es bequem sein, den Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  und  $\mathfrak{B}^1(K)$ , den wir oben durch Vermittlung der Gruppe  $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$  hergestellt haben, durch eine Orthogonalitätsrelation<sup>14)</sup> zwischen  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  und  $\mathfrak{B}^1(K)$  auszudrücken, und das Analoge für die Gruppen  $\frac{\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)}{\mathfrak{U}}$  und  $\mathfrak{B}^3(K^3)$  zu tun, wobei wir unter  $\mathfrak{U}$  die Gruppe der Elemente endlicher Ordnung in  $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$  verstehen. Man liest aus den Sätzen  $I_K$  und  $II'_K$  und ihren Beweisen ohne weiteres die Richtigkeit der beiden folgenden Tatsachen ab.

Hilfssatz I: Die Gruppe  $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$  ist zu der Gruppe  $\mathfrak{B}^1(K)$  orthogonal, wenn wir das Produkt  $\mathfrak{F} \cdot 3$ ,  $\mathfrak{F} \in \mathfrak{G}_{S^1}(K)$ ,  $3 \in \mathfrak{B}^1(K)$  als den Grad definieren, mit dem ein Zyklus  $z$  der Homologiekategorie 3 durch eine Abbildung aus  $\mathfrak{F}$  abgebildet wird. (In der Bezeichnung des Beweises des Satzes  $I_K$ : Ist  $\chi_{\mathfrak{F}}$  der durch  $\mathfrak{F}$  bewirkte Charakter, so ist  $\mathfrak{F} \cdot 3 = \chi_{\mathfrak{F}}(3)$ .)

Hilfssatz II: Die Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$  nach der aus allen Elementen endlicher Ordnung bestehenden Untergruppe  $\mathfrak{U}$  ist zu der Gruppe  $\mathfrak{B}^3(K^3)$  orthogonal, wenn wir das Produkt  $\Omega \cdot 3$ ,  $\Omega \in \frac{\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)}{\mathfrak{U}}$ ,  $3 \in \mathfrak{B}^3(K^3)$  als den Grad definieren, mit dem ein Zyklus  $z$  der Homologiekategorie 3 durch eine Abbildung aus einer der in  $\Omega$  enthaltenen Abbildungsklassen  $\mathfrak{F}$  abgebildet wird. (In der Bezeichnung des Beweises von  $II'_K$ :  $\Omega \cdot 3 = \chi_{\mathfrak{F}}(3)$ ; dabei ist zu beachten, daß  $\chi_{\mathfrak{F}}$  nur von  $\Omega$  abhängt; denn ist  $\mathfrak{F}_1$  ein Element endlicher Ordnung  $m$  in  $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$ , so ist  $\chi_{\mathfrak{F}_1}(3) = 0$  für alle 3, da  $m \cdot \chi_{\mathfrak{F}_1} = \chi_{\mathfrak{F}_1^m} = \chi_{\mathfrak{E}} = 0$  [ $\mathfrak{E}$  = Einheit in  $\mathfrak{G}_{S^3}$ ] ist.)

5. Bevor wir zum Beweise unserer Sätze I und II übergehen, bemerken wir, daß die Eigenschaften der Gruppe  $G_M(F)$  — wobei  $M$  eine beliebige Mannigfaltigkeit von Nr. 1 ist — als Grenzfall der entsprechenden Eigenschaften der für Komplexe definierten Gruppen  $G_M(K)$  aufgefaßt werden können. Genauer gesprochen gilt folgende Tatsache: es sei

$$(1) \quad A = (K_1, K_2, \dots, K_m, \dots)$$

ein Projektionspektrum<sup>15)</sup> des kompakten metrischen Raumes  $F$ , und  $\pi_m$  seien die zugehörigen simplizialen Abbildungen von  $K_{m+1}$  auf  $K_m$ . Wir betrachten die Gruppenfolge

$$G_1, G_2, \dots, G_m, \dots$$

<sup>14)</sup> A. a. O. 3), S. 176.

<sup>15)</sup> Im Sinne von Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, *Annals of Math.* (2) **30** (1929), S. 101–187, insbesondere S. 107.



wobei  $G_m = G_M(K_m)$  ist. Jedem durch eine stetige Abbildung  $\varphi_m(K_m)$  bestimmten Element von  $G_m$  entspricht eindeutig ein durch die Abbildung  $\varphi_{m+1}(K_{m+1}) = \varphi_m \pi_m(K_{m+1})$  bestimmtes Element von  $G_{m+1}$ ; gehören in der Tat zwei Abbildungen  $\varphi_m$  und  $\varphi'_m$  zu einer und derselben Klasse  $\Phi_m \in G_m$ , so gehören offenbar die Abbildungen  $\varphi_m \pi_m$  und  $\varphi'_m \pi_m$  auch zu einer und derselben Klasse  $\Phi_{m+1} \in G_{m+1}$ . Vermöge dieser Zuordnung entsteht eine homomorphe Abbildung  $\omega_m$  von  $G_m$  in  $G_{m+1}$ , so daß wir eine direkte Homomorphismenfolge<sup>16)</sup>  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  bekommen.

Es gilt nun folgender

Satz III. Die Gruppe  $G_M(F)$  ist der Limesgruppe<sup>16)</sup> der Folge  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  isomorph.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß jedem Element  $\Phi$  von  $G_M(F)$  eine gewisse Klasse konfinaler fundamentaler Folgen in  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  entspricht. Es sei in der Tat  $\varphi(F)$  eine stetige Abbildung der Klasse  $\Phi$ ; wir betrachten die Komplexe  $K_n$  als geometrisch ohne Singularitäten realisierte Nerven gewisser Überdeckungen  $U_n$  der Menge  $F$  und nehmen an, daß ihre Eckpunkte  $a_1^{(n)}, \dots, a_s^{(n)}$  durch eine  $\varepsilon_n$ -Verschiebung ( $\lim \varepsilon_n = 0$ ) gewisser Punkte  $b_1^{(n)}, \dots, b_s^{(n)}$  von  $F$  entstanden sind. Wir definieren die Abbildung  $\varphi$  für alle Eckpunkte  $a_i^{(n)}, \dots, a_s^{(n)}$ , indem wir für jedes  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$

$$\varphi(a_i^{(n)}) = \varphi(b_i^{(n)})$$

setzen<sup>17)</sup>.

In der Annahme, daß das Eckpunktgerüst eines jeden Simplexes von  $K_n$  mittels  $\varphi$  in ein hinreichend kleines in  $M$  enthaltenes Element abgebildet wird (was für ein genügend großes  $n$  ( $n \geq m$ ) immer der Fall ist), können wir die in den Eckpunkten  $a$  von  $K_n$  als  $\varphi_n(a) = \varphi(a)$  definierte Abbildung  $\varphi_n$  zu einer stetigen Abbildung des ganzen Komplexes  $K_n$  in  $M$  erweitern, wobei der Maximaldurchmesser  $\sigma_n$  des Bildes eines Simplexes von  $K_n$  bei der Abbildung  $\varphi$  mit  $\frac{1}{n}$  gegen Null konvergiert. Auf diese Weise tritt in jeder Gruppe  $G_n$  ( $n \geq m$ ) ein eindeutig bestimmtes Element  $\Phi_n$  hervor, welches dem Element  $\Phi$  von  $G_M(F)$  entspricht. Wir zeigen, daß die Folge  $\Phi_m, \Phi_{m+1}, \dots, \Phi_n, \dots$  eine Fundamentalfolge<sup>18)</sup> ist. In der Tat gehören, wie leicht ersichtlich, die stetigen Abbildungen  $\varphi_{n+1}(K_{n+1})$  und  $\varphi_n \pi_n(K_{n+1})$  zu derselben Klasse, so daß  $\Phi_{n+1} = \omega_n(\Phi_n)$  ist und jedes  $\Phi_n$  zu der mit dem Element  $\Phi_m$  beginnenden Fundamentalfolge gehört, woraus die Behauptung folgt.

<sup>16)</sup> A. a. O. <sup>3)</sup>, S. 194—195.

<sup>17)</sup> A. a. O. <sup>16)</sup>, S. 104, 115 u. f.

Wir ordnen jetzt ein gewisses  $\Phi \in G_M(F)$  jeder Klasse konfinaler Fundamentalfolgen

$$(1) \quad \Phi_m, \Phi_{m+1}, \dots, \Phi_n, \dots$$

der Homomorphismenreihe zu. Auf Grund eines bekannten Satzes von Alexandroff<sup>17)</sup> kann jeder kompakte metrische Raum  $F$  durch eine  $\varepsilon$ -Überführung  $f_n$  in den Nerv einer beliebigen  $\varepsilon$ -Überdeckung von  $F$  abgebildet werden. Wir haben also:  $f_n(F) \in K$ . Deshalb erzeugt jede stetige Abbildung  $\varphi_n$  von  $K_n$  in  $M$  eine stetige Abbildung von  $F$  in  $M$ , nämlich die Abbildung  $\varphi_n f_n(F)$ . Auf diese Weise entspricht jedem Element  $\Phi_n$  von  $G_n$  ein gewisses  $\Phi^n \in G_M(F)$ . Ich behaupte aber, daß die durch das Element  $\Phi_m$  bestimmte Fundamentalfolge  $\Phi_m, \Phi_{m+1}, \dots, \Phi_n, \dots$  die Eigenschaft besitzt, daß jedem  $\Phi_n$  (wobei  $n$  größer als ein gewisses  $N$  ist) mittels des obigen Verfahrens ein und dasselbe  $\Phi^n \in G_M(F)$  zugeordnet ist.

Um das zu beweisen, setzen wir voraus, daß  $K_{2n}$  die baryzentrische Unterteilung von  $K_{2n-1}$  im Projektionspektrum  $A = (K_1, K_2, \dots, K_n, \dots)$  ist; das kann immer vorausgesetzt werden<sup>18)</sup>. Wir bezeichnen dabei die vermöge dessen, daß  $K_{2n}$  die baryzentrische Unterteilung von  $K_{2n-1}$  ist, bestimmte identische Abbildung von  $\bar{K}_{2n}$  auf  $\bar{K}_{2n-1}$ <sup>19)</sup> durch  $\pi_{2n-1}(\bar{K})$ . Diese Abbildung kann in die Abbildung  $\pi_{2n-1}(\bar{K})$  durch Verschiebung der Eckpunkte des Komplexes  $K_{2n}$  innerhalb der Simplexe des Komplexes  $K_{2n-1}$  stetig übergeführt werden, und zwar dadurch, daß man jeden Eckpunkt von  $K_{2n}$ , welcher Schwerpunkt eines Simplexes von  $K_{2n-1}$  ist, in einen Eckpunkt dieses Simplexes überführt.

Wir betrachten jetzt die Fundamentalfolge

$$\Phi_{2m-1}, \Phi_{2m}, \Phi_{2m+1}, \dots,$$

wobei  $\Phi_{2n-1}$  Element von  $G_{2n-1}$ ,  $\Phi_{2n}$  Element von  $G_{2n}$  ist ( $n \geq m$ ). Wir konstruieren die Abbildungen  $\varphi_{2n-1}$  aus  $\Phi_{2n-1}$ ,  $\varphi_{2n}$  aus  $\Phi_{2n}$  in folgender Weise: Wir wählen willkürlich  $\varphi_{2m-1}$  in der Klasse  $\Phi_{2m-1}$ ; wenn  $\varphi_{2n-1}$  schon definiert ist, so setzen wir

$$\varphi_{2n}(\bar{K}_{2n}) = \varphi_{2n-1} \pi_{2n-1}(\bar{K}_{2n})^{20)}$$

und

$$\varphi_{2n+1}(\bar{K}_{2n+1}) = \varphi_{2n} \pi_{2n}(\bar{K}_{2n+1}).$$

<sup>17)</sup> Pontrjagin und Tolstowa, Math. Annalen 105 (1931), S. 739.

<sup>18)</sup>  $\bar{K}_{2n-1}$  bzw.  $\bar{K}_{2n}$  sind die Polyeder, die den Komplexen  $K_{2n-1}$ ,  $K_{2n}$  entsprechen (d. h. die Vereinigungsmengen der Simplexe der betreffenden Komplexe). Ist  $f(K)$  eine simpliziale Abbildung eines Komplexes auf einen anderen, so bezeichnen wir mit  $f(\bar{K})$  die dadurch bestimmte stetige Abbildung des einen Polyeders auf das andere. Vgl. hierzu Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie, Berlin, Springer, 1932.

<sup>19)</sup> Wobei zu beachten ist, daß das Bild  $\pi_{2n-1}(\bar{K}_{2n})$  das Polyeder  $\bar{K}_{2n-1}$  ist.

Nachdem auf diese Weise  $\varphi_{2n}$  und  $\varphi_{2n+1}$  als simpliziale Abbildungen der Polyeder  $\bar{K}_{2n}$  und  $\bar{K}_{2n+1}$  definiert sind, fassen wir sie wieder als simpliziale Abbildungen der Simplizialzerlegungen  $K_{2n}$  bzw.  $K_{2n+1}$  dieser Polyeder auf. Es ist leicht zu sehen, daß bei jedem hinreichend großen  $n \geq N$  die Bilder der Simplexe des Komplexes  $K_{2n-1}$  bzw.  $K_{2n}$  bei der Abbildung  $\varphi_{2n-1}$  bzw.  $\varphi_{2n}$  beliebig klein werden; deshalb gehören die Abbildungen  $\varphi_{2n-1} f_{2n-1}(F)$ ,  $\varphi_{2n} f_{2n}(F)$ ,  $\varphi_{2n+1} f_{2n+1}(F)$  sämtlich zu derselben Klasse  $\Phi$ , die wir nunmehr der Fundamentalfolge (1) entsprechen lassen.

In dieser Weise wird: 1. jeder Klasse von Abbildungen  $\Phi$ , also jedem Element von  $G_M(F)$  eine eindeutig bestimmte Klasse konfinaler Fundamentalfolgen, und 2. jeder Klasse konfinaler Fundamentalfolgen eine eindeutig bestimmte Klasse stetiger Abbildungen des kompakten metrischen Raumes  $F$  zugeordnet. Zum Beweise des Satzes bleibt nur zu zeigen:

a) daß diese Zuordnungen reziprok sind, d. h. daß sie eine eindeutige Abbildung der Gruppe  $G_M(F)$  auf die Limesgruppe

$$B = \lim G_M$$

ergeben;

b) daß die erwähnte Abbildung homomorph ist.

Beweis von a). Die durch die Folge

$$\Phi_m, \dots, \Phi_n, \dots$$

definierte Klasse  $H$  konfinaler Fundamentalfolgen sei nach 1. der Klasse  $\Phi \in G_M(F)$  zugeordnet. Das bedeutet, daß die in den Eckpunkten  $a$  des Komplexes  $K_n$  durch die Relationen  $\varphi_n(a) = \varphi(a)$  definierte Abbildung dieses Komplexes in  $M$  bei jedem hinreichend großen  $n$  der Klasse  $\Phi_n$  angehört ( $\varphi$  ist dabei eine beliebige Abbildung der Klasse  $\Phi$ ). Das nach 2. der Klasse  $H$  konfinaler Fundamentalfolgen zugeordnete und vermöge dieser Zuordnung durch die Abbildungen  $\varphi_n f_n(F)$ ,  $n \geq N$  definierte Element  $\bar{\Phi}$  von  $G_M(F)$  enthält die Abbildung  $\varphi(F)$ , weil die Abbildungen  $\varphi_n f_n(F)$  und  $\varphi(F)$  bei jedem hinreichend großen  $n$  zu einer und derselben Klasse gehören, da sie sich beliebig wenig voneinander unterscheiden und  $M$  eine Mannigfaltigkeit ist.  $\bar{\Phi}$  ist also die Ausgangsklasse  $\Phi$ , woraus die Behauptung a) folgt.

Beweis von b). Es sei  $\varphi$  ein Element von  $\Phi$ ,  $\varphi'$  ein Element von  $\Phi'$ ,  $\psi = \varphi \cdot \varphi'$ . Dann gehört  $\psi$  zu  $\Psi = \Phi \cdot \Phi'$ . Die Abbildungen  $\varphi(F)$ ,  $\varphi'(F)$  und  $\psi(F)$  erzeugen die in den Eckpunkten  $a$  von  $K_n$  durch die Relationen

$$\varphi_n(a) = \varphi(a), \quad \varphi'_n(a) = \varphi'(a) \quad \text{und} \quad \psi_n(a) = \psi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi'(a)$$

definierten Abbildungen  $\varphi_n(K_n) \in \Phi_n$ ,  $\varphi'_n(K) \in \Phi'_n$  und  $\psi_n(K_n) \in \Psi_n$ . Die Abbildungen  $\varphi_n$  und  $\varphi_n^* = \varphi_n \cdot \varphi'_n$  des Komplexes  $K_n$  in  $M$  gehören bei jedem hinreichend großen  $n$  zu einer und derselben Klasse, nämlich zu  $\Psi_n$ , weil sie in den Eckpunkten  $\sigma$  von  $K_n$  übereinstimmen:

$$\varphi_n^*(a) = \varphi_n(a) \cdot \varphi'_n(a) = \varphi(a) \cdot \varphi'(a) = \psi(a) = \psi_n(a).$$

Somit ist  $\Psi_n = \Phi_n \cdot \Phi'_n$ , woraus die Behauptung b) folgt.

Der Satz III ist hiermit bewiesen.

6. Jetzt können wir leicht die Sätze I und II beweisen.

Beweis des Satzes I. Wie in Nr. 5 bereits erwähnt wurde, erzeugt ein Projektionsspektrum

$$A = (K_1, K_2, \dots, K_m, \dots)$$

des kompakten metrischen Raumes  $F$  eine direkte Homomorphismenfolge  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ . Andererseits entsteht vermöge der simplizialen Abbildung  $\pi_m$  von  $K_{m+1}$  auf  $K_m$  eine homomorphe Abbildung (die ebenfalls mit  $\pi_m$  bezeichnet wird) von  $B_{m+1} = B^1(K_{m+1})$  in  $B_m = B^1(K_m)$ , so daß wir eine inverse Homomorphismenfolge  $\mathfrak{F}(B_m, \pi)$ <sup>14)</sup> erhalten. Die Folgen  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  und  $\mathfrak{F}(B_m, \pi)$  sind zueinander orthogonal, weil:

1. nach Hilfssatz I die Gruppen  $B_n$  und  $G_n$  zueinander orthogonal sind;
2. nach der Definition  $\omega_n$  für je zwei Elemente  $\Phi$  bzw.  $\gamma$  von  $G_n$  bzw.  $B_{n+1}$  die Relation

$$\omega_n(\Phi_n) \cdot \gamma = \Phi_n \cdot \pi_n(\gamma)$$

gilt.

Somit ist die Limesgruppe  $B$  der Folge  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  der eindimensionalen Bettischen Gruppe von  $F$  isomorph. Andererseits aber ist diese Limesgruppe nach Satz III der Gruppe  $G_{S^1}(F)$  isomorph, womit der Satz I bewiesen ist.

Beweis des Satzes II. Es sei

$$A = (K_1, K_2, \dots, K_n, \dots)$$

ein Projektionsspektrum des dreidimensionalen kompakten metrischen Raumes  $F^3$ . Auf Grund des Satzes III ist die Gruppe  $G_{S^1}(F^3)$  der Limesgruppe der direkten Homomorphismenfolge  $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$  isomorph, wobei  $G_m = G_{S^1}(K_m^3)$  ist. Die Elemente der mit dem Element endlicher Ordnung  $\Phi_m$  von  $G_m$  beginnenden Fundamentalfolge  $\Phi_m, \dots, \Phi_n, \dots$  werden ebenfalls von endlicher Ordnung sein, und dabei wird ihre Ordnung mit wachsendem  $n$  nicht wachsen. Deshalb ist, wie leicht ersichtlich, die Limesgruppe der Folge  $\mathfrak{F}\left(\frac{G_m}{U_m}, \omega\right)$  [wobei  $U_m$  die aus allen Elementen end-

licher Ordnung bestehende Untergruppe von  $G_m$  ist] der Faktorgruppe  $\frac{G_{S^3}(F^3)}{U_{S^3}(F^3)}$  isomorph.

Ähnlich wie beim Beweise des Satzes I haben wir neben der direkten Homomorphismenfolge die inverse Homomorphismenfolge  $\mathfrak{F}(B_m^1, \pi)$ , wobei man mittels des Hilfssatzes II beweist, daß die Folgen  $\mathfrak{F}\left(\frac{G_m}{U_m}, \omega\right)$  und  $\mathfrak{F}(B_m^3, \pi)$  zueinander orthogonal sind, woraus die Behauptung des Satzes II folgt.

Zum Schluß möchte ich nicht unterlassen, Herrn Prof. L. Pontrjagin in Moskau und Herrn Prof. H. Hopf in Zürich meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für zahlreiche Anregungen und Verbesserungen mannigfachster Natur. Insbesondere verdanke ich Herrn Prof. Hopf die endgültige Fassung der ersten vier Nummern dieses Artikels.

(Eingegangen am 16. 6. 1933.)

# Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung.

Von

Arnold Schmidt in Göttingen.

## Inhalt.

- I. Einleitung und Zusammenfassung.
- II. Liste der axiomfähigen Sätze. Hilfssätze.
- III.—VI. Gegenseitige Abhängigkeit der unter II genannten Sätze.
- VII. Axiomensysteme, die, ohne Spiegelungsforderungen zu enthalten, alle Spiegelungseigenschaften nach sich ziehen.

## I.

Bei der Begründung der Geometrie läßt sich der Übergang von der Verknüpfungs- und Anordnungsgeometrie zur metrischen Geometrie bekanntlich auf drei Weisen vollziehen.

Zunächst läßt sich der Geometrie durch explizite algebraische Definitionen eine Metrik aufprägen; soll hierbei der Eindruck der Willkür vermieden werden, so hat man ideale Elemente einzuführen und Stetigkeitspostulate heranzuziehen, die jedenfalls nicht alle aus der primitiven Erfahrung stammen. Will man sowohl auf die Willkür der algebraischen Festsetzungen als auch auf die genannten Hilfsmittel verzichten, so wird man genügend viele evidente metrische Eigenschaften axiomatisch fordern; je nachdem man in diesem Falle den Begriff der Bewegung der Punktgesamtheit oder den der Kongruenz einfacher Gebilde für primitiver hält, definiert man den ersteren oder den letzteren implizit. Bei der Einführung der Metrik durch Axiome zeigt sich nun ein grundlegender Unterschied zwischen der räumlichen und der ebenen Geometrie. Während der Aufbau der räumlichen Geometrie keine grundlegende Benutzung von Spiegelungen des Raumes an einer Ebene bzw. überhaupt keine nichtebenen Kongruenzaxiome erfordert, lehrt ein Blick auf die Begründungsarten der ebenen metrischen Geometrie, die ohne nichtebene Sätze auskommen<sup>1)</sup>, daß sie alle weitgehend Spiegelungen der

<sup>1)</sup> Außer Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (im folgenden als „H. G.“ zitiert) sei hier noch als die bisher wohl am weitesten getriebene Begründung der ebenen Geometrie diejenige von Hjelmslev herausgehoben; Math. Annalen 64; vgl. auch Math. Fys. Meddeleiser 10.

Ebene an einer Geraden heranziehen bzw. Kongruenzeigenschaften ungleichsinnig bezogener Figuren axiomatisch fordern. Ohne dieses Hilfsmittel wären die üblichen Herleitungen der wichtigsten metrischen Sätze nicht möglich.

Darauf mag es beruhen, daß vor Hilbert — und auch bei denjenigen Grundlegungen der ebenen Geometrie, die nach den sogleich zu erwähnenden Abhandlungen Hilberts erschienen sind — dem fundamentalen Unterschied zwischen der Kongruenz gleichsinnig bezogener Figuren und derjenigen ungleichsinnig bezogener Figuren<sup>2)</sup> keine Rechnung getragen wurde, obwohl der Begriff der Seite einer Geraden bei Einführung der Metrik vorzuliegen pflegt. Fundamental ist dieser Unterschied für beide genannten axiomatischen Methoden. Einesteils ist nämlich die Bewegung zweifellos einer generell primitiveren Erfahrung zugänglich als die Spiegelung oder Umklappung, zumal sich, wenn man die ebene Geometrie unabhängig von der räumlichen begründen will, räumliche Vorstellungen nicht einschleichen dürften<sup>3)</sup>. Anderenteils scheint es, wenn man Axiome über Kongruenz von Paaren einfacher nichtlinearer Gebilde aufstellt, im Sinne der Zerlegung komplexer Forderungen geboten, sie gesondert für gleichsinnig und ungleichsinnig bezogene Gebilde zu formulieren, wobei man dann naturgemäß nicht auf die ersten Axiome zugunsten der letzteren verzichten wird, sondern umgekehrt versuchen wird, sich nach Möglichkeit — in zwei im folgenden benutzten Terminus ausgedrückt — auf die Forderung von Bewegungseigenschaften zu beschränken und die Forderung von Spiegelungseigenschaften zu vermeiden.

Bekanntlich nahm von beiden axiomatischen Standpunkten aus Hilbert eine solche Beschränkung vor. In seiner Untersuchung „Über die Grundlagen der Geometrie“<sup>4)</sup> zeigte Hilbert, daß, wenn man die Ab-

<sup>2)</sup> In der Philosophie spielt der Unterschied der entsprechenden räumlichen Kongruenzbegriffe seit langem eine Rolle. Sowohl Leibniz (Hauptschriften Bd. I, S. 135) als auch Kant (Prolegomena § 13) haben ihn bei der Begründung ihrer Theorien über das Wesen des Raumes herangezogen.

<sup>3)</sup> Hierzu sei eine Bemerkung aus M. Dehn, „Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung“ (Pasch-Dehn, Berlin 1926), zitiert: „Es muß aber bemerkt werden, daß alle diese Beweise nur durch eine etwas willkürliche Festsetzung sich vollständig in der ebenen Geometrie bewegen. Denn sie machen den ausgiebigsten Gebrauch von den Spiegelungen an einer Geraden. Diese Spiegelung an einer Geraden ist aber nur durch eine räumliche Bewegung, Drehung der Ebene um die Achse um einen gestreckten Winkel, geometrisch zu realisieren. Daß diese Voraussetzung sehr wichtig ist, ergibt sich aus einer eindringlichen Untersuchung von Hilbert ...“.

<sup>4)</sup> Math. Annalen 56. Abgedruckt als „Anhang IV“ der H. G. (im folgenden als H. G. A. IV zitiert).



bildbarkeit der Punktgesamtheit auf einen Teil der Zahlenebene zugrunde legt, in der Tat drei ganz allgemeine, an Bewegungen gestellte Forderungen zur Begründung der ebenen Geometrie hinreichen. Der Beweis stützt sich auf das Ergebnis der Abhandlung „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“<sup>6)</sup>, in der Hilbert das Problem von dem anderen Standpunkt aus behandelt. Dort zeigt sich, daß dieses wesentlich auf die Frage hinausläuft, welche Stetigkeitsforderungen zur Herleitung der Spiegelungseigenschaften aus den Bewegungseigenschaften herangezogen werden müssen. Das Ergebnis der Hilbertschen Untersuchungen läßt sich [unter Berücksichtigung eines Nachtrags<sup>6)</sup>] so formulieren:

Die Spiegelungseigenschaften folgen aus denjenigen axiomatischen Forderungen der in der Festschrift „Grundlagen der Geometrie“ (Auff. 3) aufgestellten Axiomgruppen I–IV, die keine nichtebenen Eigenschaften und keine Spiegelungseigenschaften postulieren, bei Zufügung zweier Stetigkeitsaxiome (des Archimedischen Axioms und des Axioms der Nachbarschaft) und einer schwachen Spiegelungseigenschaft (der Kommutativität der Winkeladdition)<sup>7)</sup>. Die Abhängigkeit wird bei Fortnahme eines der beiden Stetigkeitsaxiome aus dem aufgeführten Axiomensystem hinfällig, wie man an Hand zweier Geometrien erkennt, die als 1. und 2. Hilbertsche Geometrie bezeichnet werden mögen.

Im Anschluß an dieses Ergebnis will die vorliegende Untersuchung die Frage klären, ob die Spiegelungseigenschaften nicht bereits aus schwächeren Axiomensystemen folgen; insbesondere wird es dabei — neben der Zurückstellung solcher Stetigkeitsforderungen, die über die Archimedische hinausgehen — auf die Vermeidung des Spiegelungsaxioms für Winkel ankommen, nach welcher dann wirklich *alle* Spiegelungseigenschaften aus anschaulich schwächeren Axiomen folgen. Die von W. Rosemann<sup>8)</sup> aufgezeigte Ungültigkeit des sogenannten dritten Kongruenzsatzes für gleichsinnig bezogene Dreiecke in der 1. Hilbertschen Geometrie empfahl offensichtlich, bei der genannten Fragestellung auf diesen Satz ein besonderes Augenmerk zu richten; doch werden auch weitere prägnante und evidente geometrische Tatbestände als Axiome herangezogen.

Zwei Serien anschaulich verschiedenartiger, doch in bestimmtem Rahmen einander äquivalenter Axiome werden aufgezeigt; im wesentlichen

<sup>6)</sup> Proc. London Math. Soc. 4. Abgedruckt als „Anhang II“ der H. G. (zitiert als H. G. A. II).

<sup>6)</sup> „Zu Anhang II“, H. G. 4.—6. Aufl., S. 259—262.

<sup>7)</sup> Vgl. Fußnote S. 571.

<sup>8)</sup> „Der Aufbau der ebenen Geometrie ohne das Symmetriaxiom“. Diss. Göttingen, 1922: Math. Annalen 90.

enthält die erste Serie Forderungen an die Winkelkongruenz, die zweite solche an die Streckenkongruenz. Die innerhalb der beiden Serien geltenden Äquivalenzen führen zusammen mit einigen weiteren Abhängigkeiten auf eine Reihe von *Axiomensystemen, welche, ohne irgendeine Spiegelungsforderung* (oder eine Forderung, die einer solchen verwandt wäre) zu enthalten, *alle Spiegelungseigenschaften nach sich ziehen* (S. 571). Als die geschlossensten — übrigens nicht unbedingt als die schwächsten — unter ihnen sind wohl die beiden Systeme anzusehen, die *außer den Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen und denjenigen Axiomen, die die fundamentalen Eigenschaften der Kongruenz — Eindeutigkeit, Transitivität, Reflexivität, Additivität — sichern, lediglich die beiden grundlegenden* (1. und 3.) *Kongruenzsätze für gleichsinnig bezogene Dreiecke und die Archimedische Forderung an Strecken und Winkel bzw. den 1. und den 4. Kongruenzsatz für gleichsinnig bezogene Dreiecke und die Archimedische Forderung an Strecken* enthalten.

Weiterhin wird in den wichtigsten Fällen die Unentbehrlichkeit der einzelnen Axiome untersucht. Hervorgehoben sei hier, daß die *Archimedische Axiomgruppe* auch bei Zugrundelegung aller übrigen betrachteten Axiome, die nicht eine Spiegelungsforderung enthalten oder unmittelbar einer solchen verwandt sind, *unvermeidbar zur Herleitung der Spiegelung* ist.

## II.

Die Abtrennung der Spiegelungseigenschaften von den Bewegungseigenschaften und auch die Tatsache, daß sich bei der Zurückführung der ersteren auf schwächere Axiome außer den gebräuchlichen Stetigkeitsaxiomen noch weitere Axiome, die sich als Stetigkeitsaxiome auffassen lassen — wie das Hilbertsche Nachbarschaftsaxiom —, aufdrängen, legen es nahe, die in H. G. gegebene allgemeine Einteilung in Axiomgruppen auf eine der speziellen Fragestellung adäquate Weise zu modifizieren. Diese Modifikation wird lediglich von dem Bestreben beherrscht, jeder Axiomgruppe diejenigen Axiome voranzustellen, die von der gegebenen Fragestellung aus anschaulich oder inhaltlich primär erscheinen, und ist somit natürlich nicht eindeutig vorgezeichnet. Gemäß dem heuristischen Charakter der folgenden Zusammenstellung und Einteilung der Axiomgruppen wurde in ihr die begriffliche Umgrenzung der einzelnen Gruppen und die Aufführung elementarer, in eine Gruppe hineinfallender Tatbestände nur so weit getrieben, wie es durch die Fragestellung selbst geboten wurde. Wie sich zeigen wird, steht in der Anordnung der als Axiome in Betracht kommenden Sätze keineswegs der logisch schwächere dem logisch stärkeren voran.

Gruppe *F*. *Fundamentale Axiome* (man vergleiche S. 541). Diese Gruppe umfaßt die Axiome I, II, IV<sup>9</sup>), III 1 bis 4 und Axiom III 6 aus H. G. A. II. 7. Aufl.

Die Axiome *F* gestatten die folgende Definition: Zwei Figuren  $A_1 A_2 \dots A_n$  und  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  heißen *gleichsinnig* [ungleichsinnig] *bezogen*, wenn sie folgenden Bedingungen genügen: Falls  $A_i$  auf  $A_1 A_2$  bzw. links von  $A_1 A_2$  bzw. rechts von  $A_1 A_2$  liegt, so liegt auch  $A'_i$  auf  $A'_1 A'_2$  bzw. links [rechts] von  $A'_1 A'_2$  bzw. rechts [links] von  $A'_1 A'_2$ .

Gruppe *P*. *Die reinen Schnittpunktsätze*:

Axiom *P*. Der Pappussche Satz (Pascalscher Satz der H. G.).

Gruppe *B*. *Bewegungsaxiome* mögen diejenigen Axiome heißen, die aus der Kongruenz gewisser homologer Stücke zweier einfacher, nicht notwendig verschiedener, gleichsinnig bezogener Figuren die Kongruenz weiterer homologer Stücke folgern. Es werden betrachtet:

Axiom *B0* (III 5\* der H. G.). Erster Kongruenzsatz für gleichsinnig bezogene Dreiecke: Zwei Dreiecke seien gleichsinnig bezogen, und zwei Seiten des einen Dreiecks sowie der eingeschlossene Winkel seien den homologen Stücken kongruent; dann sind auch die anderen Winkel dieses Dreiecks den homologen Winkeln kongruent.

Axiom *B1*. Dritter Kongruenzsatz für gleichsinnig bezogene Dreiecke<sup>10</sup>): Sind in zwei gleichsinnig bezogenen Dreiecken homologe Seiten jeweils kongruent, so sind auch homologe Winkel jeweils kongruent.

Ein Spezialfall von *B1*, welcher nur zu bestimmten Unabhängigkeitsbetrachtungen herangezogen werden soll, ist

*B1\**. Im gleichseitigen Dreieck sind die Winkel kongruent.

Läßt man noch Kongruenzbedingungen innerhalb der einen der beiden bezogenen Figuren zu, so fällt auch der folgende Satz unter die Gruppe *B*:

Axiom *B2*. Vierter Kongruenzsatz für gleichsinnig bezogene Dreiecke: Zwei Dreiecke seien gleichsinnig bezogen, und zwei nicht kongruente Seiten des einen Dreiecks  $\Delta$  sowie der Winkel, welcher der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegt, seien den homologen Stücken kongruent; dann sind auch die anderen Winkel von  $\Delta$  den homologen Winkeln kongruent.

<sup>9</sup>) Das Parallelenaxiom wird hier — wie in H. G. A. II — zugrunde gelegt. Manche der folgenden Beweise benutzen es indes nicht, in anderen läßt es sich ohne Schwierigkeit eliminieren.

<sup>10</sup>) Es sei angemerkt, daß *B0* insofern gegenüber *B1* inhaltlich primitiver ist, als es auf Grund der Axiome *F* auf die Forderung zurückgeführt werden kann: Zu einem Strahl  $\lambda$  und einem Dreieck  $ABC$  gibt es ein unter gleichsinniger Bezogenheit kongruentes Dreieck  $A'B'C'$ , für welches der Strahl  $A'B'$  mit  $\lambda$  zusammenfällt.

Als „elementare Axiome über die Beziehung von Kongruenz und Lage“ oder kurz als Lageaxiome der Kongruenz seien die (nichtfundamentalen) Axiome bezeichnet, die sich auf folgende Weise interpretieren lassen: Gewisse Lageeigenschaften einer einfachen Figur sind mit gewissen in dieser Figur auftretenden Kongruenzbeziehungen nicht verträglich.

Gruppe W. *Lageaxiome der Winkelkongruenz.*

Axiom W 1. Ein Winkel liegt nicht in einem kongruenten Winkel mit dem gleichen Scheitel [Axiom III 7 der H. G. A. II. 7. Aufl.<sup>11)</sup>].

Axiom W 2. Rechte Winkel sind kongruent, oder: es gibt höchstens ein Lot auf einer Geraden in einem Punkt.

Hier ist ein rechter Winkel zunächst ein solcher, der einem seiner Nebenwinkel kongruent ist; im Rahmen der Axiome *F*, *B 0* ist er beiden Nebenwinkeln kongruent (vgl. S. 548).

Gruppe K. *Lageaxiome der Streckenkongruenz (Kreisaxiome).*

Axiom K 0. Die Kreise sind homothetisch, d. h. (bei Zugrundelegung von *F*, *B 0*): Liegen *A* bzw. *B* auf den Strecken *OA'* bzw. *OB'* und ist  $OA \equiv OB$ ,  $OA' \equiv OB'$ , so ist  $AB \parallel A'B'$ .

Axiom K 1. Der Kreis ist konvex, d. h.: Ist  $OP \equiv OQ \equiv OR$  und liegt *R* im Winkel  $\angle POQ$ , so trennt die Gerade *PQ* die Punkte *O*, *R*.

Gruppe L. *Lageaxiome der Strecken- und Winkelkongruenz<sup>12)</sup>.*

Axiom L. In einem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber.

Hierbei wird gleich eine von der gegenseitigen Lage unabhängige Größenvergleichen der Winkel als möglich angenommen; s. Hilfssatz (5).

Als Spezialfall von *L* stellt sich im Rahmen der Axiome *F*, *B 0* der folgende (ohne Voraussetzung von *W 1* formulierte) Satz dar:

*L\**. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse nicht kleiner als eine Kathete.

<sup>11)</sup> Dieses Axiom wurde von P. Bernays bei einem anderen Spiegelungsproblem benutzt. Zu der Frage nämlich, ob der Basiswinkelsatz auch bei Verzicht auf jede Parallelen- oder Stetigkeitsforderung die übrigen Spiegelungseigenschaften nach sich ziehe, gab Hilbert an, daß Satz *S 3* aus einem Axiomensystem folge, welches die Axiome *F* mit Ausnahme des Parallelenaxioms, ferner *B 0*, *S 1* (vgl. auch Fußnote S. 571) und *S 2* enthält. Bernays ersetzte in dieser Abhängigkeit das Spiegelungsaxiom *S 1* durch das schwächere Axiom *W 1*. (Diese Arbeit ist bisher nicht veröffentlicht.)

<sup>12)</sup> Betreffs der Stellung dieser Gruppe zur Spiegelung vergleiche man S: 570.

Gruppe A. *Archimedische Axiome* heißen die (allerdings bekanntlich nicht von Archimedes stammenden) Axiome:

Axiom A0 (Axiom V1 der H. G.). Das Archimedische Axiom für Strecken.

Axiom A1. Zu zwei Winkeln  $hk$ ,  $hl$  mit gemeinsamen inneren Punkten existiert eine natürliche Zahl  $n$  ( $\geq 0$ ) mit folgender Eigenschaft: bei  $n$ -maliger Antragung von  $hl$  an  $l$  nach außen und weiter an den jeweils freien Schenkel nach außen erhält man als letzten zu  $hl$  kongruenten Winkel einen solchen, der  $k$  enthält oder als freien Schenkel besitzt.

Dieser Satz wird sonst unter Benutzung einer Spiegelung bewiesen; man vergleiche H. G. 7. Aufl. S. 39.

Gruppe N. Die Form der *Axiome der Nachbarschaft* läßt sich kurz etwa so umreißen: Zu einer Figur  $\mathfrak{A}$  einer bestimmten Art gibt es stets eine Figur  $\mathfrak{B}$  einer bestimmten Art mit folgender (nicht an Hand der voranstehenden Axiomgruppen erkennbaren) Eigenschaft: Es gibt keine Strecke, die zugleich in einer vorgegebenen Kongruenz- oder Lagebeziehung zu  $\mathfrak{A}$  und in einer (anderen) vorgegebenen Kongruenz- oder Lagebeziehung zu  $\mathfrak{B}$  stände.

Axiom N1. Eine Gerade liegt nicht beliebig nahe an einem nicht auf ihr liegenden Punkt, d. h. es gibt eine Strecke, die kleiner ist als jede Strecke, welche auf einem durch den Punkt gehenden Strahl von der Geraden abgeschnitten wird.

Axiom N2 (Axiom V3 der H. G.). Zu jeder Strecke  $\sigma$  gibt es ein Dreieck, das keine zu  $\sigma$  kongruente Strecke enthält.

Gruppe E. Als *Existenzaxiome* für eine Figur sei eine Gruppe von Axiomen bezeichnet, die sich bei Voraussetzung der Axiome A0, 1 leicht algebraisch umgrenzen läßt, die jedoch hier allgemein so gekennzeichnet werden möge: Zu einer Figur bestimmter Art, in der keine Kongruenz vorausgesetzt ist, wird die Existenz eines Punktes (oder mehrerer) gefordert, dessen Hinzunahme der gegebenen Figur gewisse Kongruenz- (und Lage-)Eigenschaften verleiht.

Von den unter diese Gruppe fallenden Tatbeständen läßt sich gerade der einfachste — die Halbierbarkeit der Winkel — so deuten, daß durch den geforderten Strahl eine Kongruenz bei ungleichsinniger Bezogenheit hergestellt wird. Deshalb soll dieser Satz, dessen Verwendung als Axiom manchen Beweis erheblich abkürzen würde, vermieden werden. Sowohl ein Entartungsfall des genannten Satzes als auch das andere Existenzaxiom werden lediglich zur Demonstration ihres Gewichtes mit herangezogen; und nur in einigen wenigen Axiomensystemen wird auf sie Bezug genommen werden.

Axiom E1. Zu drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten  $O, A, B$  gibt es stets zwei auf den Strahlen  $OA$  bzw.  $OB$  gelegene Punkte  $C$  bzw.  $D$ , für die  $OC \equiv OD$  gilt, wobei die Geraden  $AD, BC$  parallel sind.

Bei Zugrundelegung einer Streckenrechnung drückt das Axiom die Forderung der mittleren Proportionale aus.

Axiom E2. Es gibt rechte Winkel (man vergleiche die Bemerkung zu Axiom W 2).

Gruppe S. Die *Spiegelungsaxiome* sind für ungleichsinnig bezogene Figuren das, was die Bewegungsaxiome für gleichsinnig bezogene Figuren sind. Diese Axiome werden wesentlich zum Zwecke ihrer *Zurückführung auf andere* angeführt.

Axiom S1 (Axiom III 7 der H. G. 6. Aufl.). Die Winkeladdition ist kommutativ, d. h.: Ist  $ab \equiv ef$ ,  $bc \equiv de$  und liegt  $b$  in  $ac$ ,  $e$  in  $df$ , so ist stets  $ac \equiv df$ . — Bei Zugrundelegung der Axiome  $F, B0$  ist diese Formulierung äquivalent der folgenden: Ein Strahlentripel mit gemeinsamem Scheitel sei auf ein (anderes) Strahlentripel mit gemeinsamem Scheitel ungleichsinnig bezogen, wobei zwei Winkel des ersten Tripels den homologen Winkeln kongruent seien; dann ist auch sein dritter Winkel dem homologen kongruent.

Axiom S2. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent.

Zur Verwendung dieses Satzes als Axiom vergleiche man Fußnote 11).

Axiom S3 ( $B0$  und S3 bilden Axiom III 5 der H. G.). Zwei Dreiecke seien ungleichsinnig bezogen, und zwei Seiten des einen Dreiecks sowie der eingeschlossene Winkel seien den homologen Stücken kongruent; dann sind auch die anderen Winkel dieses Dreiecks den homologen Winkeln kongruent.

Die folgenden *Symbole* werden durchweg verwendet:

Strahlen (d. s. in der Terminologie der H. G. Halbstrahlen) werden durch ihren Scheitel und einen ihrer Punkte oder durch einen kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet;  $\bar{h}$  ist die zu  $h$  gehörige Gerade,  $\bar{h}$  die rückwärtige Verlängerung von  $h$  auf  $\bar{h}$ . — Ein von dem Punkte  $O$  ausgehender Strahl wird kurz  $O$ -Strahl genannt.

Bei irgendwelchen Strahlen  $h, k, l, \dots, p, m$  mit gemeinsamem Ursprung soll das Symbol  $\curvearrowright h, k, l, \dots, p, m$  (bzw.  $\curvearrowleft h, k, l, \dots, p, m$ ) ausdrücken, daß  $k$  links (bzw. rechts) von  $h$ ,  $l$  links (bzw. rechts) von  $k, \dots, m$  links (bzw. rechts) von  $p$  und auch noch von  $h$  liegt.



Strecken werden durch ihre Endpunkte oder durch einen kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet;  $\bar{\sigma}$  ist die Länge der Strecke  $\sigma$ .

Die Zuordnung eines reellen Körpers  $\Omega$  zu einer Geometrie, in der die Begriffe Punkt, Gerade, Inzidenz und Anordnung definiert sind, sei als *deskriptive* Zuordnung bezeichnet, wenn sie von folgender Art ist:

$\alpha$ ) Die Punkte der Geometrie entsprechen umkehrbar eindeutig den Zahlenpaaren des Körpers  $\Omega$ ; die Geraden entsprechen umkehrbar eindeutig den Zahlenverhältnissen  $a:b:c$  ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ) aus  $\Omega$  in der Weise, daß die Gleichung  $ax + by + c = 0$  das Kriterium der Inzidenz des „Punktes  $(x, y)$ “ mit der „Geraden  $a:b:c$ “ abgibt.

$\beta$ ) Die Anordnung der Punkte einer Geraden entspricht der Anordnung ihrer Abszissen bzw. Ordinaten.

Einige bekannte Tatsachen seien als Hilfssätze (1)–(4) über die deskriptive Zuordnung zusammengefaßt.

Hilfssatz (1). In jeder „deskriptiven Geometrie“ gelten die Grundregeln der Vektorgeometrie, insbesondere auch der *Zweistrahlsatz*: Die beiden Geraden, welche die Endpunkte der vom gleichen Punkte ausgehenden (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren  $x, y$  bzw.  $ax, ay$  ( $a$  in  $\Omega$ ) verbinden, sind parallel.

Hilfssatz (2). Jeder Geometrie, in der die Hilbertschen Axiome I, II, IV\*<sup>13)</sup> und das Axiom  $P$  gelten, läßt sich ein reeller „deskriptiver“ Koordinatenkörper zuordnen<sup>14)</sup>; umgekehrt läßt sich jedem reellen Körper unter Zugrundelegung der gegebenen Anordnung eine „deskriptive“ Geometrie zuordnen; in dieser gelten die Axiome I, II, IV\* und — wie man an Hand von (1) erkennt — die Axiomgruppe  $P$ .

Hilfssatz (3). Bei einer deskriptiven Zuordnung sind die Seiten einer Geraden  $a:b:c$  durch das Vorzeichen des Ausdrucks  $ax + by + c$  unterschieden.

Hilfssatz (4). Bei Zugrundelegung der Axiome  $F, B0$  ist  $A0$  notwendig und hinreichend für den Umstand, daß  $\Omega$  archimedisch ist (d. h. bis auf Isomorphie aus reellen Zahlen besteht).

Hilfssatz (5). Auf Grund der Axiome  $F, B0, W1$  lassen sich Winkel unabhängig von ihrer Lage zueinander und von der Art ihrer Antragung in eindeutiger Weise auf ihre Größe hin vergleichen.

<sup>13)</sup> H. G. 7. Aufl., S. 83.

<sup>14)</sup> H. G. 7. Aufl., S. 112f.



## III.

Als *kongruente Abbildung* werde eine Punktzuordnung bezeichnet, die jeder Figur eine *gleichsinnig bezogene* Figur zuordnet, die mit der ursprünglichen in allen homologen Stücken übereinstimmt. Offenbar gibt es bei Gültigkeit von  $F, B0$  genau eine kongruente Abbildung, die einen gegebenen Strahl in einen gegebenen Strahl überführt. Eine kongruente Abbildung mit dem Fixpunkt  $O$  heiße *Drehung um  $O$*  oder  *$O$ -Drehung*.

Satz 1. Zur Gültigkeit der Axiomgesamtheit  $F, P, B0, K0$  ist bei deskriptiver Zuordnung zu einem reellen Körper  $\Omega$  notwendig und hinreichend, daß die kongruenten Abbildungen sich durch eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  von Transformationen der Gestalt

$$(*) \quad \begin{aligned} x' &= ax + by + e, \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned}$$

( $a, \dots, f$  in  $\Omega$ ,  $ad - bc > 0$ ) darstellen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$\kappa$ .  $\mathfrak{G}$  enthält alle „Verschiebungen“, d. h. alle Transformationen der Gestalt  $x' = x + e$ ,  $y' = y + f$  ( $e, f$  in  $\Omega$ ).

$\lambda$ . Jedes Element von  $\Omega$  sowie auch der Wert  $\infty$  treten in genau zwei homogenen Transformationen von  $\mathfrak{G}$  als Quotient der vorderen Koeffizienten,  $a : c$ , auf.

$\mu$ .  $\mathfrak{G}$  enthält die Transformation  $U \equiv x' = -x$ ,  $y' = -y$ .

Eine Metrik dieser Art sei als *Affinitätenmetrik* bezeichnet.

1. Die Affinitätenmetrik besitzt die folgenden (weiteren) Eigenschaften:

$\alpha$ . Die kongruenten Abbildungen bilden eine Gruppe.

$\beta$ . Eine Gerade der Geometrie wird durch jede kongruente Abbildung anordnungstreu in eine Gerade der Geometrie übergeführt.

$\gamma$ . Es gibt genau eine kongruente Abbildung, die einen gegebenen Strahl  $h$  in einen gegebenen Strahl  $h'$  überführt.

$\delta$ . Zu zwei Punkten gibt es eine kongruente Abbildung, die sie vertauscht.

$\varepsilon$ . Eine kongruente Abbildung, die einen Strahl  $h$  in einen Strahl  $h'$  überführt, führt jeden links (bzw. rechts) von  $h$  gelegenen Punkt in einen links (bzw. rechts) von  $h'$  gelegenen Punkt über.

Eine kongruente Abbildung aus  $\mathfrak{G}$  heiße *elliptisch*, *parabolisch* oder *hyperbolisch*, je nachdem die Diskriminante  $(a - d)^2 + 4bc < 0$ ,  $= 0$  oder  $> 0$  ist. Dann gilt noch:

$\zeta$ . Es gibt außer  $U$  und  $U^3 = \mathfrak{I}$  keine parabolische kongruente Abbildung. (Diese Eigenschaft wird erst an späterer Stelle benötigt.)

Die Eigenschaft  $\alpha$  gehört zur Definition der Affinitätenmetrik,  $\beta$  ist evident,  $\delta$  folgt aus  $\kappa$  und  $\mu$ ,  $\varepsilon$  ergibt sich bei Benutzung des Hilfs-

satzes (3) aus der Bedingung  $ad - bc > 0$ . — Die  $O$ -Strahlen  $-O = (0, 0)$ , die zu den Strahlen  $h, h'$  der Bedingung  $\gamma$  parallel sind, seien mit  $k$  bzw.  $k'$  bezeichnet. Wegen  $\alpha$  gilt offenbar die Bedingung  $\gamma$  für  $h, h'$ , wenn sie auf  $k, k'$  zutrifft. Die Affinitätenmetrik enthält nun genau je eine  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{D}'$ , die den Strahl  $x > 0$ ,  $y = 0$  in  $k$  bzw.  $k'$  überführt. Die Drehung  $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}^{-1}$  führt  $k$  in  $k'$  über; umgekehrt: führt die  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}^*$   $k$  in  $k'$  über, so ist wegen  $\alpha$   $\mathfrak{D}^*\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ . Also gilt auch  $\gamma$ . — Würde endlich  $\zeta$  nicht gelten, so würde es eine von  $\mathfrak{U}, \mathfrak{J}$  verschiedene  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}$  mit zur Geometrie gehöriger Fixgeraden geben. Dann würde entweder  $\mathfrak{D}$  oder  $\mathfrak{D}\mathfrak{U}$  einen  $O$ -Strahl festhalten, ohne die Identität zu sein; dies widerstreitet der Eigenschaft  $\gamma$ .

Bei deskriptiver Zuordnung zu einem reellen Körper sind nach Hilfsatz (2) die Axiome I, II, IV\*,  $P$  gültig. In H. G. A. II, 7. Aufl., ist unter Zugrundelegung der Axiome I, II, IV\* gezeigt, daß eine Metrik mit den Eigenschaften  $\alpha - \varepsilon$  den Axiomen III 1–4, 5\*, 6 genügt; die Affinitätenmetrik führt also auf die Axiomgesamtheit  $F, P, B0$  und, wie man an Hand des Zweistrahlsatzes [Hilfsatz (1)] aus ihrer Gestalt entnimmt, auf  $K0$ .

2. Umgekehrt seien in einer deskriptiven Geometrie die Axiome  $F, P, B0, K0$  erfüllt. Werden nun in der gemäß Hilfsatz (1) durchführbaren linearen Vektorgeometrie zwei Vektoren kongruent genannt, wenn die zugehörigen Strecken kongruent sind, so erkennt man an Hand von  $B0$ :

Gleiche Vektoren sind kongruent,  
und weiter an Hand von  $K0$ :

Aus  $x \equiv x'$  folgt  $ax \equiv ax'$  ( $a$  in  $\Omega$ ).

Diese Sätze gestatten, auf die übliche Weise die angegebene Gestalt (\*) einer kongruenten Abbildung herzuleiten — der letztgenannte Vektorensatz wird beim Übergang von der homogenen Koordinatensubstitution zur Drehung der Punktgesamtheit benutzt —, wobei die Eigenschaft  $\alpha$  erfüllt ist.

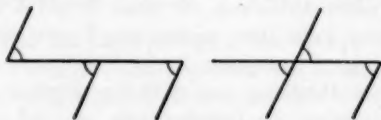


Fig. 1 a, b.

An Hand der vorstehenden Figuren folgert man — ohne Benutzung einer Winkelannahme wie  $W1$  oder  $S1$  — aus der Gleichheit der Wechselwinkel, welche eine Folge von  $F, B0$  ist, die Gleichheit der entsprechenden Winkel und weiter die Gleichheit der Scheitelwinkel. Diese

führt auf die Eigenschaft  $\mu$ . Die aus  $F, B0$  folgende eindeutige Überführbarkeit eines gegebenen Strahles in einen anderen zieht die Eigenschaft  $\lambda$  nach sich.

Satz 2. Die Unabhängigkeit des Axioms  $K0$  von den Axiomen  $F, P, B0$  ist äquivalent dem folgenden algebraischen Lemma:

Es gibt einen reellen Körper  $\Omega$ , zu dem eine Gruppe  $\mathfrak{H}$  von Transformationen existiert, denen je ein (sich auf Summe, Produkt und Anordnung erstreckender) Automorphismus  $\mathfrak{A}$  des Körpers  $\Omega$  zugrunde liegt, derart, daß

$$(**) \quad \begin{aligned} x' &= a \mathfrak{A}(x) + b \mathfrak{A}(y), \\ y' &= c \mathfrak{A}(x) + d \mathfrak{A}(y) \end{aligned}$$

( $a, \dots, d$  in  $\Omega$ ,  $ad - bc > 0$ ); außer den Eigenschaften  $\lambda, \mu$  (S. 547) soll für  $\mathfrak{H}$  erfüllt sein:

v. Nicht alle in  $\mathfrak{H}$  eingehenden Automorphismen sind die Identität.

1. Die durch Zufügung der Verschiebungen zu  $\mathfrak{H}$  entstehende Abbildungsgruppe besitzt die auf S. 547 aufgeführten Eigenschaften  $\alpha - \varepsilon$ ; legt man sie also in einer zu  $\Omega$  gehörigen deskriptiven Geometrie als Kongruenzgruppe zugrunde, so sind die Axiome  $F, P, B0$  erfüllt. Sei nun  $p$  ein Element aus  $\Omega$ , das durch einen unter v geforderten Automorphismus  $\mathfrak{A}_0$  in ein Element  $\mathfrak{A}_0(p) \neq p$  übergeht.  $a, b, c, d$  seien die Koeffizienten einer mit  $\mathfrak{A}_0$  zusammengehörigen Transformation aus  $\mathfrak{H}$ ; weiter sei  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $C = (p, 0)$ ,  $D = (a, c)$ ,  $E = (a \mathfrak{A}_0(p), c \mathfrak{A}_0(p))$ . Dann gilt  $OA \equiv OD$ ,  $OC \equiv OE$ , nicht aber  $AD \parallel CE$ ; Axiom  $K0$  ist also ungültig.

2. Umgekehrt sei in einer deskriptiven Geometrie 3, in der die Axiome  $F, P, B0$  gelten, eine  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}$  gegeben; diese führt das Dreieck  $OAB - O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$  — in ein Dreieck  $OA'B'$  über. Diejenige homogene ganzlineare Transformation, die  $O$  in sich,  $A'$  in  $A$  und  $B'$  in  $B$  überführt, heiße  $\mathfrak{L}$ . Die Punkttransformation  $\mathfrak{L}\mathfrak{D}$  hält die Punkte  $O, A, B$  fest; weiter bleiben Anordnung, Inzidenz und Parallelität bei ihr erhalten. Die konstruktiven Definitionen von Summe und Produkt in der „Desarguesschen“ Streckenrechnung, welche die deskriptive Zuordnung vermittelt [Hilfssatz (2)], lassen nunmehr erkennen, daß diese beiden Operationen gegen  $\mathfrak{L}\mathfrak{D}$  invariant sind. Da die Dreiecke  $OAB, OA'B'$  gleichsinnig bezogen sind, ist die Determinante von  $\mathfrak{L}$  positiv. —  $\mathfrak{D}$  hat also die Gestalt (\*\*). Die Gruppe der  $O$ -Drehungen der Geometrie 3 besitzt offenbar die Eigenschaften  $\lambda, \mu$ . Somit ist durch die Gruppe, die bei Hinzufügung der Verschiebungen entsteht, eine Affinitätenmetrik gegeben, sobald die Erfüllung von v nicht möglich ist. Dann aber gilt nach Satz 1 das Axiom  $K0$ .

Satz 3. Im Rahmen der Axiome  $F, B0, A0$  sind die Sätze  $W1, A1, S1$  einander äquivalent.

1. Aus  $F, B0, A0$  folgen  $P$  und  $K0$ .

Die übliche Methode, bei Zugrundelegung einer Einheitsstrecke den Strecken reelle Zahlen als „Längen“ derart zuzuordnen, daß kongruenten Strecken gleiche Längen zukommen, benutzt keine Spiegelung; sie ist an Hand der Axiome  $F, B0, A0$  durchführbar, wobei für die erhaltenen Längen der „Fundamentalsatz der Proportionenlehre“ gilt: Auf den Schenkeln eines Winkels mit dem Scheitel  $O$  mögen von zwei parallelen Geraden  $g$  bzw.  $g'$  die Punkte  $A$  und  $B$  bzw.  $A'$  und  $B'$  abgeschnitten werden; dann ist  $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$ . Dieser Satz enthält  $K0$  in sich und führt weiter auf  $P$ .

Somit kann ein deskriptives Koordinatensystem eingeführt werden; die zugehörige Metrik ist nach Satz 1 eine Affinitätenmetrik.

2. Die Annahme, alle kongruenten Abbildungen  $\neq U, \mathfrak{I}$  seien elliptisch, ist im Rahmen der Axiome  $F, P, B0, K0$  notwendig für jedes der Axiome  $W1, A1, S1$  und hinreichend für  $W1$ , im Rahmen der Axiome  $F, B0, A0$  auch hinreichend für  $A1, S1$ .

Wenn  $W1$  erfüllt ist, so gilt für jede kongruente Abbildung: wird der Strahl  $h$  in  $h'$ ,  $k$  in  $k'$  übergeführt, so ist bei  $\curvearrowright h h'$  auch  $\curvearrowright k k'$ . Hieraus ergibt sich bei Heranziehung der Eigenschaft  $\zeta$  einer Affinitätenmetrik, daß alle von  $U$  und  $\mathfrak{I}$  verschiedenen Abbildungen elliptisch sind. — Die Umkehrung dieses Schlusses ist evident.

Nach Eigenschaft  $\zeta$  ist jede nicht mit  $U$  oder  $\mathfrak{I}$  zusammenfallende und nicht elliptische  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}^*$  hyperbolisch; diejenige der beiden Drehungen  $\mathfrak{D}^*, \mathfrak{D}^*U$ , die jeden von  $O$  verschiedenen Punkt  $P$  in demjenigen durch die Fixgeraden bestimmten Winkel beläßt, in dem er liegt, werde mit  $\mathfrak{D}$  bezeichnet. Die Winkelfolge  $\angle \mathfrak{D}^i(P) O \mathfrak{D}^{i+1}(P)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , ist dann nichtarchimedisch. Ist umgekehrt eine nichtarchimedische Winkelfolge  $\angle \mathfrak{D}^i(P) O \mathfrak{D}^{i+1}(P)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , vorgelegt, d. h. gibt es einen  $O$ -Strahl, welcher in keinem Winkel  $\angle PO \mathfrak{D}^i(P)$  liegt und mit keinem Strahl  $O \mathfrak{D}^i(P)$  zusammenfällt, so ersieht man bei Gültigkeit von  $A0$  [Hilfssatz (4)] unter Heranziehung von  $\zeta$ , daß  $\mathfrak{D}$  hyperbolisch ist.

Der das Axiom  $S1$  betreffende Rest der Behauptung 2 wird durch 3 bewiesen sein.

3. Im Rahmen der Axiome  $F, B0, A0$  sind die Axiome  $W1, S1$  einander äquivalent.

Wegen der Eindeutigkeit der Winkelantragung ist  $W1$  eine unmittelbare Folge von  $S1$ ; es bleibt zu zeigen, daß  $S1$  aus  $W1$  folgt. Indem

man den durch die  $O$ -Drehung  $\mathcal{D}$  aus einem  $O$ -Strahl  $a$  hervorgehenden  $O$ -Strahl mit  $d(a)$  bezeichnet, läßt sich nach einem Schluß aus Absatz 2 dieses Beweises das Axiom  $W1$  für den folgenden Gedankengang so formulieren:

$W1^0$ . Wenn  $\hookrightarrow h, d(h)$ , so  $\hookrightarrow k, d(k)$ .

Der Punkt  $(0, 0)$  heiße  $O$ . Die Projektivität, die von einer  $O$ -Drehung der in Absatz 1 und 2 eingeführten Metrik auf der Geraden  $x = 1$  abgeschnitten wird, heiße  $\mathfrak{P}[\mathcal{D}]$ ; ihre Fixpunkte seien (in jeweils passender Reihenfolge) mit  $F_{1,2}[\mathcal{D}]$  bezeichnet, — sie sind nach Absatz 2 bei  $\mathcal{D} \neq \mathcal{U}, \mathcal{I}$  imaginär; auch braucht der Imaginärteil ihrer Ordinaten nicht zum Koordinatenkörper zu gehören.

3, 1. Aus

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_i(h) = d(h); \quad \hookrightarrow d_i(h), d_{i+1}(h) \quad [i = 1, 2, \dots]$$

folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_i(k) = d(k).$$

[Es ist sinnvoll, von Limes-Beziehungen gewisser  $O$ -Strahlen zu sprechen, da nach Hilfssatz (4) der Koordinatenkörper archimedisch ist]. Von einem Index ab gilt  $\hookrightarrow d_i(h), d(h)$  und nach  $W1^0$  auch  $\hookrightarrow d_i(k), d(k)$ . Wenn nun nicht  $\lim d_i(k) = d(k)$  gilt, so gibt es in der betrachteten Geometrie einen  $O$ -Strahl  $l$  mit  $\hookrightarrow d_i(k), l, d(k)$ . Setzt man  $l = d^*(k)$ , so ergibt sich — wiederum nach  $W1^0$  —  $\hookrightarrow d_i(h), d^*(h), d(h)$ : diese Beziehung steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

3, 2. Ist für eine  $O$ -Drehung  $\mathcal{D} \neq \mathcal{U}, \mathcal{I}$  und einen  $O$ -Strahl  $h$

$$\lim d_i(h) = d(h); \quad \hookrightarrow d_i(h), d_{i+1}(h) \quad [i = 1, 2, \dots],$$

so ist

$$\lim F_{1,2}[\mathcal{D}_i] = F_{1,2}[\mathcal{D}].$$

$\mathfrak{P}[\mathcal{D}]$  bzw.  $\mathfrak{P}[\mathcal{D}_i]$  habe die Gestalt

$$t' = \frac{c + dt}{a + bt} \quad \text{bzw.} \quad t' = \frac{c_i + d_i t}{a_i + b_i t}.$$

Indem man im folgenden nur genügend große Indizes  $i$  betrachtet, kann man  $\mathcal{D}_i \neq \mathcal{U}, \mathcal{I}$  annehmen. Dann treten keine reellen Fixpunkte auf; daher gilt  $ad - bc, b, b_i, c, c_i \neq 0$ . Nach Absatz 3, 1 gilt für alle  $t$  des Koordinatenkörpers sowie für  $t = \infty$  die Beziehung

$$\lim \frac{c_i + d_i t}{a_i + b_i t} = \frac{c + dt}{a + bt}.$$

Hieraus errechnet man unter Benutzung der genannten Ungleichheiten:

$$\lim \frac{a_i}{b_i} = \frac{a}{b}, \quad \lim \frac{c_i}{b_i} = \frac{c}{b}, \quad \lim \frac{d_i}{b_i} = \frac{d}{b};$$

dies führt auf

$$\lim F_{1,2}[\mathfrak{D}_i] = F_{1,2}[\mathfrak{D}].$$

3, 3. Die Ausübung der Drehungen um  $O$  ist kommutativ.

Gegeben seien zwei  $O$ -Drehungen  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^* (\neq \mathfrak{U}, \mathfrak{I})$ . Ein  $O$ -Strahl  $h$  werde durch  $\mathfrak{D}$  in  $k$ , durch  $\mathfrak{D}^*$  in  $l$  übergeführt, und es sei etwa  $\hookrightarrow h, k, l$ . Weiter seien zwei  $O$ -Strahlenfolgen  $k_i, l_i$  mit  $\lim k_i = k; \hookrightarrow h, k_i, k$ ;  $\lim l_i = l; \hookrightarrow h, l_i, l$  bestimmt. Diejenige Drehung, die den rechten Schenkel des kleineren [Hilfssatz (5)] der beiden Winkel  $k_i k, l_i l$  in den linken Schenkel überführt, sei mit  $\mathfrak{D}_i$  bezeichnet. Da nach Absatz 2 A 1 eine Folge von  $W1$  ist, gibt es zu jedem Index  $i$  zwei natürliche Zahlen  $n_i, m_i$  derart, daß  $\hookrightarrow d_i^{n_i}(h), k$ , dagegen nicht  $\hookrightarrow d_i^{n_i+1}(h), k; \hookrightarrow d_i^{m_i}(h), l$ , dagegen nicht  $\hookrightarrow d_i^{m_i+1}(h), l$ . Mit Hilfe des Axioms  $W1$  erkennt man aus der Definition von  $\mathfrak{D}_i$ :

$$k_i = d_i^{n_i}(h) \quad \text{oder} \quad \hookrightarrow k_i, d_i^{n_i}(h), k$$

und

$$l_i = d_i^{m_i}(h) \quad \text{oder} \quad \hookrightarrow l_i, d_i^{m_i}(h), l;$$

man kann somit aus den Folgen  $d_i^{n_i}$  bzw.  $d_i^{m_i}$  Teilfolgen  $d_j^{n_j}$  bzw.  $d_j^{m_j}$  auswählen, für die

$$\lim d_j^{n_j}(h) = k; \quad \hookrightarrow d_j^{n_j}(h), d_{j+1}^{n_{j+1}}(h)$$

bzw.

$$\lim d_j^{m_j}(h) = l; \quad \hookrightarrow d_j^{m_j}(h), d_{j+1}^{m_{j+1}}(h)$$

gilt. Daher gilt nach Absatz 3, 2:

$$\lim F_{1,2}[\mathfrak{D}_j^{n_j}] = F_{1,2}[\mathfrak{D}], \quad \lim F_{1,2}[\mathfrak{D}_j^{m_j}] = F_{1,2}[\mathfrak{D}^*];$$

da  $\mathfrak{D}_j^{n_j}, \mathfrak{D}_j^{m_j} \neq \mathfrak{U}, \mathfrak{I}$  ist, so gilt

$$F_{1,2}[\mathfrak{D}_j^{n_j}] = F_{1,2}[\mathfrak{D}_j^{m_j}],$$

also ist

$$F_{1,2}[\mathfrak{D}] = F_{1,2}[\mathfrak{D}^*].$$

Man hat mithin  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}^*\mathfrak{D}$ . Indem man gegebenenfalls  $\mathfrak{D}^{-1}$  statt  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{D}^{*-1}$  statt  $\mathfrak{D}^*$  betrachtet, kann man stets auf den eingangs angenommenen Fall  $\hookrightarrow h, k, l$  rekurrieren. — Mit der Kommutativität der Ausübung der  $O$ -Drehungen ist offenbar der Satz  $S1$  äquivalent.

Satz 4. Im Rahmen der Axiome  $F, B0, A0, E2$  ist den Axiomen  $W1, A1, S1$  das Axiom  $W2$  äquivalent.

Aus einem Gegenbeispiel gegen  $W2$  konstruiert man leicht ein Gegenbeispiel gegen  $W1$ ; es bleibt also nach Satz 3 nur zu zeigen, daß im betrachteten Rahmen etwa  $W1$  aus  $W2$  folgt.

1. Die im gegebenen Axiomenrahmen auf S. 548 hergeleitete Gleichheit der Scheitelwinkel gestattet mit Benutzung von  $F, B0$  an Hand der nebenstehenden Figur zu erkennen: zwei Winkel, welche sich in einem Sinne zu einem rechten ergänzen, ergänzen sich auch im anderen Sinne zu einem rechten. — Bei Heranziehung von  $W2$  läßt sich diese Tatsache als Spezialfall von  $S1$  auffassen, und ein Beispiel für Nichtzutreffen von  $W1$  auf rechte Winkel würde dann auf ein Gegenbeispiel gegen diesen Spezialfall führen.

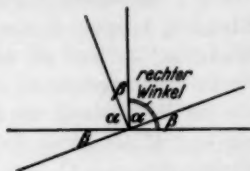


Fig. 2.

2. Gehören die Koeffizienten des Parametergleichungspaares, welches den Limes einer  $O$ -Strahlenfolge darstellt, nicht alle zum archimedischen Koordinatenkörper  $\Omega$  (vgl. S. 551), so kann man doch von einem „idealen“  $O$ -Strahl reden; in dieser Ausdrucksweise seien Strahlen, die möglicherweise ideal sind (und somit nicht an Winkelkongruenzen teilhaben können), stets durch eine Tilde gekennzeichnet.

Gemäß Axiom  $E2$  läßt sich an jeden Strahl einer  $O$ -Strahlenfolge  $h_i$  mit  $\lim h_i = \tilde{h}$  und  $\hookrightarrow h_i, \tilde{h}$  (bzw.  $\curvearrowright h_i, \tilde{h}$ ) nach links (bzw. rechts) ein rechter Winkel  $h_i k_i$  antragen. Dann gibt es ein  $i$  mit  $\hookrightarrow k_i, \tilde{h}$  (bzw.  $\curvearrowright k_i, \tilde{h}$ ). — Es gelte im Gegenteil für alle  $i$ :  $\hookrightarrow k_i, \tilde{h}$  (bzw.  $\curvearrowright k_i, \tilde{h}$ ) oder  $k_i = \tilde{h}$ . Im Winkel  $\tilde{h} \tilde{h}_1$  gibt es einen  $O$ -Strahl  $p$ ; an diesen werde nach rechts (bzw. links) der rechte Winkel  $p q$  angetragen. Im Falle  $\hookrightarrow q, \tilde{h}$  (bzw.  $\curvearrowright q, \tilde{h}$ ) gibt es nun einen rechten Winkel  $h_i k_i$  im Winkel  $p q$ ; im Falle  $\hookrightarrow q, \tilde{h}$  (bzw.  $\curvearrowright q, \tilde{h}$ ) oder  $q = \tilde{h}$  liegt  $p q$  im rechten Winkel  $k_i \tilde{h}_1$ . Beide Tatsachen stehen im Widerspruch zu dem in Absatz 1 bewiesenen Zutreffen von  $W1$  auf rechte Winkel.

3.  $W1$  gelte nicht. Dann gibt es nach Absatz 2 des Beweises für Satz 3 und wegen der Eigenschaft  $\zeta$  (S. 547) eine hyperbolische  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}$ ; diese hat zwei verschiedene reelle Fixgeraden  $\tilde{f}, \tilde{g}$ . Für die  $O$ -Strahlen  $p, q$  gelte  $\hookrightarrow \tilde{g}, p, \tilde{f}$  und  $\hookrightarrow \tilde{f}, q, \tilde{g}$ . Wird die positive oder negative ganze Zahl  $n$  dem Betrage nach genügend groß, so nähern sich [Hilfsatz (4)] die Strahlen  $d^n(p)$  und  $d^n(q)$  beliebig dem Strahle  $\tilde{f}$  oder den

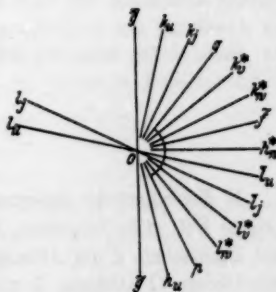


Fig. 3.

Strahlen  $\tilde{g}$  bzw.  $\tilde{g}$ . Es gibt also vier  $O$ -Strahlenfolgen  $h_i, k_i, h_i^*, k_i^*$  mit  $\lim h_i = \tilde{g}$ ,  $\lim k_i = \tilde{g}$ ,  $\lim h_i^* = \tilde{f}$ ,  $\lim k_i^* = \tilde{f}$ ;  $h_i k_i \equiv h_i^* k_i^* \equiv p q$ ;  $\hookrightarrow k_i, \tilde{g}$ ;  $\hookrightarrow k_i^*, \tilde{f}$ . — An jeden Strahl  $k_i$  sei nach links der rechte



Winkel  $k_i l_i$  angetragen; nach Absatz 2 gibt es einen Index  $j$  mit  $\curvearrowright l_j, \tilde{g}$ . Aus der Bestimmung der Folge  $h_i$  ergibt sich nun, daß es einen Index  $u > j$  mit  $\curvearrowright \tilde{g}, h_u, \tilde{l}_j$  gibt. Auf Grund des Erfülltseins von  $W1$  für rechte Winkel gilt  $\curvearrowright \tilde{g}, \tilde{l}_j, \tilde{l}_u$ . In dem zu  $p, q$  kongruenten Winkel  $k_u h_u$  gibt es also einen Strahl  $\tilde{l}_u$  derart, daß  $k_u \tilde{l}_u$  ein rechter Winkel ist. — Nun sei weiter an jeden Strahl  $k_i^*$  nach rechts der rechte Winkel  $k_i^* l_i^*$  angetragen; nach Absatz 2 gibt es einen Index  $v$  mit  $\curvearrowright k_i^*, \tilde{f}$ . Aus der Bestimmung der Folge  $h_i^*$  ergibt sich, daß es einen Index  $w > v$  mit  $\curvearrowright \tilde{f}, h_w^*, l_v^*$  gibt. Auf Grund des Erfülltseins von  $W1$  für rechte Winkel gilt  $\curvearrowright \tilde{f}, l_v^*, l_w^*$ . Im rechten Winkel  $k_w^* l_w^*$  gibt es also einen Strahl  $h_w^*$  derart, daß  $k_w^* h_w^*$  zu  $p, q$  kongruent ist. Die Antragung der Winkel  $k_u h_u$  und  $k_w h_w$  an  $k_i^*$  nach rechts führt nun an Hand von  $W2$  auf einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Winkelantragung.

Im Anschluß an die Benutzung des Axioms  $E2$  in Satz 4 sei darauf hingewiesen, wie stark bereits das Axiom  $E2$  ist; beispielsweise möge gezeigt werden, wie seine Heranziehung den Beweis von  $S1$  aus  $W1$  (Beweis zu Satz 3, Absatz 3) abkürzt:

Beweis von  $S1$  aus  $F, B0, A0, W1, E2$ .

Auf Grund von  $E2$  kann das im Beweise zu Satz 3, Absatz 1 eingeführte Koordinatensystem als rechtwinklig vorausgesetzt werden. Seine positiven Halbachsen  $p, q$ , für die etwa  $\curvearrowright p, q$  gelte, mögen durch eine  $O$ -Drehung in  $p', q'$  übergeführt werden; es gilt auch  $\curvearrowright p', q'$ . Aus  $W1^0$  und dem Zutreffen des Satzes  $S1$  auf rechte Winkel (Absatz 1 des Beweises von Satz 4) ergibt sich nun  $p p' \equiv q q'$ . Bei der in Absatz 2 des Beweises von Satz 1 erwähnten Herleitung der Formeln für die kongruente Abbildung hat man dann  $a = d, -b = c$  zu setzen. Damit ist die Ausübung der  $O$ -Drehungen kommutativ.

Satz 5. Die Sätze  $W1, A1, S1$  folgen aus jedem der vier Axiomensysteme

$$F, B0, A0, \begin{Bmatrix} B2 \\ K1 \\ N1 \\ E1 \end{Bmatrix}.$$

1. Es mögen die Axiome  $F, B0, A0$ , dagegen nicht die äquivalenten Axiome  $W1, A1, S1$  gelten. Es gibt nach Absatz 2 des Beweises von Satz 3 und Eigenschaft  $\zeta$  der Affinitätenmetrik eine von der Identität und von  $U$  verschiedene  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D}$  mit reellen, verschiedenen, idealen (S. 553) Fixgeraden  $\tilde{f}, \tilde{g}$ . Man erkennt (etwa mit Hilfe einer linearen Transformation, durch die die Fixgeraden zu Achsen werden), daß die wiederholte Ausübung entweder von  $\mathfrak{D}$  oder von  $\mathfrak{D}^{-1}$  jeden von  $O$  verschiedenen Punkt beliebig weit wegführt, ohne ihn aus demjenigen, durch  $\tilde{f}, \tilde{g}$  bestimmten Winkelraum, in dem er liegt, hinauszubringen.

2. Gegeben sei ein von  $O$  verschiedener Punkt  $P$ . Die Gerade  $k = P\mathfrak{D}(P)$  trifft, da sie zur betrachteten Geometrie gehört, je einen zu den idealen Geraden  $\bar{f}$  bzw.  $\bar{g}$  gehörigen  $O$ -Strahl  $\bar{f}$  bzw.  $\bar{g}$ . Es gibt im Winkel  $\bar{f}\bar{g}$  einen Punkt  $Q$ , für den  $OP \equiv OQ$  ist; nach Absatz 1 gibt es einen Punkt  $\mathfrak{D}^n(Q)$  ( $n$  ganz), welcher durch  $k$  von  $O$  getrennt wird, ohne im Winkel  $\angle PO\mathfrak{D}(P)$  zu liegen; die Punkte  $P, \mathfrak{D}(P), \mathfrak{D}^n(Q)$  bilden ein Gegenbeispiel gegen  $K1$ . Der Schnittpunkt von  $k$  mit  $O\mathfrak{D}^n(Q)$  heiße  $M$ ; die Dreiecke  $OMP, OM\mathfrak{D}(P)$  zeigen die Ungültigkeit von  $B2$ .

3. Gegeben sei eine Gerade  $p$ , die  $\bar{f}$  und  $\bar{g}$  trifft, und eine natürliche Zahl  $n (> 0)$ ;  $P$  sei ein im Winkel  $\bar{f}\bar{g}$  gelegener Punkt von  $p$ . Durch den freien Endpunkt der auf  $OP$  abgetragenen Strecke  $n \cdot OP$  werde die Parallele  $q$  zu  $p$  gezogen. Nach Absatz 1 gibt es im Winkel  $\bar{f}\bar{g}$  einen Punkt  $Q$  mit  $OP \equiv OQ$ , welcher von  $O$  durch  $q$  getrennt wird. Nach dem (gemäß Absatz 1 des Beweises von Satz 3 gültigen) Fundamentalsatz der Proportionalenlehre schneidet  $p$  auf dem Strahl  $OQ$  eine Strecke ab, deren Länge kleiner als  $\frac{OP}{n}$  ist.  $N1$  gilt also nicht.

4. Aus  $F, P, B0, K0, E1$  folgt  $W1$ .

Gemäß Absatz 2 des Beweises zu Satz 1 gilt für eine Zahl  $a$  des deskriptiven Koordinatenkörpers  $\Omega$  [Hilfssatz (2)] mit  $x \equiv y$  auch  $ax \equiv ay$ . An Hand dieser Tatsache und des Zweistrahlensatzes [siehe Hilfssatz (1)] zieht das Axiom  $E1$  nach sich, daß jede positive Zahl in  $\Omega$  ein Quadrat ist. Dann würden die Fixgeraden einer nichtelliptischen Drehung ( $\neq U, \mathfrak{I}$ ) der Geometrie angehören, was der Eindeutigkeit der Winkelantragung widerspricht. Also ist nach Absatz 2 des Beweises für Satz 3 das Axiom  $W1$  gültig.

Satz 3 und die in Absatz 1 des Beweises für jenen Satz ausgesprochene Abhängigkeit führen nun auf die restliche Behauptung des Satzes 5.

#### IV.

Satz 6<sup>15)</sup>. Von der Axiomgesamtheit  $F, P, B0, K0, A0, N2, E2$  sind die Axiome  $W1, A1, S1$  sowie auch die Axiome  $B1, 1^*, 2, W2, K1, L^*, N1, E1, S2, 3$  unabhängig<sup>16)</sup>.

<sup>15)</sup> Die Unabhängigkeitssätze werden in der allgemeinsten, durch ihre Beweise zugelassenen Form ausgesprochen.

<sup>16)</sup> Der ursprünglich in diesem Zusammenhange von mir bewiesene Satz sprach die Äquivalenz der These „die Axiome  $W1, K1, A1, N1, E1, S1$  sind von den Axiomen  $F, P, B0, K0, A0$  unabhängig“ mit dem gruppentheoretisch-arithmetischen Satze aus:

B. Neumann bewies: Die Matrizengruppe  $\mathfrak{M}$ , die durch die unimodularen Matrizen

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & -2p+3 \\ p & -2p^2+3p+1 \end{pmatrix}$$

Es gibt einen Körper  $T$  reeller Zahlen, zu dem eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  von linearen Transformationen

$$t' = \frac{c+dt}{a+bt} \text{ mit } a, b, c, d \text{ in } T, \quad ad-bc > 0$$

existiert, welche die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

$\alpha$ ) Zu zwei Zahlen aus dem Bereich, der aus  $T$  durch Hinzufügung des Symbols  $\infty$  entsteht, gibt es genau eine Transformation aus  $\mathfrak{G}$ , die die erste in die zweite überführt.

$\beta$ ) Außer der Identität gibt es noch eine Transformation in  $\mathfrak{G}$ , die eine reelle Zahl festläßt.

Herr Prof. Bernays — welchem ich auch für einige beim Lesen des Manuskripts gemachte Vorschläge meinen besten Dank sagen möchte — hatte die Freundlichkeit, die Frage nach der *Konstruierbarkeit* einer solchen Gruppe  $\mathfrak{G}$  aufzuwerfen und unter Verzicht zunächst auf die Eigenschaft  $\beta$ ) in das Problem umzuformen, ob es eine Gruppe zweireihiger unimodularer, ganzzahliger Matrizen mit der oben für  $\mathfrak{M}$  aufgeführten Eigenschaft gebe; er fügte noch die Frage nach dem Vorkommen der Matrix  $C$  an, welches die Gültigkeit von  $E2$  sichert. Das Problem wurde von Herrn B. Neumann gelöst (Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin 1933, X). Da diese Lösung auch die Eigenschaft  $\beta$ ) der Gruppe  $\mathfrak{G}$  befriedigt, konnte hier meine ursprüngliche Äquivalenzbehauptung durch einen Unabhängigkeitssatz (Satz 6) ersetzt werden, wodurch ein Teil meines früheren Beweises in Fortfall kommt.

Eine Folgerung aus der angeführten Äquivalenzbehauptung ist übrigens die, daß die Unabhängigkeit des Axioms  $E2$  von den Axiomen  $F, P, B0, K0, A0, N2$  durch die bisher nicht bewiesene These nach sich gezogen wird: „Es gibt eine Gruppe  $\mathfrak{R}$  zweireihiger, unimodularer, ganzzahliger Matrizen mit folgenden Eigenschaften:

$\alpha$ ) jedes geordnete Paar teilerfremder ganzer Zahlen tritt bei genau einem Element der Gruppe als erste Kolonne auf;  $\beta$ )  $\mathfrak{R}$  enthält keine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ .“

Anmerkung nach Einsendung: Inzwischen hat Herr B. Neumann, welchem ich auch diese These mitteilte, eine solche Gruppe  $\mathfrak{R}$  konstruiert; sie wird durch die Matrizen

$$H_{-3p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3p-1 \\ -3p+1 & -9p^2+6p \end{pmatrix}.$$

$$H_{-3p+2} = \begin{pmatrix} 1 & 3p \\ -3p+2 & -9p^2+6p+1 \end{pmatrix}.$$

$$H_{-3p+3} = \begin{pmatrix} 1 & -p+1 \\ -3p+3 & 3p^2-6p+5 \end{pmatrix}.$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$H_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3p+1 \\ p+1 & 3p^2+4p+3 \end{pmatrix}.$$

wo  $p$  die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft, erzeugt. —  $E2$  ist demgemäß von  $F, P, B0, K0, A0, N2$  unabhängig.

$$H_{-2p} = \begin{pmatrix} 1 & -2p \\ -2p & 4p^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{-2p+3} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -2p+3 & -2p^2+3p+1 \end{pmatrix}$$

(wo  $p$  die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft) erzeugt wird, enthält die Matrix  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und besitzt die Eigenschaft: jedes geordnete Paar teilerfremder ganzer Zahlen tritt bei genau einem Element der Gruppe als erste Kolonne auf.

In der zum Körper der rationalen Zahlen gehörigen deskriptiven Geometrie seien nun als kongruente Abbildungen die Transformationen

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f,$$

wo  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  zu  $\mathfrak{M}$  gehört und  $e, f$  rationale Zahlen sind, eingeführt. Man hat dann, wie man leicht erkennt, eine Affinitätenmetrik. Daher gelten nach Satz 1 und Hilfssatz (4) die Axiome  $F, P, B0, K0, A0$ ; das Vorkommen der Matrix  $C$  in  $\mathfrak{M}$  führt auf  $E2$ . Eine Drehung um  $O(0,0)$  führt Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in ebensolche über.  $N2$  trifft dann offenbar auf die Strecke  $O(0,0)P(1,0)$  zu; auf Grund des Fundamentalsatzes der Proportionenlehre (welcher nach Absatz 1 des Beweises für Satz 3 in  $\mathfrak{G}$  gültig ist), gilt mithin  $N2$  allgemein.

Die zu den Matrizen  $H_1$  bzw.  $C$  gehörigen  $O$ -Drehungen seien mit  $\mathfrak{D}_1$  bzw.  $\mathfrak{D}_2$  bezeichnet, die Verschiebung  $x' = x + 1, y' = y$  mit  $\mathfrak{B}$ . Da  $\mathfrak{D}_1$  hyperbolisch ist, sind nach Absatz 2 des Beweises von Satz 3 die Axiome  $W1, A1, S1$  und somit nach den Sätzen 4 und 5 auch  $W2, B2, K1, N1, E1$  ungültig.  $\mathfrak{D}_1$  führt  $O$  in sich und  $P$  in  $Q(1,1)$  über:  $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_2$  bringt  $O$  nach  $P$  und  $P$  nach  $Q$ . Das Dreieck  $OPQ$  ist also gleichseitig. Da  $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_2$  den Strahl  $OP$  in den Strahl  $PQ$  überführt, müßte bei Gültigkeit der Kongruenz  $\angle POQ \equiv \angle QPO$  der Punkt  $Q$  durch diese Abbildung in den Strahl  $PO$  gebracht werden, was nicht der Fall ist. Die genannte Winkelkongruenz ist also nicht erfüllt; die Sätze  $B1, 1^*, S2, 3$  sind ungültig.

Das Axiom  $L$  setzt in seiner Formulierung die Gültigkeit von  $W1$  voraus; bei Nichtbestehen von  $W1$  wird man statt seiner das Axiom  $L^*$  betrachten (vgl. S. 543).

Daß  $L^*$  nicht erfüllt ist, lehrt die Betrachtung des bei  $R$  rechtwinkligen Dreiecks  $O(0,0)R(0,1)S(\frac{1}{2}, 1)$ ; da  $\mathfrak{D}_1$  den Punkt  $O$  in sich,  $R$  in  $(1,2)$  überführt, gilt  $OR > OS$ .

Im Anschluß an die angegebene Geometrie sei kurz die Stellung des Axioms, ein Winkel habe höchstens eine Winkelhalbierende, zu Axiom  $W2$  dargelegt. Da die Annahme zweier Halbierenden eines Winkels an Hand

von  $F, B0$  unmittelbar auf einen Widerspruch zu  $W1$  führt, so ist mit Satz 4 bewiesen: Im Rahmen der Axiome  $F, B0, A0, E2$  ist das genannte Axiom der Winkelhalbierenden eine Folge von  $W2$ . Es zieht aber nicht umgekehrt  $W2$  nach sich. Das Axiom der Winkelhalbierenden gilt nämlich in jeder Affinitätengeometrie, da für zwei Drehungen  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*$  um den gleichen Punkt aus  $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}^{*2} \neq \mathfrak{U}$  stets  $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}$  oder  $= \mathfrak{D}\mathfrak{U}$  folgt. Die zum Beweise von Satz 6 aufgestellte Geometrie, in der  $F, B0, A0, E2$  gelten, besitzt hingegen eine Affinitätenmetrik, welche, wie bewiesen wurde,  $W2$  nicht erfüllt; als Gegenbeispiel sei die Beziehung  $C^2 = H_2^2$  angeführt. — Die rechten Winkel nehmen also in bezug auf Verdoppelung eine Sonderstellung ein.

Satz 7. Aus  $F, P, B0, K0, A1$  folgt  $A0$ .

Auf Grund der Axiome  $F, P, B0, K0$  läßt sich nach Satz 1 ein deskriptiver Koordinatenkörper  $\Phi$  mit Affinitätenmetrik derart einführen, daß  $\curvearrowright (0,0)(1,0), (0,0)(0,1)$  gilt. Wenn  $A0$  nicht gilt, so ist  $\Phi$  nach Hilfssatz (4) nicht archimedisch. Der Umstand, daß es zu den beiden Elementen  $\alpha, \beta$  aus  $\Phi$  keine natürliche Zahl  $n$  gibt, für die  $n|\alpha| > |\beta|$  ist, möge durch die Gleichung  $\alpha = o(\beta)$  mitgeteilt werden.

Zu einem Element  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon = o(1)$  aus  $\Phi$  gibt es nach  $A1$  die natürlichen Zahlen  $m$  bzw.  $n$  ( $\geq 0$ ) derart, daß bei wiederholter Antragung des Winkels  $(1,0)(0,0)(1,\varepsilon)$  an den Schenkel  $(0,0)(1,0)$  bzw.  $(0,0)(1,\varepsilon)$  und weiter an den jeweils freien Schenkel nach außen der  $m$ -te bzw.  $n$ -te Schenkel  $p$  bzw.  $q$  noch die Gestalt  $(0,0)(1,o(1))$  besitzt, während zum  $m+1$ -ten bzw.  $n+1$ -ten Schenkel nicht mehr eine derartige Darstellung gehört. Auch die Antragung des Winkels  $pq$  an  $p$  bzw.  $q$  nach außen führt nun auf je einen freien Schenkel  $r$  bzw.  $s$ , der nicht eine derartige Darstellung gestattet.

Entsprechend gelangt man zu zwei Strahlen  $p', q'$  mit  $\curvearrowright p', q'$ , deren jeder die Gestalt  $(0,0)(o(1),1)$  besitzt, während die Antragung des Winkels  $p'q'$  an  $p'$  bzw.  $q'$  nach außen auf je einen freien Schenkel  $r'$  bzw.  $s'$  führt, der keine derartige Darstellung gestattet. Die Drehung, die  $r$  nach  $p$ ,  $p$  nach  $q$  und  $q$  nach  $s$  bringt, werde mit  $\mathfrak{D}$  bezeichnet. Werden die Strahlen  $p$  bzw.  $p'$  durch  $\mu X + Y = 0, X > 0$  bzw.  $X - \mu' Y = 0, Y > 0$  [ $0 \leq \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu' \end{Bmatrix} = o(1)$ ] dargestellt, so kommen den Strahlen  $p, q$  und den Geraden  $r, s$  nach der Koordinatentransformation  $x = X - \mu' Y, y = \mu X + Y$  Darstellungen folgender Art zu:

$$\begin{aligned} p: & \quad y = 0, \quad x > 0, \\ q: & \quad x - \tau y = 0, \quad x > 0, \quad \tau > 0, \quad 1 = o(\tau), \\ r: & \quad x - \lambda y = 0, \\ s: & \quad \varrho x - \sigma y = 0, \end{aligned}$$

$\tau, \lambda, \varrho, \sigma$  in  $\Phi$ ; dabei gelten für die Strahlen  $r, s$  jedenfalls die folgenden Bestimmungen:

für  $r$ :  $1 \neq o(\lambda)$  oder  $x < 0, \lambda > 0$ ,

für  $s$ :  $\varrho \neq o(\sigma)$  oder  $x < 0$ .

Es gibt nun einen Strahl  $v$  der Gestalt  $x - \zeta y = 0, x > 0, \zeta \geq 1$  in  $\Phi$ , der durch  $\mathfrak{D}$  in einen Strahl  $w$  der Gestalt  $o(1)x + y = 0, x < 0$  mit  $\hookrightarrow q, w$  übergeht, wie man in folgender Weise erkennt. Im Falle  $\varrho = o(\sigma)$  besitzt der Strahl  $q$  die für  $v$  geforderten Eigenschaften, im Falle  $1 = o(\lambda)$  der Strahl  $\bar{r}$ . Bei  $\varrho \neq 0$  ergibt sich nach Satz 1 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $\mathfrak{D}$  elliptisch ist (Absatz 2 des Beweises zu Satz 3):  $\mathfrak{D}$  bestimmt auf der Geraden  $y = 1$  die Abszissentransformation

$$t' = \frac{\frac{\sigma}{\varrho}(\tau - \lambda) - \tau^2 + \tau t}{-\lambda + t}.$$

Diese führt im Falle  $\varrho \neq o(\sigma), 1 \neq o(\lambda)$  den Wert  $t = 1$  in einen Wert  $t'$  mit  $1 = o(t')$  über. Nun kommen dem Strahl  $x - y = 0, x > 0$  die für  $v$  geforderten Eigenschaften zu —  $\hookrightarrow q, w$  gilt, weil  $\mathfrak{D}$  elliptisch ist.

Nach der Koordinatentransformation  $x' = y, y' = -x$  erhalten die Strahlen  $p', q'$  die Gestalt

$$p': y' = 0, x' > 0,$$

$$q': x' - \tau' y' = 0, x' > 0, \tau' > 0, \\ 1 = o(\tau'),$$

und man erkennt weiter: Die Drehung  $\mathfrak{D}'$ , die  $p'$  nach  $q'$  bringt, führt einen gewissen Strahl  $v'$  der Gestalt  $x' - \zeta' y' = 0, x' > 0, \zeta' \text{ (aus } \Phi) \geq 1$  in einen Strahl  $w'$  der Gestalt  $o(1)x' + y' = 0, x' < 0$  mit  $\hookrightarrow q', w'$  über. Da gemäß Absatz 2 des Beweises zu Satz 3 das Axiom  $W1$  gültig ist, läßt sich Hilfssatz (5) anwenden; es gilt  $p'v' < qw, \bar{p}\bar{v} < q'w'$ . Diese beiden Beziehungen sind nicht mit den durch die Drehungen  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{D}'$  vermittelten Kongruenzen  $p'v' \equiv q'w', \bar{p}\bar{v} \equiv qw$  verträglich. — Die Annahme,  $A0$  sei nicht gültig, ist mithin zu verwerfen.

Die Sätze 6, 7 zeigen, daß im Rahmen der Axiome  $F, P, B0, K0$  das Archimedische Axiom für Winkel logisch stärker als dasjenige für Strecken ist.

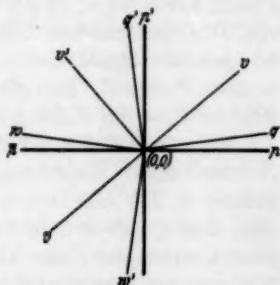


Fig. 4.

## V.

Satz 8. Im Rahmen der Axiome  $F, B0, W1$  sind die Axiome  $L, S2$  äquivalent; im Rahmen der Axiome  $F, B0, K0, W1$  sind die Sätze  $B1, 2, K1$  äquivalent.

1, 1. Bei der üblichen Herleitung von  $L$  aus  $S2$  wird  $W1$  benutzt.

1, 2. Seien  $\alpha, \beta$  zwei Winkel derart, daß (in evidenter Bezeichnung)  $2\alpha < \beta$  — Hilfssatz (5) — ist; es gibt dann auf Grund von  $F, B0, W1$  einen Winkel  $\gamma$ , für den  $\gamma > \alpha, 2\gamma < \beta$  ist.

Zum Beweise sei  $\alpha = \angle k, \beta = \angle l, \neg k, l$  angenommen. Wegen  $W1$  gibt es einen Strahl  $m$ , für den  $\neg k, m, l$  und  $lm \equiv kh$  gilt. Sei  $n$  ein Strahl mit  $\neg k, n, m$ . Wenn  $hn$  noch nicht von der gesuchten Art ist, so liefert die Antragung von  $hn$  an  $n$  nach außen einen Winkel, der entweder  $l$  als freien Schenkel besitzt oder  $l$  in seinem Inneren enthält. Ist im ersten Falle  $o$  irgendein Strahl mit  $\neg k, o, n$ , so ist nach Hilfssatz (5) der Winkel  $ho$  von der gesuchten Art; im zweiten Falle ist nach dem gleichen Hilfssatz der Winkel  $nl$  ein gesuchter.

1, 3. Im Dreieck  $ABC$  sei  $AC \equiv BC, \angle BAC > \angle ABC$ . An Hand des Parallelenaxioms erkennt man  $2\angle ABC < \angle BCD$ , wenn  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt. Nach Absatz 1, 2 gibt es einen Winkel  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon > \angle ABC, 2\varepsilon < \angle BCD$ . Die Antragung von  $\varepsilon$  an  $CB$  nach der von  $D$  eingenommenen Seite führt auf einen Strahl  $CE$ , zu welchem der parallele Strahl durch  $A$  gezogen sei; dieser trifft die Strecke  $BC$  in einem Punkte  $F$ . Nun gilt  $\angle FAC \equiv \angle ECD > \angle ECB \equiv \angle AFC, AC > FC$  — im Widerspruch zu  $L$ .

2, 1. Aus  $F, B0, K1$  folgt  $B2$ ; aus  $F, B0, W1, B2$  folgt  $K1$ .

Aus einem Gegenbeispiel gegen  $B2$  erhält man an Hand der Axiome  $F, B0$  ein Dreieck  $ABC$ , in dessen Innerem ein Punkt  $C'$  liegt, derart, daß  $AB \equiv AC \equiv AC'$  — im Widerspruch zu  $K1$ . Umgekehrt widerspricht das Auftreten einer solchen Figur dem Axiom  $B2$ . Tritt nun ein Dreieck  $ABC$  und ein Punkt  $C'$  auf der Strecke  $AC$  auf, derart, daß  $AB \equiv AC \equiv AC'$ , so kann nach eventuellem Bezeichnungs-tausch angenommen werden:  $\angle BAC' \leq \angle C'AC$ ; das Zeichen  $<$  bezieht sich wiederum auf die lageunabhängige Größenanordnung [Hilfssatz (5)]; für diese läßt sich der Außenwinkelsatz in der üblichen Form aussprechen: Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nicht-anliegende Dreieckswinkel. Der freie Eckpunkt  $D$  des zum Dreieck  $ABC'$  bei gleichsinniger Bezogenheit kongruenten Dreiecks  $AC'D$  liegt nach dem Außenwinkelsatz im Dreieck  $AC'C$ . Wegen der Kongruenz  $AC \equiv AD \equiv AC'$  hat man eine Figur der erstbeschriebenen Art.

2, 2. Im Rahmen von  $F, B0, K0, W1$  sind  $B1, K1$  einander äquivalent.



Die Annahme,  $B1$  gelte nicht, ist gleichbedeutend mit der Annahme, es gebe zwei verschiedene, bei gleichsinniger Bezogenheit seitenkongruente Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ . Falls eines dieser Dreiecke ganz im anderen liegt, also etwa  $C$  im Dreieck  $ABD$  liegt, so betrachte man das zu  $BCD$  bei gleichsinniger Bezogenheit kongruente Dreieck  $EDC$ . Die Dreiecke  $AEC$ ,  $AED$  sind nun ebenfalls gleichsinnig bezogen und seitenkongruent; dabei treffen sich (wie man an Hand des Parallelenaxioms erkennt) die Strecken  $AD$ ,  $EC$ . Zur gleichen Figur  $A, C, D, E$  führt die Annahme, keines der Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$  liege im anderen, durch Bezeichnungstausch.

Die Annahme  $\angle CAD \equiv \angle CED$  führt, da die Dreiecke  $CAD$ ,  $CED$  gleichschenkelig sind, wegen  $K0$  auf die der angenommenen Figur widerstreitende Kongruenz  $\angle ACD \equiv \angle ECD$ . Die Bezeichnungen lassen sich daher so wählen, daß etwa

$\angle CAD < \angle CED$  [Hilfssatz (5)] ist.

Außerdem ist offenbar  $\angle ADC < \angle EDC$ .

Die freien Schenkel der Winkel, die durch

Antragung von  $\angle DAC$  an  $ED$  bzw. von

$\angle ADC$  an  $DE$  nach der von  $C$  ein-

genommenen Seite entstehen, treffen sich

nun in einem Punkte  $F$ , der im Dreieck

$CDE$  liegt. Auf Grund von  $K0$  gilt mit

$AC \equiv AD$  auch  $EF \equiv ED$ ; da außer-

dem  $EC \equiv ED$  ist, so ist der mit  $EC$

um  $E$  geschlagene Kreis nicht konvex, d. h.  $K1$  gilt nicht. — Umgekehrt

gelangt man von der Ungültigkeit des Axioms  $K1$  zu derjenigen von  $B1$ ,

indem man bei gegebenen Punkten  $E, C, D, F$  — mit  $EC \equiv ED \equiv EF$ ,

$F$  im Dreieck  $ECD$  oder auf der Strecke  $CD$  — den Punkt  $A$  als freie

Ecke des zu  $EFD$  bei gleichsinniger Bezogenheit gleichwinkligen Dreiecks

$ACF$  bestimmt. Daß die Strecken  $AD$ ,  $EC$  sich treffen, ergibt

sich, falls  $F$  in  $ECD$  liegt, mit Hilfe des Außenwinkelsatzes von Absatz 2, 1.

3. Übrigens folgt  $K1$  — ohne Benutzung von  $W1$  — aus den

Sätzen  $F$ ,  $B0$ , 1, 2,  $K0$ ; im Falle des Auftretens der ersten in Ab-

satz 2, 1 angeführten Figur verfährt man wie dort, im Falle der zweiten

Figur wie am Schluß des Absatzes 2, 2.

Satz 9. Im Rahmen eines jeden der fünf Axiomensysteme

$$F, B0, A0, \left\{ \begin{array}{l} W1 \\ A1 \\ S1 \\ E1 \\ E2, W2 \end{array} \right\} \text{ sind die Sätze } B1, 2, K1, L, N1, 2, S2, 3$$

einander äquivalent.

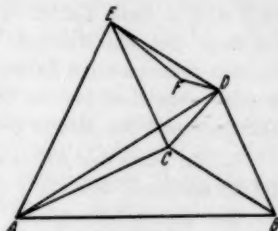


Fig. 5.

1. An Hand der Sätze 3–5 leitet man aus jedem der fünf Axiomensysteme das System  $F, B0, A0, S1$  her. Dieses gestattet nach Satz 1 und Absatz 1 des Beweises für Satz 3 die Einführung eines deskriptiven Koordinatenkörpers  $\Omega$  mit Affinitätenmetrik, in welcher nach Absatz 2 des Beweises von Satz 3 nur elliptische Abbildungen vorkommen.  $S1$  bedeutet, daß die Ausübung der Drehungen um einen Punkt kommutativ ist; mithin haben alle  $(0, 0)$ -Drehungen ( $\neq U, \mathfrak{S}$ ) die gleichen Fixgeraden.

Hieraus schließt man an Hand der Hilfssätze (1) und (4): In einem geeigneten Koordinatensystem haben alle kongruenten Abbildungen die Gestalt

$$fx' = ax - \sqrt{1 - a^2}y + b,$$

$$fy' = \sqrt{1 - a^2}x + ay + c,$$

wo  $f, a, b, c$  reelle Zahlen sind. In diesem Koordinatensystem brauchen allerdings (bei der Mehrzahl der betrachteten Axiomensysteme) die den Punkten zukommenden Zahlenpaare nicht Paare von Zahlen eines Bereiches zu sein; abgesehen hiervon aber ist das Koordinatensystem im übrigen deskriptiv und die Metrik eine Affinitätenmetrik.

2. Für jedes der Axiome  $B1, 2, K1, L, N1, 2, S2, 3$  ist notwendig und hinreichend, daß alle  $f$  (Absatz 1) gleich 1 sind.

Mit dieser Behauptung wird Satz 9 bewiesen sein; einige weniger wichtige der dort behaupteten Äquivalenzen sind übrigens auch in engerem Rahmen gültig.

2.1. Der jeweils gegebenen Geometrie  $\mathfrak{G}$  (in welcher  $F, B0, A0, S1$  gelten) läßt sich ein Teil  $\mathfrak{C}$  der cartesischen Ebene anordnungstreu in der Weise zuordnen, daß ein Punkt aus  $\mathfrak{G}$  in dem unter Absatz 1 eingeführten eingeschränkt deskriptiven Koordinatensystem die gleichen Koordinaten besitzt wie der zugeordnete Punkt in dem cartesischen Koordinatensystem. Gemäß den Kongruenzformeln aus Absatz 1 stimmt die Winkelkongruenz in  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{C}$  überein.

Wenn alle  $f = 1$  sind, so stimmt auch die Streckenkongruenz in  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{C}$  überein; man erkennt hieraus die Gültigkeit der in Satz 9 als äquivalent bezeichneten Sätze.

2.2. Wenn es eine Drehung  $\mathfrak{D}$  mit  $f \neq 1$  gibt, so sind die Basiswinkel eines in  $\mathfrak{G}$  gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel durch  $\mathfrak{D}$  auseinander hervorgehen, in  $\mathfrak{C}$  und mithin in  $\mathfrak{G}$  verschieden: die Sätze  $S2, 3$  gelten nicht. Wegen  $W1$  (das in  $S1$  enthalten ist) gilt nach Satz 8 auch  $L$  nicht.

2.3. Die Annahme, wiederholte Ausübung einer  $O$ -Drehung  $\mathfrak{D} - O = (0, 0)$  – mit  $f \neq 1$  bringe einen Punkt  $P (\neq O)$  in den Strahl  $OP$ , steht im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Streckenabtragung. Wegen der Anordnungs-

treue der Zuordnung von  $\mathbb{C}$  zu  $\mathbb{G}$  ergibt sich unmittelbar: Sind  $P, Q, R$  irgendwelche von  $O$  verschiedene Punkte, wobei  $O$  nicht auf  $QR$  liegt, so gibt es stets sowohl eine ganze Zahl  $n$ , für die  $\mathcal{D}^n(P)$  im Dreieck  $OQR$  liegt, als auch eine ganze Zahl  $m$ , für die  $\mathcal{D}^m(P)$  von  $O$  durch  $QR$  getrennt wird, ohne im Winkel  $\angle QOR$  zu liegen. Die erste dieser Tatsachen steht im Widerspruch zu  $N2$ , die zweite zu  $N1$  (man vergleiche Absatz 3 des Beweises für Satz 5). Bei  $OP \equiv OQ \equiv OR$  hat man ein Gegenbeispiel gegen  $K1$  und gegen  $B2$  (man vgl. Absatz 2 des Beweises für Satz 5). Wegen  $K0$  (Absatz 1 des Beweises für Satz 3) und  $W1$  (Absatz 2, 2) schließt man nach Satz 8 auf die Ungültigkeit von  $B1$ .

Satz 10. Von der Axiomgesamtheit  $F, P, B0, W1, 2, K0, A0, 1, E1, 2, S1$  sind die Sätze  $B1, 1^*, 2, K1, L, L^*, N1, 2, S2, 3$  unabhängig. Der Satz  $E1$  ist von allen übrigen unter II aufgeführten Axiomen (d. h. von  $F, P, B0, 1, 1^*, 2, W1, 2, K0, 1, L, L^*, A0, 1, N1, 2, E2, S1, 2, 3$ ) unabhängig.

1. Die letztere Unabhängigkeit erkennt man an Hand der von Hilbert in H. G.<sup>17)</sup> angegebenen minimalen Geometrie, welche als deskriptiven Koordinatenkörper denjenigen Körper  $\Omega$  besitzt, der aus der Zahl 2 durch Anwendung der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und der fünften Operation  $\sqrt{1+\omega^2}$  ( $\omega$  in  $\Omega$ ) hervorgeht. Aus  $K0$  und der Annahme von  $E1$  würde folgen, daß in  $\Omega$  jede positive Zahl Quadrat ist (vgl. Absatz 4 des Beweises zu Satz 5).

2. Absatz 1 des Beweises zu Satz 3 und die Sätze 4, 5, 9 gestatten, die erste Behauptung des Satzes 10 auf die Unabhängigkeit der Axiome  $B1^*, L^*$  von den Axiomen  $F, B0, A0, E1, 2$  zurückzuführen<sup>18)</sup>.

Der Körper  $\Phi$  enthalte die Zahlen  $\mu = \operatorname{tg} 1$ ,  $\nu = \operatorname{tg} \sqrt{2}$  und diejenigen Zahlen, die aus  $\mu, \nu$  hervorgehen, wenn man zu zwei Zahlen  $\varphi, \varphi'$  aus  $\Phi$  auch die Zahlen  $\varphi + \varphi', \varphi - \varphi', \varphi \cdot \varphi'$ , bei  $\varphi' \neq 0$  auch  $\frac{\varphi}{\varphi'}$  und

<sup>17)</sup> Kap. II und VII.

<sup>18)</sup> Die Unabhängigkeit der übrigen Sätze  $B1, 2, K1, L, N1, 2, S2, 3$  von dem reduzierten Axiomensystem läßt sich übrigens nach Satz 9 auch auf diejenige von  $N2$  zurückführen, welche durch die 2. Hilbertsche Geometrie (H. G. A. II) erwiesen wird. Man erkennt so, daß in keiner 2. Hilbertschen Geometrie — es gibt verschiedene 2. Hilbertsche Geometrien, weil die Metrik von einer willkürlichen Abzählung abhängt — der dritte Kongruenzsatz  $B1$  gilt (man kann übrigens jedesmal leicht ein Gegenbeispiel explizit angeben). Hiermit ist eine von Rosemann aufgeworfene Frage (a. a. O., S. 124, Nr. 10) beantwortet. Rosemann fügt hinzu, es bleibe auch offen, ob gleichseitige Dreiecke kongruente Winkel besitzen müssen; die den Kern dieser Frage ausmachende Unabhängigkeit des genannten Satzes von den in der 2. Hilbertschen Geometrie geltenden Axiomen wird durch den oben folgenden Beweis gezeigt.

im Falle eines positiven  $\varphi$  und eines rationalen  $\varphi'$  noch  $\varphi''$  hinzunimmt.  $\Phi$  und mithin auch der Bereich  $\mathcal{P}$  der Zahlen  $\psi = \arctg \varphi$  ( $\varphi$  in  $\Phi$  oder  $\varphi = \infty$ ), welcher die Zahlen  $\pi, 1, \sqrt{2}$  enthält, sind abzählbar. Nun läßt sich, wie in der 2. Hilbertschen Geometrie (H. G. A. II) für einen ähnlichen Bereich gezeigt wurde, in  $\mathcal{P}$  eine Zahlenfolge  $\pi, 1, \sqrt{2}, \psi_1, \dots$  derart finden, daß jede Zahl aus  $\mathcal{P}$  sich in eindeutiger Weise als Aggregat der Form

$$\psi = r_1 \pi + r_2 + r_3 \sqrt{2} + r_4 \psi_1 + \dots + r_n \psi_n \quad (n > 0)$$

mit rationalen Koeffizienten  $r_1, \dots, r_n$  darstellen läßt. Indem man in der zu  $\Phi$  gehörigen deskriptiven Geometrie — welche nach Hilfssatz (4) auch das Axiom  $A0$  erfüllt — von dem Zahlenpaar  $x, y$  zur komplexen Zahl  $x + iy$  übergeht, möge jede Transformation

$$x' + iy' = e^{i\psi} \cdot (\mu + v)^{r_2 - r_3} \cdot (v\sqrt{1 + \mu^2})^{-r_2} \cdot (\mu\sqrt{1 + v^2})^{r_2} \cdot (x + iy) + p + iq,$$

in der  $p, q$  Zahlen aus  $\Phi$ ,  $\psi$  eine Zahl aus  $\mathcal{P}$  und  $r_2, r_3$  die in der oben gegebenen Darstellung zu  $\psi$  gehörigen rationalen Koeffizienten sind, als kongruente Abbildung  $[\psi, p + iq]$  bezeichnet werden. Man erkennt, daß diese Metrik alle Eigenschaften einer Affinitätenmetrik besitzt; nach Satz 1 gelten also die Axiome  $F, B0, K0$ . An Hand des Axioms  $K0$  und des Zweistrahlsatzes [s. Hilfssatz (1)] läßt sich — durch Umkehrung eines in Absatz 4 des Beweises zu Satz 5 angewandten Schlusses — aus der Tatsache, daß in  $\Phi$  jede positive Zahl Quadrat ist, das Axiom  $E1$  herleiten. Die kongruente Abbildung  $[\frac{\pi}{2}, 0]$  erweist die Gültigkeit von  $E2$ .

Das von den Punkten  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C = (\frac{\mu}{\mu + v}, \frac{\mu v}{\mu + v})$  gebildete Dreieck ist gleichseitig; die kongruenten Abbildungen

$$[\sqrt{2}, 0] \equiv x' + iy' = \frac{\mu + i\mu v}{\mu + v} (x + iy)$$

bzw.

$$[\pi - 1, 1] \equiv x' + iy' = \frac{-v + i\mu v}{\mu + v} (x + iy) + 1$$

führen nämlich  $A$  in sich,  $B$  in  $C$  bzw.  $A$  in  $B$ ,  $B$  in  $C$  über. Entgegen  $B1^*$  ist der Winkel  $\angle BAC$  dem Winkel  $\angle CBA$  nicht kongruent; man entnimmt dies bereits dem Umstande, daß die Abbildung  $[\pi - 1, 1]$ , die den Strahl  $AB$  in den Strahl  $BC$  bringt, den Punkt  $C$  in einen Punkt mit nicht verschwindender Ordinate überführt.

Werden die Punkte  $(0, 1)$ ,  $(0, \frac{\mu v}{\mu + v})$  mit  $D$  bzw.  $E$  bezeichnet, so gilt  $AC \equiv AB \equiv AD < AE$ ; das rechtwinklige Dreieck  $AEC$  bildet mithin ein Gegenbeispiel gegen  $L^*$ .

Satz 11. Die Axiome  $B0, 1, 1^*, 2, L, L^*, S2, 3$  sind unabhängig von der Axiomgesamtheit  $F, P, W1, 2, K0, 1, A0, 1, N1, 2, E1, 2$ ,

S1. — Die Axiome  $B0, 1, 2, L^{19}), L^*, S2, 3$  sind unabhängig von dem Axiomensystem  $F, P, B1^*, W1, 2, A0, 1, N1, 2, E2, S1$ ; und die Axiome  $B0, 2, L, L^*, S2, 3$  sind noch unabhängig vom System  $F, P, B1, 1^*, W1, 2, A0, 1, N1, 2, E2, S1$ . Dabei darf das Parallelenaxiom überall in der stärkeren Fassung  $IV^{*20)}$  der H. G. zugrunde gelegt werden; und in dem letztgenannten Axiomenrahmen darf  $B1$  durch den üblichen (auch ungleichsinnig bezogene Dreiecke betreffenden) Seitenkongruenzsatz ersetzt werden.

1. Die erste Behauptung erkennt man ohne Schwierigkeit aus einer in H. G., 7. Aufl., Kap. II angegebenen Geometrie, welche sich von der cartesischen nur in der Streckenkongruenz unterscheidet; man erhält sie aus der cartesischen, indem man etwa die Ellipsen  $4(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  als Kreise ansieht. — Die Ungültigkeit des Axioms  $B2$  erkennt man z. B. an Hand der gleichsinnig bezogenen Dreiecke  $O(0, 0) A(0, 2) B(\sqrt{3}, 2)$  und  $O(0, 0) A'(-1, 0) B'(-1, 2\sqrt{3})$ ; obwohl  $OA \equiv OA' < OB \equiv OB'$ ,  $\angle OAB \equiv \angle OA'B'$  ist, gilt nicht  $\angle OBA \equiv \angle OB'A'$ . Dem Axiom  $L^*$  wird durch das Dreieck  $(0, 0) (1, 1) (1, -1)$  widersprochen, dessen Hypotenuse die Länge 2 und dessen Katheten die Länge  $\sqrt{5}$  haben.

2. 1. Auf demjenigen Körper  $\Omega$ , der aus der Zahl 1 durch Anwendung der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und der fünften Operation  $\sqrt{1 + \omega^2}$  ( $\omega$  in  $\Omega$ ) entsteht, möge eine deskriptive Geometrie aufgebaut werden. Die Punkte  $(0, 0)$  bzw.  $(1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 3)$  seien mit  $O$  bzw.  $A, B, C, D$  bezeichnet. Da  $\Omega$  abzählbar ist, lassen sich die Geraden der Geometrie abzählen; es sei eine Abzählung  $\mathfrak{A}$  gegeben, die mit den Geraden  $OA, OB, OC, BA, BC, BD$  beginnt. Während die gewöhnliche, durch die Abbildungen

$$x' = \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y + p,$$

$$y' = \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y + q$$

( $\cos \alpha, p, q$  in  $\Omega$ ) vermittelte Winkelkongruenz  $\mathfrak{B}$  erhalten bleibe, möge den Geraden durch das folgende induktive Verfahren eine neue Maßbestimmung  $\mathfrak{M}$  auferlegt werden (welche übrigens die auf die Länge bezüglichen Eigenschaften einer Affinitätenmetrik zugleich mit  $B0$  zerstört). Dabei werde die cartesische Länge einer Strecke  $\sigma$  mit  $\bar{\sigma}$ , die neue Länge mit  $\tilde{\sigma}$  bezeichnet; und das Verhältnis  $\tilde{\sigma} : \bar{\sigma}$  möge der Längenfaktor von  $\sigma$  genannt werden. Das Symbol  $\overline{PP}$  endlich bedeute Null.

<sup>19)</sup> Die in der Formulierung des Axioms  $L$  vorausgesetzte von der Lage unabhängige Größenvergleichen der Winkel ist — wenn auch  $B0$  nicht gilt; vgl. Hilfssatz (5) — in den zum Beweise herangezogenen Geometrien durchführbar.

<sup>20)</sup> Vgl. Hilfssatz (2).





wird nun abgesehen —; dabei möge nicht zugleich  $P \neq P'$ ,  $Q = Q'$ ,  $R = R'$  sein. Unter den höchstens sechs Geraden, durch die diese Dreiecke bestimmt werden, ist eine in der Abzählung  $\mathfrak{A}$  die letzte; es sei dies etwa die Gerade  $Q'R'$ . Zunächst möge angenommen werden, daß auf dieser Geraden nicht beide Punkte  $Q, R$  liegen. Die Punkte  $Q', R'$  der Geraden  $Q'R'$  gehören zu den in Absatz 2, 1 mit  $P_1, \dots, P_m$  bezeichneten Punkten; es sei etwa  $Q' = P_\lambda, R' = P_{\mu+1}$ ,  $\lambda \leq \mu$ . Gemäß der Annahme war in dem Maßbestimmungsverfahren die Strecke  $QR$  schon mit einer Länge  $\overline{\sigma_{i_0\mu}}$  belegt, ehe man zur Maßbestimmung auf der Geraden  $Q'R'$  überging. Aus

$$v_\mu = \frac{\overline{\sigma_{i_0\mu}} - \overline{P_1 P_\mu}}{\overline{P_\mu P_{\mu+1}}} \text{ ergibt sich } \overline{P_\mu P_{\mu+1}} = \overline{\sigma_{i_0\mu}} - \overline{P_1 P_\mu},$$

also wegen  $\lambda \leq \mu$ :  $\overline{Q'R'} = \overline{P_1 P_{\mu+1}} + \overline{\sigma_{i_0\mu}} = \overline{QR}$ . Nun werde im Gegenteil angenommen, daß die Geraden  $QR, Q'R'$  zusammenfallen. Die Punkte  $Q, R, Q', R'$  dieser Geraden gehören zu den in Absatz 2, 1 mit  $P_1, \dots, P_m$  bezeichneten Punkten:  $Q = P_i, Q' = P_{i'}, R = P_\kappa, R' = P_{\kappa'}$ . Durch geeignete Wahl der Bezeichnungen  $Q, Q', R, R'$  läßt sich erreichen, daß entweder  $i, i', \kappa < \kappa'$  oder  $\kappa = \kappa', i = i'$  ist. Bezeichnet man im ersten Falle den Index  $\kappa'$  mit  $\mu+1$ , so ist die Strecke  $QR$  eine der Strecken  $\sigma_{i\mu}$ , etwa  $\sigma_{i_0\mu}$ . Man schließt nun wie bei der vorigen Annahme, daß  $\overline{Q'R'} \neq \overline{QR}$  ist. Es gelte nun  $\kappa = \kappa', i = i'$ , d. h. die vorgelegten Dreiecke mögen die Seite  $QR$  gemein haben. In der Abzählung  $\mathfrak{A}$  ist unter den diese Dreiecke bestimmenden Geraden eine — etwa  $P'R$  — die vorletzte. Da nun  $P \neq P'$  ist, so schließt man analog, wie in den vorangehenden Fällen  $\overline{Q'R'} \neq \overline{QR}$  bewiesen wurde, hier  $\overline{P'R} \neq \overline{PR}$ . Es gibt mithin keine zwei verschiedenen Dreiecke, die in homologen Seiten übereinstimmen, und kein gleichseitiges Dreieck; die Sätze  $B1, 1^*$  sind erfüllt.

3. Die Maßbestimmung  $\mathfrak{M}$  möge nun der folgenden Änderung unterworfen werden. Da in  $\mathfrak{A}$  auf  $BC$  die Gerade  $BD$  folgt, kann angenommen werden, das in Absatz 2, 1 angegebene induktive Verfahren habe mit der Strecke  $BD$  begonnen. Statt dessen werde nun der Strecke  $BD$  der Längenfaktor  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  auferlegt, und das induktive Verfahren beginne erst bei der nächsten Strecke der Geraden  $BD$ . Dann bleiben die Überlegungen des Absatzes 2, 2 gültig, ferner die des Absatzes 2, 3, sofern man von dem Dreieckspaar  $OAB, OBD$  absieht; diese Dreiecke stimmen in allen homologen Seiten, nicht aber in allen homologen Winkeln überein. Während  $B1^*$  gültig bleibt, ist  $B1$  ungültig. Hiermit ist auch die mittlere der Behauptungen des Satzes 11 bewiesen. — Der Umstand, daß die



Prämissen der Sätze *B1* (Absatz 2,3) bzw. *B1\** (Absatz 3) leer sind, ließe sich übrigens durch eine geringfügige weitere Änderung des Beginns der induktiven Maßbestimmung beseitigen.

## VI.

Satz 12. Die Axiome *L*, *L\**, *A0*, 1, *S2*, 3 sind unabhängig von den Axiomen *F*, *P*, *B0*, 1, 1\*, 2, *W1*, 2, *K0*, 1, *N1*, 2, *E1*, 2, *S1*.

Diese Behauptung unterscheidet sich von derjenigen, die sich mit Hilfe der 1. Hilbertschen Geometrie (H. G. A. II) beweisen läßt, durch die Hinzunahme des — von Rosemann als in der 1. Hilbertschen Geometrie ungültig erkannten — Satzes *B1* sowie der Sätze *B2*, *K1*, *E1* zum Rahmensystem.

1. Die Reihen  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v t^{nv} / t^{2m}$  mit willkürlichem Parameter *t*, reellen Koeffizienten *a<sub>v</sub>*, einer steigenden Folge ganzer *n*, und ganzem *m*, für welche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in evidenter Weise rein formal (ohne Rücksicht auf Konvergenzfragen) durchgeführt werden, bilden einen Körper  $\mathcal{P}$ . Das Symbol  $\vartheta$  soll im folgenden stets eine gewöhnliche reelle Zahl, die Symbole  $\lambda$ ,  $\mu$  stets beliebige Elemente von  $\mathcal{P}$  und das Symbol  $\tau$  stets (0 oder) ein Element aus  $\mathcal{P}$  mit positivem Anfangsexponenten bezeichnen. Einem Element  $\tau$  lassen sich durch die üblichen Reihenentwicklungen die in  $\mathcal{P}$  liegenden Zahlen  $\sin \tau$ ,  $\cos \tau$ ,  $e^\tau$  zuordnen, mit Hilfe der üblichen Additionstheoreme werden hieraus weiter die Zahlen  $\sin(\vartheta + \tau)$ ,  $\cos(\vartheta + \tau)$ ,  $e^{(\vartheta + \tau)}$  definiert. — Eine Anordnung der Elemente von  $\mathcal{P}$  wird auf folgende Weise festgelegt: Für zwei Elemente  $\lambda$ ,  $\mu$  aus  $\mathcal{P}$  gelte  $\lambda > \mu$ , wenn in der Reihe, die die Zahl  $\lambda - \mu$  darstellt, der erste nicht verschwindende Koeffizient positiv ist. In der gemäß Hilfssatz (2) zu  $\mathcal{P}$  gehörigen deskriptiven Geometrie mögen nun die Transformationen

$$x' + iy' = e^{i\vartheta + \tau} (x + iy) + \lambda + i\mu,$$

welche kurz in der Form  $[\vartheta, \tau; \lambda + i\mu]$  mitgeteilt werden sollen, als kongruente Abbildungen eingeführt werden. Man erkennt leicht, daß hiermit eine Affinitätenmetrik (S. 547) eingeführt ist ( $\mathcal{U} = [\pi, 0; 0]$ ). Nach Satz 1 gelten also die Axiome *F*, *P*, *B0*, *K0*.

2. Die Kommutativität der Drehungen  $[\vartheta, \tau; 0]$  führt auf *S1*; die Existenz der Abbildung  $[\frac{\pi}{2}, 0; 0]$  auf *E2*. Ebenso unmittelbar erkennt man die Gültigkeit von *W1*, 2.

Gegeben sei eine Gerade der Form  $x = \alpha$  ( $\alpha > 0$  in  $\mathcal{P}$ ); da sie keinen Punkt des mit  $(0, 0)$   $(\frac{\alpha}{2}, 0)$  um  $(0, 0)$  geschlagenen Kreises von  $(0, 0)$  trennt, gilt *N1*. — Die Gültigkeit des Axioms *N2* wird auf ähnliche

Weise wie in der 1. Hilbertschen Geometrie H. G. A. II 7. Aufl. erkannt: der Strecke  $(0, 0) (\beta, 0)$  wird das Dreieck  $(0, 0) (\frac{\beta}{2}; 0) (\frac{\beta}{4}, \frac{\beta}{4} \sqrt{3})$  zugeordnet, das keine zu  $(0, 0) (\beta, 0)$  kongruente Strecke enthält.

3. Jedes positive Element  $\lambda$  aus  $\Psi$  läßt sich in der Form  $\lambda = a^{\tau} (1 + \tau) - a$  positive,  $\tau$  rationale Zahl,  $\tau$  (0 oder) Element von  $\Psi$  mit positivem Anfangsexponenten — darstellen; das positive Element

$$\mu = \sqrt{a}^{\tau/2} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r \tau^r$$

aus  $\Psi$  genügt der Gleichung  $\mu^2 = \lambda$ . Die Existenz von  $\mu$  führt zusammen mit  $K0$  (wie in Absatz 2 des Beweises zu Satz 10) auf  $E1$ .

4. Gegeben seien die folgenden, auf dem Einheitskreise um  $O(0, 0)$  gelegenen Punkte:

$$P(1, 0), Q(e^{\tau} \cos(\theta + \tau), e^{\tau} \sin(\theta + \tau)), \\ R(e^{\tau} \cos(\theta + \tau), e^{\tau} \sin(\theta + \tau)),$$

wobei  $0 < \theta + \tau < \theta + \tau < \pi$ , d. h.  $\curvearrowright OP, OQ, OR$  gelten soll,  $\theta, \tau, \theta, \tau$  jedoch im übrigen beliebig anzunehmen sind. Das Axiom  $K1$  wird unter Heranziehung von  $K0$  auf die Konvexität des Einheitskreises zurückgeführt, diese an Hand von  $F, B0$  weiter auf die Behauptung, die Gerade  $PR$  trenne die Punkte  $O, Q$ , welche nach Hilfssatz (3) äquivalent mit der Behauptung ist; für  $0 < \theta + \tau < \theta + \tau < \pi$  haben die beiden Ausdrücke

$$\Delta(O) = -e^{\tau} \sin(\theta + \tau), \\ \Delta(Q) = \begin{vmatrix} e^{\tau} \sin(\theta + \tau) & e^{\tau} \cos(\theta + \tau) - 1 \\ e^{\tau} \sin(\theta + \tau) & e^{\tau} \cos(\theta + \tau) - 1 \end{vmatrix}$$

verschiedenes Vorzeichen.

$\Delta(O)$  ist unter der angegebenen Bedingung negativ. Für  $\Delta(Q)$  gilt:

$$\text{sign } \Delta(Q) = \text{sign} \left\{ 4 \sin \frac{\theta + \tau}{2} \sin \frac{\theta + \tau}{2} \sin \frac{\theta - \theta + \tau - \tau}{2} \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} \sin(\theta + \tau) & 1 - e^{-\tau} \\ \sin(\theta + \tau) & 1 - e^{-\tau} \end{vmatrix} \right\}.$$

Der erste in geschweifter Klammer stehende Summand ist positiv; und sein Anfangsexponent ist, wie man unter Zugrundelegung der Fallunterscheidung

$$0 < \theta < \theta \\ 0 < \theta = \theta, \tau > \tau \\ 0 = \theta < \theta, \tau > 0 \\ 0 = \theta = \theta, \tau > \tau > 0$$

errechnet, kleiner als derjenige des zweiten Summanden. Mithin ist auch  $\Delta(Q) > 0$ .

Die Gültigkeit des Axioms  $K1$  führt nach Satz 8 auf diejenige von  $B1, 2$ . Nach Hilfssatz (4) ist  $A0$  ungültig; die Ungültigkeit von  $A1$  wird durch die Drehung  $[0, t; 0]$  dargetan, die Ungültigkeit von  $L^*$  durch das rechtwinklige Dreieck  $(0, 0) (1, 0) (1, tg t')$ ; weiter konstruiert man leicht ein Gegenbeispiel gegen  $S2, 3$ .

## VII.

Aus den Sätzen 5 und 9 ergeben sich als Systeme anschaulich evident und prägnanter Axiome, die die Spiegelungseigenschaften nach sich ziehen, ohne selbst irgendwelche Spiegelungsforderungen (oder auch nur solche Forderungen, die sich auf triviale Weise in Spiegelungsforderungen umformen lassen) zu enthalten<sup>21)</sup>, zunächst die unten folgenden Systeme 1–11. Die Systeme 2 und 4 sind die bereits in der Einleitung hervorgehobenen. An Hand des Satzes 7 läßt sich überall das Axiom  $A0$  durch  $P, K0, A1$  ersetzen; diese Ersetzung ist im folgenden nur bei denjenigen Axiomensystemen ausgeführt, in denen außer  $A0$  bereits  $A1$  auftritt; dadurch treten die vom Axiom des Eudoxos freien Systeme 12–13 hinzu. Daß die Axiome  $P, B, K0$  allein trotz ihrer Schlüsselstellung innerhalb gewisser Abhängigkeiten<sup>22)</sup> nicht beide Archimedischen Axiome zu ersetzen vermögen, lehrt Satz 12, nach welchem die Spiegelungseigenschaften von allen übrigen unter II aufgeführten Axiomen bei Ausnahme der Axiomgruppen  $A, L$  unabhängig sind. Das Axiom  $L$  erweist sich nach dem ersten Teil des Satzes 8 als dem Spiegelungsaxiom  $S2$  in trivialem Rahmen verwandt; deshalb wird trotz der Bedeutung, die  $L$  wegen seines Zusammenhanges mit  $B2$  für die axiomatische Beschreibung der Kongruenz haben würde, in der folgenden Liste kein  $L$  enthaltendes Axiomensystem aufgeführt<sup>23)</sup>. Dagegen sei (als 14) eines der Axiomen-

<sup>21)</sup> Als ein drittes Nachbarschaftsaxiom läßt sich übrigens die Forderung einbeziehen: „Der Kreis ist stetig, d. h. (ohne Zugrundelegung von  $A$ - oder  $E$ -Axiomen): zu einer Strecke  $OP$  und einem den Punkt  $P$  enthaltenden einfachen Polygon  $\mathfrak{P}$  gibt es stets einen Winkel  $\omega$ , der von  $O$  ausgeht, den Strahl  $OP$  enthält und noch folgende Eigenschaft besitzt: wenn die zu  $OP$  kongruente Strecke  $OC$  in  $\omega$  liegt, so liegt  $C$  in  $\mathfrak{P}$ .“ Diese Forderung spielt in den Sätzen, in denen  $B1$  vorkommt — mit Ausnahme von Satz 11 — die gleiche Rolle wie  $B1$ ; sie kann daher in den oben folgenden Axiomensystemen das Axiom  $B1$  vertreten.

<sup>22)</sup> Z. B. ziehen  $F, P$  bekanntlich alle reinen Schnittpunktsätze nach sich; H. G. 7. Aufl., Kap. VI. Die Axiome  $B0, 1$  legen die „gleichsinnige Bewegung“ im Sinne der engeren Definition der Gruppe  $B$  (S. 542) fest. — Betreffe  $K0$  vgl. man die Sätze 1, 2, 7.

<sup>23)</sup> Hier würde sonst das tatsächlich von  $A$ -Axiomen freie Axiomensystem  $F, B0, W1, L$  einzureihen sein, das sich aus dem ersten Teile des Satzes 8 und der in Fußnote <sup>11)</sup> genannten Abhängigkeit ergibt. — Eine enge Verwandtschaft mit Spiegelungsforderungen besteht übrigens auch für einige andere unter die Gruppe  $L$  fallende Tatbestände.

systeme, die sich zugleich mit 1–11 ergeben, aber die schwächste Spiegelungseigenschaft — die der Winkel — enthalten (und dann die übrigen Spiegelungseigenschaften herzuleiten gestatten<sup>1)</sup> angeführt, da es dem in den früheren Auflagen von H. G. A. II zugrunde gelegten Axiomensystem<sup>24)</sup> entspricht.

Diejenigen Axiome, die auf Grund der Sätze 6, 10–12 als in ihrem System zum Beweise der Spiegelung (*S 3*) *unentbehrlich* erkannt werden; sind mit dem Zeichen (*u*) versehen (ein lediglich als unabhängig erwiesenes mit dem Zeichen (\*)). Dabei ist sinngemäßerweise auf die Analyse des fundamentalen Axiomenkomplexes *F* verzichtet. — In den Systemen 3, 5, 6, 9, 14 sind alle nichtfundamentalen Axiome *unentbehrlich*.

1. *F*, *B 0* (*u*), *B 1* (*u*), *W 1*, *A 0* (*u*).
2. *F*, *B 0*, *B 2* (*u*), *A 0* (*u*).
3. *F*, *B 0* (*u*), *K 1* (*u*), *A 0* (*u*).
4. *F*, *B 0* (*u*), *B 1* (*u*), *A 0*, *A 1*.
5. *F*, *B 0* (*u*), *A 0* (*u*), *N 1* (*u*).
6. *F*, *B 0* (*u*), *W 1* (*u*), *A 0* (*u*), *N 2* (*u*).
7. *F*, *B 0* (*u*), *A 0*, *A 1* (*u*), *N 2* (*u*).
8. *F*, *B 0*, *B 1* (*u*), *A 0* (*u*), *E 1* (\*).
9. *F*, *B 0* (*u*), *A 0* (*u*), *N 2* (*u*), *E 1* (*u*).
10. *F*, *B 0* (*u*), *B 1* (*u*), *W 2*, *A 0* (*u*), *E 2*.
11. *F*, *B 0* (*u*), *W 2* (*u*), *A 0* (*u*), *N 2* (*u*), *E 2*.
12. *F*, *P*, *B 0*, *B 1* (*u*), *K 0*, *A 1* (*u*).
13. *F*, *P*, *B 0* (*u*), *K 0*, *A 1* (*u*), *N 2* (*u*).
14. *F*, *B 0* (*u*), *A 0* (*u*), *N 2* (*u*), *S 1* (*u*).

<sup>24)</sup> Bei der Einleitung (I) wurde bereits die in H. G. A. II, 2. bis 6. Aufl., angegebene Beweisskizze von *S 3* aus *F*, *B 0*, *A 0*, *N 2* erwähnt; dieser liegt an mehreren Stellen die Vorstellung der Gültigkeit von *S 1* zugrunde [vgl. Fußnote <sup>11)</sup>]; nach expliziter Aufstellung von *S 1* als Axiom würde allerdings die Heranziehung des Isomorphiebeweises aus H. G. A. IV sich erübrigen. — In der 7. Auflage der H. G. ist unter A. II mit Bezug auf die vorliegende Arbeit bereits das Axiomensystem *F*, *B 0*, *W 1*, *A 0*, *N 2* (System 6) erwähnt.

# Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.

Von

Kurt Schütte in Göttingen.

## § 1.

### Problemstellung.

Von grundlegender Bedeutung für die gesamte mathematische Logik ist das Entscheidungsproblem. Bei diesem handelt es sich um die Angabe eines allgemeinen Verfahrens, nach dem man entscheiden kann, ob eine gegebene Formel mit Hilfe bestimmter Axiome und Schlußregeln ableitbar ist.

Dieses Problem ist für den Aussagenkalkül trivial, dagegen schon im Prädikatenkalkül mit großen Schwierigkeiten verbunden. Es sind dort bisher nur einige Spezialfälle gelöst, eine allgemeine Lösung in diesem Kalkül ist wahrscheinlich überhaupt nicht möglich.

Da in einem jeden logischen Kalkül, der den Aussagenkalkül enthält, die Ableitbarkeit einer Formel  $\mathfrak{A}$  mit der Widerlegbarkeit ihrer Negation  $\neg \mathfrak{A}$  gleichbedeutend ist, kann man das Entscheidungsproblem für den Prädikatenkalkül auch in der Weise behandeln, daß man ein Verfahren sucht, aus dem hervorgeht, ob eine gegebene Formel widerlegbar ist. Es ist also gleichgültig, ob man das Problem unter dem Gesichtspunkt der Ableitbarkeit oder unter dem der Widerlegbarkeit einer Formel betrachtet. Wir wollen uns hier für das letztere entscheiden.

Betrachten wir nun die Formeln des Prädikatenkalküls genauer. Für eine jede Formel desselben liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

1. Die Formel ist widerlegbar, d. h. es ist mit Hilfe der Axiome und Schlußregeln des Prädikatenkalküls ein Widerspruch aus ihr ableitbar.
2. Die Formel ist in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar, d. h. es läßt sich ein endliches die Formel erfüllendes Modell angeben.
3. Die Formel ist nicht widerlegbar, aber auch nicht in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar. In diesem Falle nennen wir die Formel „im unendlichen Individuenbereich erfüllbar“.

Benutzen wir nun den allgemeinen logischen Satz, daß eine im Endlichen erfüllbare Formel nicht widerlegbar ist, so ergibt sich, daß es zur

Lösung des Entscheidungsproblems nur darauf ankommt, festzustellen, unter welchen Bedingungen für eine Formel der erste Fall und unter welchen für sie einer der beiden anderen Fälle zutrifft.

Systematisch ist das Entscheidungsproblem bisher nur für einige solche Formeln gelöst worden, bei denen stets einer der beiden erstgenannten Fälle vorliegt. Wir wollen eine kurze Übersicht über diese Lösungen geben.

a) Für Formeln, in denen nur einstellige Formelvariablen auftreten, ist eine Lösung des Entscheidungsproblems zuerst von L. Löwenheim, dann von Th. Skolem und später, unabhängig von diesen, von H. Behmann erbracht<sup>1)</sup>. Diese Lösungen beziehen sich sogar auf den weiteren Bereich, welcher durch Hinzunahme des Gleichheitssymbols und der All- und Seinszeichen für die Formelvariablen aus dem Prädikatenkalkül hervorgeht.

b) Ein Entscheidungsverfahren für die Formeln der Gestalt

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) \dots (y_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$$

ist von P. Bernays und M. Schönfinkel<sup>2)</sup> angegeben worden.

c) Von W. Ackermann<sup>3)</sup> stammt eine Lösung des Problems für den Fall

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y, z_1, \dots, z_l),$$

welcher eine Verallgemeinerung eines vorher von P. Bernays und M. Schönfinkel ebenfalls in der vorhin zitierten Arbeit behandelten spezielleren Falles darstellt.

d) Für die Formeln, deren Matrix (d. h. der hinter den vorangestellten All- und Seinszeichen stehende von diesen freie Ausdruck) eine einfache Konjunktion ist, ist das Entscheidungsproblem von J. Herbrand<sup>4)</sup> gelöst worden.

<sup>1)</sup> L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Annalen 76 (1915); Th. Skolem, Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls ..., Videnskapsselskapets Skrifter. I. Math.-Nat. Klasse 1919, Nr. 3; H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen 86 (1922).

<sup>2)</sup> P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Annalen 99 (1928).

<sup>3)</sup> W. Ackermann, Über die Erfüllbarkeit gewisser Zahlensdrücke, Math. Annalen 100 (1928).

<sup>4)</sup> J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, Compt. Rend. de la Soc. des Sc. et L. de Varsovie 1931.

e) Schließlich ist ein von K. Gödel<sup>5)</sup> angegebenes Entscheidungsverfahren für die Formeln

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) (y_2) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, z_1, \dots, z_l)$$

zu nennen, aus dem allerdings noch nicht hervorgeht, daß eine jede nicht widerlegbare-derartige Formel schon in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar ist.

In den unter b), c) und e) genannten Fällen sind die einzelnen Formeln klassifiziert nach der Kombination der All- und Seinszeichen in der „pränexen Normalform“, d. h. in der Darstellung, in der sämtliche All- und Seinszeichen an den Anfang der Formel gebracht sind. Wir wollen hier ebenfalls diese Einteilung in Formelklassen zugrunde legen. Es werden also nur Formeln in pränexer Normalform behandelt, von denen je zwei dann und nur dann zu derselben Formelklasse gehören sollen, wenn bei beiden die voranstehenden All- und Seinszeichen in der gleichen Anzahl und Kombination auftreten.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit soll es nun sein, zu untersuchen, für welche derartigen Formelklassen stets einer der beiden ersten oben genannten Fälle vorliegt, d. h. für welche Formelklassen alle nicht widerlegbaren Formeln in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar sind.

Es wird im folgenden gezeigt werden, daß dies außer für die Formelklassen

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) \dots (y_l) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l),$$

und

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_k, y, z_1, \dots, z_l),$$

für welche ja das Entscheidungsproblem bereits in diesem Sinne gelöst ist, nur noch für die Formelklassen

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) (y_2) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A} (x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, z_1, \dots, z_l)$$

der Fall ist.

Es gibt nämlich für jede andere Formelklasse eine Formel, die nur im Unendlichen erfüllbar, also weder in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar noch durch die Axiome widerlegbar ist.

<sup>5)</sup> K. Gödel, Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, *Ergebn. eines math. Kolloqu.*, Heft 2 (1932).

Unabhängig hiervon ist dasselbe Problem auch von L. Kalmár gelöst in der Arbeit: „Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählansdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten“, *Math. Annalen* 108 (1933).

Beide Abhandlungen sind mir jedoch erst nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit bekannt geworden.



Dies erkennen wir an Hand der beiden Formeln

$$(x)(y)(z)(Eu) \{ \overline{F(x, x)} \& F(x, u) \& [F(x, y) \& F(y, z) \rightarrow F(x, z)] \}$$

und

$$(x)(Ey)(z) \{ \overline{F(x, x)} \& F(x, y) \& [F(y, z) \rightarrow F(x, z)] \}.$$

die wir mit „ $\mathfrak{F}_1$ “ und „ $\mathfrak{F}_2$ “ bezeichnen wollen<sup>\*)</sup>.

Man bemerkt zunächst, daß die Implikation

$$\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$$

ableitbar ist. Es ist nämlich

$$\mathfrak{F}_1 \sim (x) \{ \overline{F(x, x)} \& (Ey) F(x, y) \& (y)(z) [F(x, y) \& F(y, z) \rightarrow F(x, z)] \},$$

woraus man

$$\mathfrak{F}_1 \rightarrow (x)(Ey)(z) \{ \overline{F(x, x)} \& F(x, y) \& [F(x, y) \& F(y, z) \rightarrow F(x, z)] \}$$

und somit schließlich auch

$$\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$$

erhält.

Die Formel  $\mathfrak{F}_1$  läßt sich inhaltlich im unendlichen Bereich der natürlichen Zahlen durch das Prädikat „ $x < y$ “ erfüllen, denn es gelten ja dort die Formeln

$$\overline{x < x}, \quad x < x + 1, \quad x < y \& y < z \rightarrow x < z.$$

Da nun für den hierzu benötigten Bereich der Zahlentheorie der Widerspruchsfreiheitsbeweis bereits erbracht ist, ist demnach die Formel  $\mathfrak{F}_1$  nicht durch unsere Axiome widerlegbar.

Nach der abgeleiteten Formel

$$\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$$

ist somit auch  $\mathfrak{F}_2$  nicht widerlegbar.

Dagegen ist die Formel  $\mathfrak{F}_2$  in keinem endlichen Individuenbereich erfüllbar. Um dies zu zeigen, setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{F}(x, y) \sim F(x, y) \& (z) [F(y, z) \rightarrow F(x, z)].$$

Dann ist

$$\mathfrak{F}_2 \sim (x) \overline{F(x, x)} \& (x)(Ey) \mathfrak{F}(x, y).$$

Sollte nun  $\mathfrak{F}_2$  in einem Bereich von  $N$  Individuen erfüllbar sein, so müßte der Ausdruck

$$\sum_{v=0}^N \overline{F(a_v, a_v)} \& \mathfrak{F}(a_0, a_1) \& \mathfrak{F}(a_1, a_2) \& \dots \& \mathfrak{F}(a_{N-1}, a_N)$$

<sup>\*)</sup> Die erste dieser beiden Formeln ist der unter <sup>3)</sup> genannten Abhandlung von P. Bernays und M. Schönfinkel entnommen.

erfüllbar sein<sup>7)</sup>, und zwar in der Weise, daß zwei Individuen der Reihe

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$$

übereinstimmen, da es ja nicht  $N + 1$  verschiedene Individuen geben soll.

Es sei also  $a_\alpha = a_\beta$  mit  $\alpha < \beta$ . Dann müßte auch der Ausdruck

$$\overline{F(a_\beta, a_\beta)} \ \& \ \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \mathfrak{F}(a_{\gamma-1}, a_\gamma)$$

erfüllbar sein. Es gilt nun jedoch

$$\mathfrak{F}(a_{\beta-1}, a_\beta) \rightarrow F(a_{\beta-1}, a_\beta),$$

$$\mathfrak{F}(a_{\gamma-1}, a_\gamma) \rightarrow [F(a_\gamma, a_\beta) \rightarrow F(a_{\gamma-1}, a_\beta)]$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \mathfrak{F}(a_{\gamma-1}, a_\gamma) &\rightarrow F(a_{\beta-1}, a_\beta) \ \& \ [F(a_{\beta-1}, a_\beta) \rightarrow F(a_{\beta-1}, a_\beta)] \\ &\ \& \ [F(a_{\beta-2}, a_\beta) \rightarrow F(a_{\beta-2}, a_\beta)] \ \& \ \dots \\ &\ \& \ [F(a_{\alpha+1}, a_\beta) \rightarrow F(a_{\alpha+1}, a_\beta)], \end{aligned}$$

woraus man durch wiederholte Anwendung des Schlußschemas

$$\sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \mathfrak{F}(a_{\gamma-1}, a_\gamma) \rightarrow F(a_\alpha, a_\beta)$$

erhält. Demnach ist aber, da  $a_\alpha = a_\beta$  sein soll, der Ausdruck

$$\overline{F(a_\beta, a_\beta)} \ \& \ \sum_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} \mathfrak{F}(a_{\gamma-1}, a_\gamma)$$

widerlegbar und somit unsere Formel  $\mathfrak{F}_3$  in keinem endlichen Individuenbereich erfüllbar.

Da die Implikation

$$\mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$$

gilt, folgt hieraus, daß auch die Formel  $\mathfrak{F}_1$  in keinem endlichen Individuenbereich erfüllbar ist.

Wir haben also zwei Formeln  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  der Gestalt

$$(x)(y)(z)(E u) \mathfrak{A}(x, y, z, u)$$

und

$$(x)(E y)(z) \mathfrak{A}(x, y, z)$$

angegeben, die nur im unendlichen Individuenbereich erfüllbar sind.

Hiernach besteht nur noch für die Formelklassen

$$(E x_1) \dots (E x_k)(y_1) \dots (y_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$$

und

$$(E x_1) \dots (E x_k)(y_1)(y_2) \dots (E z_1) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, z_1, \dots, z_l)$$

<sup>7)</sup> Das  $\Sigma$ -Symbol steht hier wie im folgenden stets für die mehrfache Konjunktion.

die Möglichkeit, daß sie keine nur im Unendlichen erfüllbare Formeln enthalten.

Es soll nun im folgenden bewiesen werden, daß tatsächlich jede Formel der Gestalt

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) (y_2) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, z_1, \dots, z_l)$$

entweder widerlegbar oder schon in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar ist. Für die Formeln, bei denen alle Seinszeichen den Allzeichen vorangehen, wurde derselbe Sachverhalt bereits von P. Bernays und M. Schönfinkel<sup>\*)</sup> gezeigt.

Dabei wollen wir den formalen Standpunkt einnehmen, wie er von D. Hilbert in seinen Abhandlungen zur Grundlegung der Mathematik dargelegt ist, und nur finite Überlegungen zulassen. Der Begriff „Unendlich“ wird hierbei vollkommen ausgeschaltet; und wenn wir sagen, daß eine Formel nur im unendlichen Individuenbereich erfüllbar ist, so soll dies weiter nichts bedeuten, als daß die Formel in keinem endlichen Individuenbereich erfüllbar und nicht durch die Axiome widerlegbar ist.

Wir werden uns durchweg der Hilbertschen Symbolik bedienen, ferner aber noch einige für unsere Zwecke praktische Abkürzungen einführen, die wir nun kurz erklären wollen.

Kleine deutsche Buchstaben sollen, wenn nichts anderes gesagt ist, stets für Variablentupel verwendet werden. So bedeutet z. B.  $x$  ein  $k$ -tupel von Individuenvariablen  $x_1, \dots, x_k$  und es steht  $(E x)$  für  $(E x_1) \dots (E x_k)$  und  $(x)$  für  $(x_1) \dots (x_k)$ .

Ferner steht ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^n \mathfrak{A}_i$$

für die Konjunktion

$$\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \dots \& \mathfrak{A}_n$$

und ebenso ein Ausdruck der Form

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{A}_i$$

für die Disjunktion

$$\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_n$$

Um den Nachweis für die angegebenen Behauptungen zu erbringen, werden wir folgenden Weg einschlagen:

Wir betrachten in § 2 den allgemeinen Fall der Formeln

$$(\eta) (E z) \mathfrak{A}(\eta, z)$$

<sup>\*)</sup> Siehe Fußnote <sup>2)</sup>.

mit  $r$  All- und  $s$  Seinszeichen<sup>9)</sup>. Für die Erfüllbarkeit derartiger Formeln lassen sich eine notwendige und eine hinreichende Bedingung angeben. Und zwar sind diese beiden Bedingungen so beschaffen, daß sie für den Fall von höchstens zwei Allzeichen zusammenfallen, so daß sie ein Entscheidungsverfahren für die Formeln

$$(y_1)(y_2)(E\exists)\mathfrak{A}(y_1, y_2, \exists)$$

abgeben.

In einer später erscheinenden Fortsetzung dieser Arbeit werden wir unter Benutzung dieses allgemeinen Entscheidungsverfahrens beweisen, daß jede überhaupt erfüllbare Formel der Gestalt

$$(y_1)(y_2)(E\exists)\mathfrak{A}(y_1, y_2, \exists)$$

in einem endlichen Individuenbereich erfüllt werden kann.

Eine Ausdehnung dieses Satzes auf die Formeln

$$(E x)(y_1)(y_2)(E\exists)\mathfrak{A}(x, y_1, y_2, \exists)$$

werden wir schon im § 3 dieser Arbeit vorwegnehmen.

Es sei noch bemerkt, daß wir bei unseren formalen Ableitungen auch das Gleichheitssymbol und dessen Axiome hinzunehmen werden. Dies ist aus dem Grunde zulässig, weil bekanntlich eine jede das Gleichheitssymbol nicht enthaltende Formel, die unter Benutzung der Gleichheitsaxiome ableitbar ist, sich auch aus den Axiomen des Prädikatenkalküls allein ableiten läßt. Es ist also eine mit Hilfe der Gleichheitsaxiome widerlegbare Formel auch im reinen Prädikatenkalkül widerlegbar.

## § 2.

### Allgemeine Bedingungen für die Erfüllbarkeit der Formeln

$$(\eta)(E\exists)\mathfrak{A}(\eta, \exists).$$

Die Untersuchungen dieses Paragraphen beziehen sich auf eine Formel „ $\mathfrak{A}$ “ der Gestalt

$$(\eta)(E\exists)\mathfrak{A}(\eta, \exists).$$

Dabei soll  $\eta$  ein  $r$ -tupel von Individuenvariablen  $y_1, \dots, y_r$ , ferner  $\exists$  ein  $s$ -tupel von Individuenvariablen  $z_1, \dots, z_s$  und schließlich  $\mathfrak{A}(\eta, \exists)$  ein Ausdruck sein, der mittels der Operationen des Aussagenkalküls zusammen-

<sup>9)</sup> Es handelt sich hier um den allgemeinen Fall des engeren Prädikatenkalküls, da sich ja die Erfüllbarkeit einer jeden Formel desselben zurückführen läßt auf die Erfüllbarkeit einer solchen pränex-n Normalform, in der sämtliche Allzeichen den Seinszeichen voranstehen.

gesetzt ist aus  $n$  Formelvariablen  $F_1, \dots, F_n$ , deren Argumente durch die Individuenvariablen  $y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s$  ausgefüllt sind.

Um für die Erfüllbarkeit der Formel  $\mathfrak{F}$  eine notwendige und eine hinreichende Bedingung angeben zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein, die zunächst erklärt werden sollen.

Bekanntlich läßt sich der in der Formel  $\mathfrak{F}$  hinter den All- und Seinszeichen stehende Ausdruck  $\mathfrak{A}(\eta, \mathfrak{z})$  in einer ausgezeichneten disjunktiven Normalform entwickeln, in der jedes Disjunktionsglied alle möglichen Ausdrücke enthält, welche aus den in  $\mathfrak{F}$  enthaltenen Formelvariablen mit den in dieser Formel auftretenden Individuenvariablen als Argumenten gebildet werden können. Ein jedes solches Disjunktionsglied wollen wir eine „Grundkonjunktion der Formel  $\mathfrak{F}$ “ nennen.

Wir werden es im folgenden stets mit einer gewissen Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  zu tun haben. Wir sprechen dann kurz von „ $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktionen“ anstatt von Grundkonjunktionen aus der Menge  $\mathfrak{M}$ . Eine solche Menge  $\mathfrak{M}$  braucht nicht alle Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  zu enthalten, also jede Grundkonjunktion nicht eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion zu sein.

Es sei  $\mathfrak{G}(\eta, \mathfrak{z})$  eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion und  $u$  ein beliebiges Tupel von Individuenvariablen aus  $\eta, \mathfrak{z}$ . Es läßt sich dann eine Teilkonjunktion  $\mathfrak{E}(u)$  von  $\mathfrak{G}(\eta, \mathfrak{z})$  in der Weise bestimmen, daß alle die Glieder von  $\mathfrak{G}(\eta, \mathfrak{z})$ , welche nur Argumente aus  $u$  besitzen, zu  $\mathfrak{E}(u)$  gehören, andererseits aber auch nur Individuenvariablen aus  $u$  in  $\mathfrak{E}(u)$  auftreten. Eine jede derartige aus einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}(\eta, \mathfrak{z})$  gebildete Teilkonjunktion  $\mathfrak{E}(u)$  nennen wir eine „direkte  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion“. Unter dem allgemeineren Begriff der „ $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion“ fassen wir nun alle die Konjunktionen zusammen, die aus den direkten  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen durch Umbenennung der Individuenvariablen in beliebige andere (die in der Formel  $\mathfrak{F}$  nicht vorzukommen brauchen) hervorgehen, wobei jedoch verschiedene Individuenvariablen stets wieder in verschiedene übergehen sollen.

Eine konjunktive Zusammenfassung von mehreren  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen nennen wir, falls in derselben kein Ausdruck sowohl negiert als auch nichtnegiert auftritt, eine „ $\mathfrak{M}$ -Konjunktion“. Eine  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion soll „einfach“ heißen, wenn sie sich durch konjunktive Zusammenfassung von solchen  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen bilden läßt, die zu je zweien keine gemeinsamen Individuenvariablen besitzen.

Diejenigen direkten  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen, welche alle Variablen aus  $\eta$  aber keine weiteren Individuenvariablen enthalten, werden wir später „ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktionen“ nennen. Wir haben dann zu

beachten, daß in jeder  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion genau eine ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion als Teilkonjunktion enthalten ist.

Einer  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion läßt sich nun eine bestimmte Anordnung aller in ihr auftretenden Individuenvariablen zuordnen. Eine jede solche Anordnung, bei der auch einzelne Individuenvariablen mehrmals auftreten dürfen, nennen wir eine „Variablenreihe“ der  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion. Eine  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion mit zugeordneter Variablenreihe, die jedoch keine Variable aus  $\mathfrak{z}$  enthält, bezeichnen wir als „geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion“, die Länge der zugeordneten Variablenreihe als ihren „Grad“.

Wir sagen, daß eine geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{A}(u)$ , welche den Grad  $r$  und die Variablenreihe  $u$  besitzt, von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}(\eta, \mathfrak{z})$  „ähnlich umfaßt“ wird, wenn  $\mathfrak{G}(u, \mathfrak{z})$  widerspruchslös<sup>10)</sup> ist und  $\mathfrak{A}(u)$  als Teilkonjunktion enthält.

Nach diesen vorbereitenden Erklärungen können wir zwei Bedingungen für die Erfüllbarkeit unserer Formel angeben, zunächst die *notwendige Bedingung (N)*:

Die Formel  $\mathfrak{F}$  ist nur dann erfüllbar, wenn es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  gibt, so daß jede geordnete einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird.

Ferner besteht die *hinreichende Bedingung (H)*:

Die Formel  $\mathfrak{F}$  ist erfüllbar, wenn es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  gibt, so daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird.

Wir wollen zunächst die notwendige Bedingung (N) ableiten.

Es seien

$$\mathfrak{B}_1(\eta, \mathfrak{z}), \dots, \mathfrak{B}_m(\eta, \mathfrak{z})$$

die Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$ . Bringen wir die ableitbare Formel

$$\sum_{i=1}^m \{ (E\eta) (E\mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \vee (\overline{E\eta}) (E\mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \}$$

auf die disjunktive Normalform, so erhalten wir eine Disjunktion

$$\prod_{k=1}^{2^m} \mathfrak{C}_k$$

in der jedes Disjunktionsglied  $\mathfrak{C}_k$  die Gestalt

$$\sum_{i \in \mathfrak{M}} (E\eta) (E\mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \ \& \ \sum_{i \notin \mathfrak{M}} (\overline{E\eta}) (E\mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z})$$

<sup>10)</sup> Wir nennen eine Konjunktion immer dann widerspruchslös, wenn in ihr kein Ausdruck zugleich negiert und nichtnegiert auftritt.

hat, wobei  $\mathfrak{N}$  eine Teilmenge der Zahlen  $1, \dots, m$  ist und  $\sum_{i \in \mathfrak{N}}$  bedeutet, daß sich die Konjunktion über alle Zahlen der Menge  $\mathfrak{N}$  erstreckt, und entsprechend  $\sum_{i \notin \mathfrak{N}}$ , daß über die nicht zu  $\mathfrak{N}$  gehörenden Zahlen der Menge  $\{1, \dots, m\}$  zu summieren ist.

Da  $\prod_{k=1}^{2^m} \mathfrak{C}_k$  ableitbar ist, läßt sich auch

$$\mathfrak{F} \sim \prod_{k=1}^{2^m} \{\mathfrak{F} \& \mathfrak{C}_k\}$$

ableiten. Somit ist  $\mathfrak{F}$  nur dann erfüllbar, wenn mindestens für ein  $k$

$$\mathfrak{F} \& \mathfrak{C}_k$$

erfüllbar ist. Es muß in diesem Fall also eine Formel „ $\mathfrak{G}$ “ der Gestalt

$$\begin{aligned} (\eta) (E \mathfrak{z}) \prod_{i=1}^m \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \& \sum_{i \in \mathfrak{N}} (E \eta) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \\ \& \sum_{i \notin \mathfrak{N}} (\overline{E \eta}) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \end{aligned}$$

erfüllbar sein. Mit Hilfe der ableitbaren Formel

$$\begin{aligned} (\eta) (E \mathfrak{z}) \prod_{i=1}^m \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \& \sum_{i \notin \mathfrak{N}} (\overline{E \eta}) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \\ \rightarrow (\eta) (E \mathfrak{z}) \left| \prod_{i=1}^m \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \& \sum_{i \notin \mathfrak{N}} \overline{\mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z})} \right| \end{aligned}$$

erhält man ferner die Implikation

$$\mathfrak{G} \rightarrow (\eta) (E \mathfrak{z}) \prod_{i \in \mathfrak{N}} \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}) \& \sum_{i \notin \mathfrak{N}} (E \eta) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z}).$$

Die Menge der Grundkonjunktionen  $\mathfrak{B}_i(\eta, \mathfrak{z})$  mit  $i \in \mathfrak{N}$ , die wir jetzt mit

$$\mathfrak{G}_1(\eta, \mathfrak{z}), \dots, \mathfrak{G}_t(\eta, \mathfrak{z})$$

bezeichnen wollen, nennen wir  $\mathfrak{M}$ . (Diese Menge darf natürlich nicht leer sein, wenn  $\mathfrak{G}$  erfüllbar sein soll.) Es gilt dann

$$\mathfrak{G} \rightarrow (\eta) (E \mathfrak{z}) \prod_{i=1}^t \mathfrak{G}_i(\eta, \mathfrak{z}) \& \sum_{i=1}^t (E \eta) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{G}_i(\eta, \mathfrak{z}).$$

Für jede  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion  $\mathfrak{G}(v)$  läßt sich die Implikation

$$\sum_{i=1}^t (E \eta) (E \mathfrak{z}) \mathfrak{G}_i(\eta, \mathfrak{z}) \rightarrow (E v) \mathfrak{G}(v)$$

ableiten. Da die einfachen  $\mathfrak{M}$ -Konjunktionen durch konjunktive Zusammenfassung von solchen  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen entstehen, welche



keine gemeinsamen Individuenvariablen besitzen, erhält man also auch für jede einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{A}(w)$  die Implikation

$$\sum_{i=1}^l (E \eta) (E \zeta) \mathfrak{G}_i(\eta, \zeta) \rightarrow (E w) \mathfrak{A}(w)$$

und somit

$$\mathfrak{G} \rightarrow (\eta) (E \zeta) \prod_{i=1}^l \mathfrak{G}_i(\eta, \zeta) \ \& \ (E w) \mathfrak{A}(w).$$

Ist nun  $\mathfrak{A}(w)$  eine geordnete einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades mit der Variablenreihe  $w$ , so ist also

$$\mathfrak{G} \rightarrow (w) (E \zeta) \prod_{i=1}^l \mathfrak{G}_i(w, \zeta) \ \& \ (E w) \mathfrak{A}(w)$$

und demnach auch

$$\mathfrak{G} \rightarrow \prod_{i=1}^l (E w) (E \zeta) \{ \mathfrak{G}_i(w, \zeta) \ \& \ \mathfrak{A}(w) \}$$

ableitbar.  $\mathfrak{G}$  ist also nur dann erfüllbar, wenn mindestens eine Konjunktion

$$\mathfrak{G}_i(w, \zeta) \ \& \ \mathfrak{A}(w)$$

erfüllbar ist. Dies ist aber nur möglich, wenn  $\mathfrak{G}_i(w, \zeta)$  widerspruchslös ist und  $\mathfrak{A}(w)$  als Teilkonjunktion enthält, d. h. wenn  $\mathfrak{A}(w)$  von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_i(\eta, \zeta)$  ähnlich umfaßt wird. Es ist also  $\mathfrak{G}$  und somit auch  $\mathfrak{F}$  nur dann erfüllbar, wenn es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  gibt, so daß jede geordnete einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird.

Um nun auch die hinreichende Bedingung (H) abzuleiten, denken wir uns eine Formel  $\mathfrak{F}$  und eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  vorgegeben, und zwar von der Eigenschaft, daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird. Wir haben dann nur zu zeigen, daß die Formel  $\mathfrak{F}$  erfüllbar ist.

Zu diesem Zweck wollen wir noch einige von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{M}$  abhängige Begriffe einführen.

Wir verstehen unter einem „*Wertsystem*“ ein System von endlich vielen Individuen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  und  $n$  logische Funktionen  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , sowie von Zuordnungen eines der beiden Wahrheitswerte „wahr“, „falsch“ zu einem jeden Ausdruck, der aus einer logischen Funktion  $\Phi_i$  durch Ausfüllung ihrer Argumente mit Individuen des Systems entsteht. Dabei soll eine jede logische Funktion  $\Phi_i$  gerade so viel Argumente besitzen, wie die ihr entsprechende Formelvariable  $F_i$  der Formel  $\mathfrak{F}$ .

Eine Reihe von einzelnen Individuen eines Wertsystems in einer bestimmten Anordnung, bei der auch einzelne Individuen mehrmals auftreten dürfen, nennen wir eine „*Individuenreihe*“ des Wertsystems. Individuenreihen von der Länge  $r$  bezeichnen wir auch als „*r-Reihen*“. Wir sagen, daß eine Individuenreihe in einem Wertsystem enthalten ist, wenn alle Individuen der Reihe dem System angehören.

Ist irgendein Ausdruck  $\mathfrak{P}(u)$  gegeben, so meinen wir im folgenden mit  $\mathfrak{P}^*(u)$  stets den Ausdruck, den man aus  $\mathfrak{P}(u)$  erhält, wenn in demselben die  $F_i$  durch die  $\Phi_i$  ersetzt werden.

Ein Wertsystem heißt „für eine  $r$ -Reihe  $\alpha$  ausgezeichnet“, wenn die  $r$ -Reihe  $\alpha$  in dem Wertsystem enthalten ist und es eine ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{R}(\eta)$  gibt, so daß  $\mathfrak{R}^*(\alpha)$  in dem Wertsystem den Wert „wahr“ besitzt<sup>11)</sup>.

Ferner nennen wir ein Wertsystem „absolut ausgezeichnet“, wenn es für jede in demselben enthaltene  $r$ -Reihe ausgezeichnet ist.

Schließlich soll ein Wertsystem „über eine  $r$ -Reihe  $\alpha$  abgeschlossen“ heißen, wenn es in dem Wertsystem eine Individuenreihe  $\beta$  von der Länge  $s$  gibt, so daß  $\mathfrak{R}^*(\alpha, \beta)$  den Wert „wahr“ erhält.

Es lassen sich nun folgende Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. Es gibt mindestens ein absolut-ausgezeichnetes Wertsystem.

Hilfssatz 2. Jedes absolut-ausgezeichnete Wertsystem läßt sich für eine beliebige in ihm enthaltene  $r$ -Reihe  $\alpha$  zu einem über  $\alpha$  abgeschlossenen absolut-ausgezeichneten Wertsystem erweitern.

Zum Beweise des Hilfssatzes 1 wählen wir eine beliebige  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{B}(\eta, \zeta)$  aus. Es sei  $\mathfrak{E}(y_1)$  diejenige direkte  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion, welche alle Ausdrücke von  $\mathfrak{B}(\eta, \zeta)$  enthält, in denen  $y_1$  als einzige Variable auftritt, und  $r$  die Variablenreihe von der Länge  $r$ , bei der an jeder Stelle die Variable  $y_1$  steht.  $\mathfrak{E}(y_1)$  läßt sich durch Zuordnung der Variablenreihe  $r$  als geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades auffassen. Diese wird nach Voraussetzung von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}(\eta, \zeta)$  ähnlich umfaßt, d. h. aber, daß  $\mathfrak{G}(\eta, \zeta)$  widerspruchlos ist und  $\mathfrak{E}(y_1)$  als Teilkonjunktion enthält. Dies ist jedoch, da in  $\mathfrak{E}(y_1)$  schon alle die Ausdrücke, welche nur die Variable  $y_1$  enthalten, auftreten, nur möglich, wenn  $\mathfrak{E}(y_1)$  mit  $\mathfrak{R}(r)$  äquivalent ist, wobei  $\mathfrak{R}(\eta)$  die in  $\mathfrak{G}(\eta, \zeta)$  enthaltene ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion sein soll.

<sup>11)</sup> Der Wahrheitswert eines zusammengesetzten Ausdrucks ist in der bekannten Weise zu errechnen, nach der z. B.  $A \& B$  den Wert „wahr“ hat, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  diesen Wert besitzen, sonst aber den Wert „falsch“ hat.

Wir bilden jetzt ein Wertsystem  $W$ , das nur ein Individuum  $\alpha$  enthält. Für die Zuordnung der Wahrheitswerte setzen wir fest, daß  $\mathfrak{E}^*(\alpha)$  den Wert „wahr“ haben soll. Diese Definition ist widerspruchslös, da in der Elementarkonjunktion  $\mathfrak{E}(y_1)$  kein Ausdruck zugleich negiert und nichtnegiert auftritt.

Die einzige in dem Wertsystem mögliche  $r$ -Reihe  $\varrho$  enthält an jeder Stelle das Individuum  $\alpha$ . Also ist ebenso wie  $\mathfrak{E}(y_1)$  mit  $\mathfrak{R}(\tau)$  auch  $\mathfrak{E}^*(\alpha)$  mit  $\mathfrak{R}^*(\varrho)$  äquivalent.  $\mathfrak{R}^*(\varrho)$  hat demnach ebenfalls den Wert „wahr“. Da  $\mathfrak{R}(\eta)$  eine ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion ist, ist somit  $W$  für die  $r$ -Reihe  $\varrho$  ausgezeichnet, also, da  $\varrho$  die einzige  $r$ -Reihe von  $W$  ist, absolutausgezeichnet. Hiermit ist die Gültigkeit des Hilfssatzes 1 durch Angabe eines absolutausgezeichneten Wertsystems nachgewiesen.

Beim Beweise des Hilfssatzes 2 gehen wir von einem absolutausgezeichneten Wertsystem  $W$  aus. Die Aufgabe besteht darin, es zu einem über die in  $W$  enthaltene  $r$ -Reihe  $\alpha$  abgeschlossenen absolutausgezeichneten Wertsystem  $W'$  zu erweitern.

Da  $W$  absolutausgezeichnet ist und die  $r$ -Reihe  $\alpha$  enthält, gibt es eine ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{R}(\eta)$ , so daß  $\mathfrak{R}^*(\alpha)$  in  $W$  den Wert „wahr“ annimmt. Ist  $\eta'$  eine solche Variablenreihe der Länge  $r$ , die nur Variablen aus  $\eta$  enthält, wobei nur an den Stellen in  $\eta$  gleiche Variablen stehen sollen, an denen in  $\alpha$  gleiche Individuen auftreten, so folgt aus der Wahrheit von  $\mathfrak{R}^*(\alpha)$  die Widerspruchslosigkeit von  $\mathfrak{R}(\eta')$ .  $\mathfrak{R}(\eta')$  läßt sich also durch Zuordnung der Variablenreihe  $\eta'$  als geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades auffassen. Sie wird nach Voraussetzung von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}(\eta, 3)$  ähnlich umfaßt, d. h. aber, daß  $\mathfrak{G}(\eta', 3)$  widerspruchslös ist und  $\mathfrak{R}(\eta')$  als Teilkonjunktion enthält.  $\mathfrak{G}(\eta', 3)$  läßt sich demnach in der Form

$$\mathfrak{R}(\eta') \& \mathfrak{L}(\eta', 3)$$

darstellen, wobei  $\mathfrak{L}(\eta', 3)$  nur Ausdrücke enthält, in denen mindestens eine Variable aus 3 auftritt.

Wir bilden jetzt das Wertsystem  $W'$ , indem wir zu  $W$   $s$  neue Individuen  $\beta_1, \dots, \beta_s$  hinzufügen. Den hierdurch neu entstehenden Ausdrücken ordnen wir in der Weise Wahrheitswerte zu, daß  $\mathfrak{L}^*(\alpha, \beta)$  für das  $s$ -tupel  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$  den Wert „wahr“ erhält. Diese Zuordnungen von Wahrheitswerten stehen untereinander und mit denen von  $W$  in keinem Widerspruch, da  $\mathfrak{L}(\eta', 3)$  widerspruchslös ist und  $\mathfrak{L}^*(\alpha, \beta)$  nur solche Ausdrücke enthält, die in  $W$  nicht vorkommen.

Demnach erhalten in  $W'$  sowohl  $\mathfrak{R}^*(\alpha)$  als auch  $\mathfrak{L}^*(\alpha, \beta)$  den Wert „wahr“, also auch ihre konjunktive Zusammenfassung  $\mathfrak{G}^*(\alpha, \beta)$ . Da  $\mathfrak{G}(\eta, 3)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ist, hat somit auch  $\mathfrak{R}^*(\alpha, \beta)$  den Wert „wahr“. Folglich ist  $W'$  über  $\alpha$  abgeschlossen.

Bei den weiteren Festsetzungen über die Zuordnungen der Wahrheitswerte haben wir jetzt nur noch darauf zu achten, daß  $W'$  auch absolutausgezeichnet wird. Wir werden diese Zuordnungen schrittweise bestimmen, indem wir folgendes Verfahren anwenden.

Es sei  $\varrho$  eine  $r$ -Reihe aus  $W'$ . Einigen von den Ausdrücken, die aus den  $\Phi_i$  durch Ausfüllung ihrer Argumente mit Individuen aus  $\varrho$  gebildet sind, mögen schon Wahrheitswerte zugeordnet sein. Wir bilden die konjunktive Zusammenfassung aus allen diesen Ausdrücken, denen bereits der Wert „wahr“ zugeordnet ist, und den Negationen aller dieser Ausdrücke, die bereits den Wert „falsch“ erhalten haben. Ersetzt man hierin die  $\Phi_i$  durch die  $F_i$  und die Individuen durch Variablen (verschiedene durch verschiedene), in der Weise, daß bei dieser Ersetzung die Individuenreihe  $\varrho$  in die Variablenreihe  $r$  übergeht, so erhält man eine bestimmte Konjunktion  $\mathfrak{P}(r)$ . Diese Konjunktion ist so gewählt, daß  $\mathfrak{P}^*(\varrho)$  in dem System bereits der Wert „wahr“ zugeordnet ist. Die aus  $\mathfrak{P}(r)$  durch Zuordnung der Variablenreihe  $r$  entstehende geordnete Konjunktion vom Grade  $r$  nennen wir „die durch  $\varrho$  erzeugte geordnete Konjunktion mit der Variablenreihe  $r$ “.

Ist nun die durch eine  $r$ -Reihe  $\varrho_1$  erzeugte geordnete Konjunktion  $\mathfrak{P}(r_1)$  eine geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion, so wird sie, da sie den Grad  $r$  besitzt, nach Voraussetzung von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}(\eta, \beta)$  ähnlich umfaßt. Folglich ist, wenn wir mit  $\Omega(\eta)$  die in  $\mathfrak{G}(\eta, \beta)$  enthaltene ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion bezeichnen,  $\mathfrak{P}(r_1)$  eine Teilkonjunktion von  $\Omega(r_1)$ , also auch  $\mathfrak{P}^*(\varrho_1)$  eine Teilkonjunktion von  $\Omega^*(\varrho_1)$ .  $\Omega^*(\varrho_1)$  enthält außer den auch in  $\mathfrak{P}^*(\varrho_1)$  auftretenden Ausdrücken nur solche, denen noch kein Wahrheitswert zugeordnet ist. Da ferner  $\mathfrak{P}^*(\varrho_1)$  den Wert „wahr“ hat und  $\Omega^*(\varrho_1)$ , ebenso wie  $\Omega(r_1)$  und  $\mathfrak{G}(r_1, \beta)$ , widerspruchlos ist, können wir demnach in der Weise noch weitere Zuordnungen von Wahrheitswerten festsetzen, daß auch  $\Omega^*(\varrho_1)$  den Wert „wahr“ erhält. Dann wird, da  $\Omega(\eta)$  ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion ist,  $W'$  für die  $r$ -Reihe  $\varrho_1$  ausgezeichnet.

Ist auch nach diesen Festsetzungen über die Zuordnung von Wahrheitswerten wieder eine durch eine  $r$ -Reihe  $\varrho_2$  erzeugte geordnete Konjunktion eine geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion, so lassen sich in gleicher Weise weitere Zuordnungen von Wahrheitswerten bestimmen, so daß  $W'$  auch für die  $r$ -Reihe  $\varrho_2$  ausgezeichnet wird.

Dieses Verfahren läßt sich entsprechend für weitere  $r$ -Reihen  $\varrho_3, \varrho_4, \dots$  fortsetzen.

Wir wollen nun beweisen, daß nach jedem der angegebenen Schritte von Wahrheitswertzuordnungen stets die durch eine beliebige in  $W'$  enthaltene  $r$ -Reihe  $\varrho$  erzeugten geordneten Konjunktionen geordnete  $\mathfrak{M}$ -Kon-

junktionen sind. Ist dies bewiesen, so erkennt man, daß sich die Zuordnungen schrittweise so bestimmen lassen, daß  $W'$  für jede in diesem Wertsystem enthaltene  $r$ -Reihe ausgezeichnet, also absolut-ausgezeichnet wird.

Das angegebene Verfahren sei für die in  $W'$  enthaltenen  $r$ -Reihen  $\varrho_1, \dots, \varrho_k$  widerspruchsfrei durchgeführt, d. h. so, daß jedem Ausdruck höchstens einer der beiden Wahrheitswerte zugeordnet ist.  $\varrho$  sei eine weitere in  $W'$  enthaltene  $r$ -Reihe. Wir haben dann zu zeigen, daß jede durch  $\varrho$  erzeugte geordnete Konjunktion eine geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion ist.

Es sei  $m_i$  die Menge aller Individuen, die zugleich in  $\varrho$  und in  $\varrho_i$  auftreten (für  $i = 1, \dots, k$ ),  $m_{k+1}$  die Menge der Individuen, die zugleich in  $\varrho$  und in einer der Reihen  $\alpha, \beta$  vorkommen, und  $m_{k+2}$  die Menge der Individuen aus  $\varrho$ , die dem ursprünglichen Wertsystem  $W$  angehören. Aus jeder nicht leeren Menge  $m_j$  ( $j = 1, \dots, k+2$ ) bilden wir eine solche  $r$ -Reihe  $\sigma_j$ , welche alle Individuen aus  $m_j$  enthält. Dies ist möglich, da jede Menge  $m_j$  nur Individuen aus  $\varrho$  enthält, also höchstens  $r$  Elemente besitzt. Allerdings gibt es nur dann eine  $r$ -Reihe  $\sigma_j$ , wenn  $m_j$  nicht leer ist.

Unter  $\mathfrak{S}_j(s_j)$  wollen wir die durch  $\sigma_j$  erzeugte geordnete Konjunktion mit der  $r$ -Reihe  $s_j$  verstehen. Es läßt sich dann zeigen, daß es stets eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_j(\eta, \mathfrak{z})$  gibt, so daß  $\mathfrak{G}_j(\alpha, \beta)$  für passend gewählte  $\alpha, \beta$  widerspruchsfrei ist und  $\mathfrak{S}_j(s_j)$  als Teilkonjunktion enthält. Wir wollen dies für die verschiedenen Arten der  $\mathfrak{S}_j(s_j)$  getrennt beweisen.

1. Da wir das oben angegebene Verfahren für die  $\varrho_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) schon als durchgeführt annehmen, ist  $W'$  für die  $\varrho_i$  ausgezeichnet. Es gibt also für  $i = 1, \dots, k$  ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktionen  $\mathfrak{R}_i(\eta)$ , so daß  $\mathfrak{R}_i^*(\varrho_i)$  den Wert „wahr“ besitzt. Da  $\sigma_i$  nur Individuen aus  $\varrho_i$  enthält, und auch  $\mathfrak{S}_i^*(\sigma_i)$  den Wert „wahr“ hat, ist  $\mathfrak{S}_i^*(\sigma_i)$  eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{R}_i^*(\varrho_i)$ , also auch  $\mathfrak{S}_i(s_i)$  von  $\mathfrak{R}_i(r_i)$  für passende  $r_i$ . Dabei ist  $\mathfrak{R}_i(r_i)$  widerspruchsfrei, läßt sich also durch Zuordnung der Variablenreihe  $r_i$  als geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades auffassen. Somit wird  $\mathfrak{R}_i(r_i)$  nach Voraussetzung von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_i(\eta, \mathfrak{z})$  ähnlich umfaßt, d. h. aber, daß  $\mathfrak{G}_i(r_i, \mathfrak{z})$  widerspruchsfrei ist und  $\mathfrak{R}_i(r_i)$  als Teilkonjunktion enthält. Da  $\mathfrak{S}_i(s_i)$  in  $\mathfrak{R}_i(r_i)$  enthalten ist, ist  $\mathfrak{S}_i(s_i)$  somit auch eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{G}_i(r_i, \mathfrak{z})$ . Hiermit ist unsere Behauptung für den Fall  $1 \leq j \leq k$  bewiesen.

2. Beim Beweise für den Fall  $j = k+1$  ist zu beachten, daß  $\sigma_{k+1}$  nur Individuen aus  $\alpha, \beta$  enthält und  $\mathfrak{S}_{k+1}^*(\sigma_{k+1})$  den Wert „wahr“ besitzt. Da es nun nach unseren obigen Betrachtungen eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_{k+1}(\eta, \mathfrak{z})$  aus der Menge  $\mathfrak{M}$  gibt mit der Eigenschaft, daß  $\mathfrak{G}_{k+1}^*(\alpha, \beta)$  den Wert „wahr“ hat, ist demnach  $\mathfrak{S}_{k+1}^*(\sigma_{k+1})$  Teilkonjunktion von

$\mathfrak{G}_{k+1}^*(\alpha, \beta)$ , folglich auch  $\mathfrak{H}_{k+1}(s_{k+1})$  von der widerspruchsfreien Konjunktion  $\mathfrak{G}_{k+1}(a_{k+1}, b_{k+1})$  für passend gewählte  $a_{k+1}, b_{k+1}$ .

3. Für den Fall  $j = k + 2$  benutzen wir die Tatsachen, daß  $\sigma_{k+2}$  nur Individuen aus  $W$  enthält und  $W$  nach Voraussetzung absolut ausgezeichnet ist. Hieraus folgt nämlich, daß es eine ausgezeichnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{R}(\eta)$  gibt, so daß  $\mathfrak{R}^*(\sigma_{k+2})$  den Wert „wahr“ hat. Da auch  $\mathfrak{H}_{k+2}^*(\sigma_{k+2})$  denselben Wert besitzt, ist diese Konjunktion eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{R}^*(\sigma_{k+2})$ . Folglich ist  $\mathfrak{R}(s_{k+2})$  widerspruchsfrei und  $\mathfrak{H}_{k+2}(s_{k+2})$  eine Teilkonjunktion hiervon. Die geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{R}(s_{k+2})$  mit der Variablenreihe  $s_{k+2}$  wird von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_{k+2}(\eta, \beta)$  ähnlich umfaßt. Somit ist  $\mathfrak{G}_{k+2}(s_{k+2}, \beta)$  widerspruchsfrei und  $\mathfrak{R}(s_{k+2})$ , also auch  $\mathfrak{H}_{k+2}(s_{k+2})$  eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{G}_{k+2}(s_{k+2}, \beta)$ .

Wir haben somit allgemein nachgewiesen, daß es stets eine  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion  $\mathfrak{G}_j(\eta, \beta)$  gibt, so daß  $\mathfrak{G}_j(a, b)$  für passend gewählte  $a, b$ , widerspruchsfrei ist und  $\mathfrak{H}_j(s_j)$  als Teilkonjunktion enthält. Mit Hilfe dieses Ergebnisses wollen wir jetzt zeigen, daß die  $\mathfrak{H}_j(s_j)$   $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen sind.

Die Variablenreihen  $a, b$ , entstehen aus den Variablenreihen  $\eta, \beta$  durch gewisse Variablenersetzungen, bei denen unter Umständen auch verschiedene Variablen durch gleiche ersetzt werden. Wir bestimmen für jedes  $j$  eine solche Variablenreihe  $u$ , der Länge  $r$  von Variablen aus  $\eta, \beta$ , daß in  $u$ , genau an allen den Stellen gleiche Variablen stehen, an denen dies auch für  $s$ , der Fall ist, und daß ferner durch dieselbe Ersetzung, durch die  $\eta, \beta$  in  $a, b$  übergeht, auch  $u$  in  $s$  übergeht. Dann ist ebenso, wie  $\mathfrak{H}_j(s_j)$  eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{G}_j(a, b)$  ist, auch  $\mathfrak{H}_j(u_j)$  eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{G}_j(\eta, \beta)$ . Da nun durch unsere bisherigen Festsetzungen allen Ausdrücken, die aus den  $\Phi$ , durch Ausfüllung ihrer Argumente mit Individuen aus  $\sigma$ , gebildet sind, schon Wahrheitswerte zugeordnet sind und  $\mathfrak{G}_j(a, b)$  widerspruchsfrei ist, enthält die durch  $\sigma$  erzeugte Konjunktion  $\mathfrak{H}_j(s_j)$  alle Ausdrücke von  $\mathfrak{G}_j(a, b)$ , in denen nur Variablen aus  $s$ , auftreten. Hieraus ergibt sich, da in den  $u$ , überall dort gleiche Variablen auftreten, wo dies bei den  $s$ , der Fall ist, daß auch  $\mathfrak{H}_j(u_j)$  alle die Ausdrücke von  $\mathfrak{G}_j(\eta, \beta)$  enthält, in denen nur Variablen aus  $u$ , vorkommen. Folglich ist  $\mathfrak{H}_j(u_j)$  eine direkte  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion, also auch  $\mathfrak{H}_j(s_j)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion.

Es sei nun  $\mathfrak{P}(r)$  die durch  $\varrho$  erzeugte geordnete Konjunktion mit der Variablenreihe  $r$ . Durch dieselbe Zuordnung von Variablen zu den Individuen aus  $\varrho$ , durch welche die Variablenreihe  $r$  der  $r$ -Reihe  $\varrho$  zugeordnet ist, seien den  $r$ -Reihen  $\sigma$ , die Variablenreihen  $s$ , zugeordnet.

Beachtet man, daß durch unsere bisherigen Festsetzungen nur solchen Ausdrücken Wahrheitswerte zugeordnet sind, deren Argumente schon alle



einer  $r$ -Reihe  $\sigma_i$  angehören, so erkennt man, daß jeder in  $\mathfrak{P}(r)$  auftretende Ausdruck auch schon in einer der durch die  $\sigma_i$  erzeugten Konjunktionen  $\mathfrak{S}_i(s_i)$  vorkommt.  $\mathfrak{P}(r)$  ist demnach die konjunktive Zusammenfassung aller  $\mathfrak{S}_i(s_i)$ , die sich ja als  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen erwiesen haben.  $\mathfrak{P}(r)$  ist also eine  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion, falls in derselben nicht ein Ausdruck zugleich negiert und nichtnegiert auftritt. Letzteres ist aber deshalb nicht möglich, weil  $\mathfrak{P}^*(\varrho)$  durch die bisherigen Festsetzungen, die wir ja als widerspruchsfrei annehmen, den Wert „wahr“ erhalten hat.

Hiermit ist bewiesen, daß nach jedem Schritt von Wahrheitswertzuordnungen stets alle durch eine in  $W'$  enthaltene  $r$ -Reihe erzeugten geordneten Konjunktionen geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktionen sind. Die Zuordnungen von Wahrheitswerten lassen sich also, wie wir gesehen haben, so bestimmen, daß  $W'$  über die  $r$ -Reihe  $\alpha$  abgeschlossen und absolut-ausgezeichnet wird, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Zur endgültigen Ableitung der hinreichenden Bedingung ( $H$ ) bedienen wir uns noch folgender Begriffsbildungen.

Enthält ein Wertsystem  $W'$  nur solche Individuen, die auch in einem Wertsystem  $W$  vorkommen, und sind die Wahrheitswertzuordnungen für die Ausdrücke aus  $W'$  die gleichen wie für die entsprechenden Ausdrücke aus  $W$ , so soll  $W'$  ein „*Teilsystem*“ des Wertsystems  $W$  heißen. Wir nennen  $W'$  ein „*echtes Teilsystem*“ von  $W$ , wenn  $W'$  nicht alle in  $W$  vorkommenden Individuen enthält.

Ein Wertsystem  $W$  heißt „*über ein Teilsystem  $W'$  abgeschlossen*“, wenn  $W$  über jede in  $W'$  enthaltene  $r$ -Reihe abgeschlossen ist.

Hiernach läßt sich in folgender Weise eine Ordnungseinteilung für Wertsysteme rekursiv definieren.

1. Ein Wertsystem, das über kein echtes Teilsystem abgeschlossen ist, habe die Ordnung 1.
2. Ist die höchste Ordnung der echten Teilsysteme eines Wertsystems  $W$ , über die  $W$  abgeschlossen ist, gleich  $h$ , so habe  $W$  die Ordnung  $h + 1$ .

Wir beweisen nun den

Hilfssatz 3. Für jede natürliche Zahl  $h$  gibt es ein Wertsystem der Ordnung  $h$ .

Zunächst erkennt man, daß es für jede Zahl  $h$  ein absolut-ausgezeichnetes Wertsystem gibt, dessen Ordnung mindestens  $h$  ist.

Aus Hilfssatz 1 folgt nämlich die Existenz eines absolut-ausgezeichneten Wertsystems, dessen Ordnung mindestens 1 ist. Ferner kann man nach Hilfssatz 2 jedes absolut-ausgezeichnete Wertsystem der Ordnung  $h$  sukzessive



zu einem absolut-ausgezeichneten Wertsystem, dessen Ordnung mindestens  $h + 1$  beträgt, erweitern. Hieraus folgt aber durch vollständige Induktion, daß es für jede natürliche Zahl  $h$  ein Wertsystem gibt, dessen Ordnung größer oder gleich  $h$  ist.

Da nun die Ordnungseinteilung so definiert ist, daß es in jedem Wertsystem der Ordnung  $h + 1$  ein Teilsystem der Ordnung  $h$  gibt, folgt aus der Existenz eines Wertsystems, dessen Ordnung mindestens  $h$  ist, auch die Existenz eines Wertsystems der Ordnung  $h$ . Somit gibt es sogar absolut-ausgezeichnete Wertsysteme der Ordnung  $h$  für jede natürliche Zahl  $h$ , womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Wir benutzen nun einen Satz von J. Herbrand, welcher in der Herbrandschen Terminologie, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen, folgendermaßen lautet:

„Ist eine Formel für jede natürliche Zahl  $h$  in einem Feld von der Ordnung  $h$  erfüllbar, so ist die Formel erfüllbar“.

Dieser Satz läßt sich in der von uns verwendeten Terminologie für den hier behandelten Fall folgendermaßen aussprechen:

„Gibt es für jede natürliche Zahl  $h$  ein Wertsystem der Ordnung  $h$ , so ist die Formel erfüllbar.“

Aus diesem Satz, zu dessen Beweis wir auf die Abhandlungen von J. Herbrand verweisen<sup>11)</sup>, ergibt sich in Verbindung mit dem Hilfssatz 3 die Erfüllbarkeit der Formel  $\mathfrak{F}$ .

Wir haben also unter der Voraussetzung, daß es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  gibt, so daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird, die Erfüllbarkeit der Formel  $\mathfrak{F}$  bewiesen. Damit ist der Nachweis für die Gültigkeit der hinreichenden Bedingung (H) erbracht.

Wir wollen nun zeigen, daß die beiden von uns abgeleiteten Bedingungen (H) und (N) für den Fall  $r \leq 2$  tatsächlich ein Entscheidungsverfahren liefern. Dies ergibt sich aus folgendem Satz:

*Jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion, deren Grad höchstens 2 beträgt, ist einfach.*

<sup>11)</sup> Der Satz ist von J. Herbrand bewiesen in seiner Abhandlung: *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Thèse de l'Univ. de Paris, 1930, oder *Travaux de la Soc. des Sc. et L. de Varsovie* 1930. Weitere Erklärungen und Anwendungen dieses Satzes hat J. Herbrand gegeben in den beiden Abhandlungen: *Sur le problème fondamental de la Logique Mathématique*, *Compt. Rend. de la Soc. des Sc. et L. de Varsovie* 1931. — *Sur la non-contradiction de l'Arithmétique*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 106 (1932).

Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir eine geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $\mathfrak{R}(u)$ , deren Grad höchstens 2 ist. Nach Definition ist  $\mathfrak{R}(u)$  konjunktive Zusammenfassung von  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen

$$\mathfrak{E}_1(u_1), \dots, \mathfrak{E}_s(u_s).$$

Wir beweisen nun in Fallunterscheidungen, daß  $\mathfrak{R}(u)$  einfach ist.

1. Enthält ein  $u_i$  schon alle Variablen aus  $u$ , so kommen alle in  $\mathfrak{R}(u)$  auftretenden Ausdrücke schon in dieser  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion  $\mathfrak{E}_i(u_i)$  vor. Folglich ist  $\mathfrak{R}(u)$  mit  $\mathfrak{E}_i(u_i)$  äquivalent, also auch eine  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktion, umsomehr eine einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion.

2. Der Fall, daß in keinem  $u_i$  schon alle Variablen aus  $u$  vorkommen, kann, da  $u$  höchstens zwei Variablen enthalten soll, nur dann eintreten, wenn  $u$  genau zwei verschiedene Variablen  $u_1, u_2$  enthält und in jedem  $u_i$  nur eine dieser beiden Variablen vorkommt. Es gibt in diesem Falle unter den  $\mathfrak{E}_i(u_i)$  eine Konjunktion  $\mathfrak{E}_p(u_p)$ , welche nur die Variable  $u_1$  enthält, und eine Konjunktion  $\mathfrak{E}_q(u_q)$ , in der  $u_2$  als einzige Variable vorkommt. Ferner sind alle übrigen  $\mathfrak{E}_i(u_i)$  mit einer dieser beiden Konjunktionen äquivalent, da nämlich die konjunktive Zusammenfassung von zwei  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen mit gleichen Variablen nur dann widerspruchsfrei ist, wenn die beiden  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen miteinander äquivalent sind. Also ist  $\mathfrak{R}(u)$  in diesem Falle schon die konjunktive Zusammenfassung der beiden  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen  $\mathfrak{E}_p(u_p)$  und  $\mathfrak{E}_q(u_q)$ . Da diese beiden  $\mathfrak{M}$ -Elementarkonjunktionen keine gemeinsamen Variablen besitzen, ist  $\mathfrak{R}(u)$  eine einfache  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion.

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes erhält man aus den Bedingungen (H) und (N) für den Fall  $r \leq 2$  das Entscheidungskriterium:

*Die Formel  $\mathfrak{F}$  ist dann und nur dann erfüllbar, wenn es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel  $\mathfrak{F}$  gibt, so daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion  $r$ -ten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird.*

### § 3.

Die Behandlung der Formeln  $(E_2)(y_1)(y_2)(E_3)\mathfrak{A}(x, y_1, y_2, z)$ .

Wir befassen uns jetzt mit einer Formel „ $\mathfrak{F}$ “ der Gestalt

$$(E x)(\eta)(E z)\mathfrak{A}(x, \eta, z),$$

bei der  $x$  ein  $k$ -tupel von Individuenvariablen  $x_1, \dots, x_k$ , ferner  $\eta$  das Variablenpaar  $y_1, y_2$  und  $z$  ein  $l$ -tupel  $z_1, \dots, z_l$  bedeuten soll. Der von All- und Seinszeichen freie Ausdruck  $\mathfrak{A}(x, \eta, z)$  möge  $n$  Formelvariablen mit der höchsten Stellenzahl  $h$  enthalten.

Wir wollen ein Entscheidungsverfahren angeben und gleichzeitig beweisen, daß die Formel  $\mathfrak{F}$  entweder durch die Axiome widerlegbar oder schon in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar ist.

Dies gelingt durch Zurückführung auf das Entscheidungsproblem der Formeln

$$(y_1)(y_2)(Ez)\mathfrak{A}(y_1, y_2, z).$$

Und zwar verläuft die im folgenden dargestellte Reduktion des Entscheidungsproblems inhaltlich vollkommen analog zu der von W. Ackermann angewandten Reduktion des Entscheidungsproblems der Formeln

$$(Ex_1) \dots (Ex_k)(y)(Ez_1) \dots (Ez_l)\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y, z_1, \dots, z_l)$$

auf das für die Formeln

$$(x)(Ey_1) \dots (Ey_l)\mathfrak{A}(x, y_1, \dots, y_l)^{13}.$$

Dabei werden wir schon das Ergebnis einer später erscheinenden Fortsetzung dieser Arbeit benutzen, daß eine jede Formel der Gestalt

$$(y_1)(y_2)(Ez)\mathfrak{A}(y_1, y_2, z)$$

entweder widerlegbar oder in einem Bereich von  $4^{10n^2 \cdot 2^k}$  Individuen<sup>14)</sup> erfüllbar ist.

Bevor wir die genannte Zurückführung vornehmen können, sind noch einige Umformungen an unserer Formel  $\mathfrak{F}$  vorzunehmen.

Nehmen wir an, daß diese Formel nicht schon in einem Bereich von  $k$  Individuen erfüllbar ist (denn sonst wäre ja schon alles bewiesen), und führen wir eine Formel  $\mathfrak{U}$  durch die Äquivalenz

$$\mathfrak{U} \sim (x)(Ev) \sum_{v=1}^k v \neq x,$$

ein, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{F} \sim (Ex)(y)(Ez)\mathfrak{A}(x, y, z) \ \& \ \mathfrak{U}$$

ableitbar.

Definieren wir nun gewisse Ausdrücke

$$\mathfrak{P}_v(x, y) \quad (v = 1, \dots, k+1)$$

<sup>13)</sup> Siehe Fußnote 3).

<sup>14)</sup>  $n$  ist die Anzahl der Formelvariablen,  $k$  die höchste Stellenzahl derselben und  $l$  die Anzahl der Seinszeichen unserer Formel.

durch die Äquivalenzen

$$\mathfrak{P}_v(x, y) \sim x_v = y \quad (v = 1, \dots, k),$$

$$\mathfrak{P}_{k+1}(x, y) \sim \sum_{\mu=1}^k x_\mu \neq y,$$

so ist die Disjunktion

$$\prod_{v=1}^{k+1} \mathfrak{P}_v(x, y),$$

also auch

$$\prod_{\mu, v=1}^{k+1} [\mathfrak{P}_\mu(x, y_1) \& \mathfrak{P}_v(x, y_2)]$$

ableitbar, und es ergibt sich

$$(2) \quad (\eta)(E\exists) \mathfrak{U}(x, \eta, \exists) \\ \sim \sum_{\mu, v=1}^{k+1} (\eta) [\mathfrak{P}_\mu(x, y_1) \& \mathfrak{P}_v(x, y_2) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{U}(x, \eta, \exists)].$$

Wir wollen nun die einzelnen Ausdrücke

$$(\eta) [\mathfrak{P}_\mu(x, y_1) \& \mathfrak{P}_v(x, y_2) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{U}(x, \eta, \exists)],$$

die zur Abkürzung mit  $\Omega_{\mu, v}(x)$  bezeichnet werden mögen, genauer untersuchen.

Für  $1 \leq \mu \leq k$ ,  $1 \leq v \leq k$  ist

$$\Omega_{\mu, v}(x) \sim (\eta) [x_\mu = y_1 \& x_v = y_2 \rightarrow (E\exists) \mathfrak{U}(x, \eta, \exists)]$$

und somit, wenn wir unter  $x_\mu$ , das Variablenpaar  $(x_\mu, x_v)$  verstehen,

$$\Omega_{\mu, v}(x) \sim (E\exists) \mathfrak{U}(x, x_{\mu, v}, \exists).$$

Definieren wir einen Ausdruck  $\mathfrak{B}(x, \eta)$  durch

$$\mathfrak{B}(x, \eta) \sim \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^k x_\mu \neq y_v,$$

so ist, wie man sich nach der Definition von  $\mathfrak{U}$  leicht überzeugen kann,

$$\mathfrak{U} \rightarrow (E\eta) \mathfrak{B}(x, \eta)$$

ableitbar, und es ergibt sich hiernach

$$(\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \Omega_{\mu, v}(x)] \& \mathfrak{U} \rightarrow (E\eta) [(\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \Omega_{\mu, v}(x)) \& \mathfrak{B}(x, \eta)],$$

also auch

$$(\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \Omega_{\mu, v}(x)] \& \mathfrak{U} \rightarrow \Omega_{\mu, v}(x).$$

Aus dieser Implikation kann man nun die Äquivalenz

$$\Omega_{\mu, v}(x) \& \mathfrak{U} \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \Omega_{\mu, v}(x)] \& \mathfrak{U}$$

ableiten, und man erhält

$$(3) \quad \Omega_{\mu, v}(x) \& \mathfrak{U} \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{U}(x, x_{\mu, v}, \exists)] \& \mathfrak{U}.$$

Ferner bekommen wir für  $1 \leq v \leq k$  die Formel

$$\Omega_{k+1,v}(x) \sim (\eta) \left[ \sum_{\mu=1}^k x_{\mu} \neq y_1 \ \& \ x_v = y_1 \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta, \exists) \right]$$

und hieraus, wenn  $\eta$ , das Variablenpaar  $(y_1, x_v)$  ist,

$$\Omega_{k+1,v}(x) \sim (y_1) \left[ \sum_{\mu=1}^k x_{\mu} \neq y_1 \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta_v, \exists) \right].$$

Bezeichnen wir nun das Variablenpaar  $(y_v, x_v)$  mit  $\eta'_v$ , so gilt demnach auch die Formel

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1,v}(x) \sim (y_1) \left[ \sum_{\mu=1}^k x_{\mu} \neq y_1 \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta_v, \exists) \right] \\ \vee (y_v) \left[ \sum_{\mu=1}^k x_{\mu} \neq y_v \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta'_v, \exists) \right], \end{aligned}$$

aus welcher wir eine Formel der Gestalt

$$(4) \quad \Omega_{k+1,v}(x) \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}_{k+1,v}(x, \eta, \exists)]$$

erhalten.

Entsprechend ergibt sich auch eine Äquivalenz

$$(5) \quad \Omega_{v,k+1}(x) \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}_{v,k+1}(x, \eta, \exists)].$$

Da nach unseren Definitionen

$$\mathfrak{P}_{k+1}(x, y_1) \ \& \ \mathfrak{P}_{k+1}(x, y_2) \sim \mathfrak{B}(x, \eta)$$

gilt, erhalten wir schließlich auch

$$(6) \quad \Omega_{k+1,k+1}(x) \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta, \exists)].$$

Aus den Formeln (3) bis (6) ersehen wir, daß es gewisse Ausdrücke

$$\mathfrak{A}_{\mu,v}(x, \eta, \exists)$$

von der Art gibt, daß stets die Äquivalenz

$$\Omega_{\mu,v}(x) \ \& \ \mathfrak{U} \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\exists) \mathfrak{A}_{\mu,v}(x, \eta, \exists)] \ \& \ \mathfrak{U}$$

besteht, woraus wir nach (2) die Formel

$$\left\{ \begin{aligned} & (\eta) (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta, \exists) \ \& \ \mathfrak{U} \\ & \sim (\eta) \left[ \mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \sum_{\mu,v=1}^{k+1} (E\exists) \mathfrak{A}_{\mu,v}(x, \eta, \exists) \right] \ \& \ \mathfrak{U} \end{aligned} \right.$$

erhalten. Aus dieser ergibt sich eine Formel der Gestalt

$$(\eta) (E\exists) \mathfrak{A}(x, \eta, \exists) \ \& \ \mathfrak{U} \sim (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E\mathfrak{U}) \mathfrak{B}(x, \eta, \mathfrak{U})] \ \& \ \mathfrak{U},$$

in der  $u$  ein  $s$ -tupel von Individuenvariablen  $u_1, u_2, \dots, u_s$  mit  $s = l \cdot (k+1)^s$  bedeutet, und wir bekommen nach (1) schließlich die Formel

$$(7) \quad \mathfrak{F} \sim (E x) (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E u) \mathfrak{B}(x, \eta, u)] \& \mathfrak{U}.$$

Wir beachten nun, daß sich aus der Definition der  $\mathfrak{B}_r(x, y)$  auch die Ableitbarkeit von

$$\mathfrak{B}(x, \eta, u) \sim \prod_{r_1 \dots r_s=1}^{k+1} \left[ \mathfrak{B}(x, \eta, u) \& \sum_{i=1}^s \mathfrak{B}_{r_i}(x, u_i) \right]$$

ergibt. Hieraus erhält man mit Hilfe von allgemeingültigen Formeln der Gestalt

$$(E u) [\mathfrak{F}(x, u) \& x = u] \sim \mathfrak{F}(x, x)$$

und durch Umbenennung der Individuenvariablen eine gewisse Formel

$$(E u) \mathfrak{B}(x, \eta, u) \sim \prod_{v=1}^{(k+1)^s} (E u^v) [\mathfrak{B}_v(x, \eta, u^v) \& \mathfrak{B}_v(x, u^v)],$$

bei der  $u^v$  ein  $s_v$ -tupel (mit  $s_v \leq s$ ) der Variablen  $u_1, \dots, u_s$ , und

$$\mathfrak{B}_v(x, u^v) \sim \sum_{\lambda=1}^k \sum_{\mu=1}^{s_v} x_{\lambda} \neq u_{\mu}$$

ist. Die  $\mathfrak{B}_v(x, \eta, u^v)$  entstehen durch Variablenersetzungen aus  $\mathfrak{B}(x, \eta, u)$ .

Definieren wir jetzt eine Formel  $\mathfrak{B}'(x, u)$  durch

$$\mathfrak{B}'(x, u) \sim \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^s x_{\mu} \neq u_v,$$

so ist

$$\mathfrak{U} \rightarrow (E u) \mathfrak{B}'(x, u)$$

ableitbar und jedes  $\mathfrak{B}_v(x, u^v)$  eine Teilkonjunktion von  $\mathfrak{B}'(x, u)$ . Hiernach erkennt man leicht die Ableitbarkeit von

$$(E u) \mathfrak{B}(x, \eta, u) \& \mathfrak{U} \sim \prod_{v=1}^{(k+1)^s} (E u^v) [\mathfrak{B}_v(x, \eta, u^v) \& \mathfrak{B}'(x, u)] \& \mathfrak{U}.$$

Man erhält somit eine Formel der Gestalt

$$(E u) \mathfrak{B}(\cdot, \eta, u) \& \mathfrak{U} \sim (E u) [\mathfrak{C}(x, \eta, u) \& \mathfrak{B}'(x, u)] \& \mathfrak{U},$$

in der  $\mathfrak{C}(x, \eta, u)$  ein von All- und Seinszeichen freier, das Gleichheitsymbol nicht enthaltender Ausdruck ist.

Nach Formel (7) ergibt sich hieraus

$$\mathfrak{F} \sim (E x) (\eta) [\mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E u) [\mathfrak{C}(x, \eta, u) \& \mathfrak{B}'(x, u)]] \& \mathfrak{U}$$

oder auch, wenn wir unter  $\mathfrak{B}(x, y, u)$  die konjunktive Zusammenfassung

$$\sum_{\mu=1}^k \left( \sum_{\nu=1}^2 x_{\mu} \neq y_{\nu} \& \sum_{\nu=1}^2 x_{\mu} \neq u_{\nu} \right)$$

von  $\mathfrak{B}(x, y)$  und  $\mathfrak{B}'(x, u)$  verstehen, die Formel

$$(8) \quad \mathfrak{F} \sim (Ex)(y) \{ \mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (Eu) [\mathfrak{C}(x, y, u) \& \mathfrak{B}(x, y, u)] \} \& \mathfrak{U},$$

die wir unseren weiteren Untersuchungen zugrunde legen werden.

Der wesentliche Schritt, auf dem die Lösung unseres Entscheidungsproblems beruht, ist die Elimination der Variablen  $x$ , in dem Ausdruck  $\mathfrak{C}(x, y, u)$ . Dies gelingt durch die Angabe einer bestimmten Formel  $\mathfrak{G}$ , die dann und nur dann widerlegbar ist, wenn die Formel  $\mathfrak{F}$  widerlegbar ist, und dann und nur dann in einem Bereich von  $N$  Individuen erfüllt werden kann, wenn dasselbe für die Formel  $\mathfrak{F}$  der Fall ist.

Um den Nachweis dafür zu führen, daß eine Formel  $\mathfrak{G}$  diese genannte Eigenschaft besitzt, genügt es, zu beweisen, daß die Formel  $\mathfrak{G}$  mit der Formel  $\mathfrak{F}$  deduktionsgleich<sup>15)</sup> ist. Es ist nämlich die Widerlegbarkeit einer Formel  $\mathfrak{F}$  mit der Ableitbarkeit der Formel  $\mathfrak{F}$  und die  $N$ -zählige Erfüllbarkeit (d. h. die Erfüllbarkeit in einem Bereich von  $N$  Individuen) einer Formel  $\mathfrak{F}$  mit der Unableitbarkeit der Formel

$$\mathfrak{F} \vee \overline{\mathfrak{R}}$$

gleichbedeutend, wenn wir unter  $\mathfrak{R}$  den durch die Äquivalenz

$$\mathfrak{R} \sim (Ex_1) \dots (Ex_N) \left( \sum_{\mu < \nu}^N x_{\mu} \neq x_{\nu} \& (y) \prod_{\nu=1}^N y = x_{\nu} \right)$$

definierten Ausdruck verstehen. Man erkennt ferner aus der Tatsache, daß  $\mathfrak{R}$  keine Formelvariablen enthält, daß im Falle der Deduktionsgleichheit von  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{G}$  auch die Formeln

$$\mathfrak{F} \vee \overline{\mathfrak{R}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} \vee \overline{\mathfrak{R}}$$

deduktionsgleich sind. Somit folgt aber, falls  $\mathfrak{F}$  mit  $\mathfrak{G}$  deduktionsgleich ist, aus der Widerlegbarkeit oder  $N$ -zähligen Erfüllbarkeit einer der beiden Formeln  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  das entsprechende für die andere dieser beiden Formeln.

Wir definieren nun eine Formel  $\mathfrak{G}$  durch die Äquivalenz

$$(9) \quad \mathfrak{G} \sim (Ex)(y) \{ \mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (Eu) [\mathfrak{D}(y, u) \& \mathfrak{B}(x, y, u)] \} \& \mathfrak{U},$$

in welcher der Ausdruck  $\mathfrak{D}(y, u)$  noch genau bestimmt werden soll, und ferner zwei Formeln  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{G}'$  durch die Äquivalenzen

$$\mathfrak{F}' \sim (Ey) \{ \mathfrak{B}(a, y) \& (u) [\mathfrak{C}(a, y, u) \vee \mathfrak{B}(a, y, u)] \} \vee \overline{\mathfrak{U}}$$

<sup>15)</sup> Zwei Formeln  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen deduktionsgleich, wenn  $\mathfrak{A}$  aus  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  aus  $\mathfrak{A}$  ableitbar ist.



und

$$\mathfrak{G}' \sim (E\eta) \{ \mathfrak{B}(a, \eta) \& (u) [\overline{\mathfrak{D}(\eta, u)} \vee \overline{\mathfrak{B}(a, \eta, u)}] \} \vee \overline{\mathfrak{U}},$$

in denen  $a$  ein  $k$ -tupel von freien Individuenvariablen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sein soll.

Man erkennt dann unmittelbar die Deduktionsgleichheit der Formeln  $\overline{\mathfrak{F}}$  und  $\mathfrak{F}'$ , sowie der Formeln  $\overline{\mathfrak{G}}$  und  $\mathfrak{G}'$ . Demnach genügt es zum Nachweis für die Deduktionsgleichheit der Formeln  $\overline{\mathfrak{F}}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$ , die Deduktionsgleichheit der Formeln  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{G}'$  zu beweisen. Hierzu wiederum genügt es, zu zeigen, daß die Ausdrücke

$$\mathfrak{C}(a, \eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u), \quad \mathfrak{D}(\eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u)$$

allein durch Anwendung von Einsetzungen für Formelvariablen mittels der Operationen des durch die Gleichheitsaxiome erweiterten Aussagenkalküls ineinander überführbar sind, d. h. daß ein jeder dieser beiden Ausdrücke durch die angegebenen Operationen aus dem anderen abgeleitet werden kann.

Wir wollen nun den Ausdruck  $\mathfrak{D}(\eta, u)$  bestimmen, indem wir ihn durch gewisse Umformungen aus dem Ausdruck  $\mathfrak{C}(a, \eta, u)$  hervorgehen lassen.

Dies sei zunächst für den einfachsten Spezialfall erläutert, in dem  $\mathfrak{C}(a, \eta, u)$  nur die zweistelligen-Formelvariablen

$$F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_n(x, y)$$

enthält und  $k = 1$  ist, also  $a$  eine einzige freie Variable  $a$  bedeutet.

Wir ersetzen in  $\mathfrak{C}(a, \eta, u)$  für alle von  $a$  verschiedenen Variablen  $v, w$

$$F_i(v, w) \text{ durch } G_i^1(v, w),$$

$$F_i(v, a) \text{ durch } G_i^2(v),$$

$$F_i(a, v) \text{ durch } G_i^3(v),$$

$$F_i(a, a) \text{ durch } G_i^4,$$

so daß wir einen Ausdruck erhalten, welcher  $a$  nicht enthält und mit  $\mathfrak{D}(\eta, u)$  bezeichnet werden soll. Man erkennt dann sofort, daß

$$\mathfrak{C}(a, \eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u)$$

durch Einsetzungen für die Formelvariablen  $G_i^r$  aus

$$\mathfrak{D}(\eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u)$$

erhalten wird.

Ebenso besteht diese Beziehung aber auch umgekehrt. Setzen wir nämlich in

$$\mathfrak{C}(a, \eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u)$$

für  $F_i(x, y)$ , was  $x$  und  $y$  auch für Variablen sind, stets den Ausdruck

$$\{x \neq a \& y \neq a \& G_i^1(x, y)\} \vee \{x \neq a \& y = a \& G_i^2(x)\} \\ \vee \{x = a \& y \neq a \& G_i^3(y)\} \vee \{x = a \& y = a \& G_i^4\},$$

so ergibt sich

$$F_i(v, w) \& v \neq a \& w \neq a \sim G_i^1(v, w) \& v \neq a \& w \neq a, \\ F_i(v, a) \& v \neq a \sim G_i^2(v) \& v \neq a, \\ F_i(a, v) \& v \neq a \sim G_i^3(v) \& v \neq a, \\ F_i(a, a) \sim G_i^4,$$

ferner aber auch, da dann

$$\overline{F_i(x, y)} \sim \{x = a \vee y = a \vee \overline{G_i^1(x, y)}\} \& \{x = a \vee y \neq a \vee \overline{G_i^2(x)}\} \\ \& \{x \neq a \vee y = a \vee \overline{G_i^3(y)}\} \& \{x \neq a \vee y \neq a \vee \overline{G_i^4}\}$$

gilt, analog

$$\overline{F_i(v, w)} \& v \neq a \& w \neq a \sim \overline{G_i^1(v, w)} \& v \neq a \& w \neq a, \\ \overline{F_i(v, a)} \& v \neq a \sim \overline{G_i^2(v)} \& v \neq a, \\ \overline{F_i(a, v)} \& v \neq a \sim \overline{G_i^3(v)} \& v \neq a, \\ \overline{F_i(a, a)} \sim \overline{G_i^4}.$$

Hiernach erkennt man aus der Zusammensetzung von  $\mathfrak{B}(a, \eta, u)$ , wenn man sich die Ausdrücke  $\mathfrak{C}(a, \eta, u)$  und  $\mathfrak{D}(\eta, u)$  in den disjunktiven Normalformen entwickelt denkt, daß bei der gemachten Einsetzung

$$\mathfrak{C}(a, \eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u) \sim \mathfrak{D}(\eta, u) \& \mathfrak{B}(a, \eta, u)$$

ist, was wir ja beweisen wollten.

Wir haben also einen Ausdruck  $\mathfrak{D}(\eta, u)$  mit  $4n$  Formelvariablen (von denen einzelne 0 Argumentstellen haben, also Aussagenvariablen sind) gefunden, für den  $\mathfrak{F}$  mit  $\mathfrak{G}$  deduktionsgleich ist.

Entsprechend läßt sich eine Ersetzung im allgemeinen Fall angeben, in dem  $a$  ein  $k$ -tupel ist und  $\mathfrak{C}(a, \eta, u)$  die Formelvariablen

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

enthält, von denen jede Formelvariable  $F_i$  genau  $h_i$  Argumentstellen besitzen soll.

Um diese Ersetzung angeben zu können, schicken wir noch einige Erklärungen voraus:

1. Ist  $w_i$  ein  $h_i$ -tupel von Variablen aus der Reihe

$$a_1, \dots, a_n, y_1, y_2, u_1, \dots, u_n,$$

so verstehen wir unter  $[w_i]$  das  $h_i$ -tupel, das aus  $w_i$  entsteht, indem man in diesem jede Variable  $a$ , durch  $v$  und jede andere Variable durch  $k+1$  ersetzt.

2. Sind  $v_1, v_2, \dots, v_{h_i}$  Zahlen aus der Reihe  $1, 2, \dots, k+1$ , so sei  $f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})$  die Nummer des  $h_i$ -tupels  $(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})$  in der lexikographischen Anordnung aller  $h_i$ -tupel von Zahlen aus der angegebenen Reihe. Die Funktion  $f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})$  läuft also von 1 bis  $(k+1)^{h_i}$ . Ist  $[w_i]$  das  $h_i$ -tupel  $(v_1, \dots, v_{h_i})$ , so schreiben wir für  $f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})$  auch  $f_i[w_i]$ .

3. Ist  $v_i$  das  $h_i$ -tupel der Individuenvariablen  $v_1, v_2, \dots, v_{h_i}$ , so sei  $v_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}$  dasjenige Variablentupel, das aus  $v_i$  entsteht, indem man in diesem jede Variable  $v_j$  fortläßt, für welche  $v_j$  nicht gleich  $k+1$  ist. Kommt unter den Zahlen  $v_1, v_2, \dots, v_{h_i}$  keine Zahl  $k+1$  vor, so ist also  $v_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}$  das leere Variablentupel, und ein Ausdruck  $G_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}$  stellt in diesem Falle eine Aussagenvariable  $G_i^{f_i}$  dar. Demnach ist  $w_i^{f_i[w_i]}$  das Variablentupel, das aus  $w_i$  durch Streichung der Variablen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  entsteht.

Wir ersetzen nun jeden in  $\mathfrak{C}(a, v, u)$  auftretenden Ausdruck der Form

$$F_i(w_i)$$

für ein  $h_i$ -tupel  $w_i$  von Variablen aus der Reihe

$$a_1, \dots, a_k, y_1, y_2, u_1, \dots, u_2$$

durch

$$G_i^{f_i[w_i]}(w_i^{f_i[w_i]}).$$

Der durch diese Ersetzung aus  $\mathfrak{C}(a, v, u)$  entstehende Ausdruck  $\mathfrak{D}(v, u)$  enthält dann keine Variable  $a_j$ . Man erkennt auch, daß

$$\mathfrak{C}(a, v, u) \& \mathfrak{B}(a, v, u)$$

durch Einsetzungen für die Formelvariablen  $G_i^u$  aus

$$\mathfrak{D}(v, u) \& \mathfrak{B}(a, v, u)$$

hervorgeht.

Um auch die Gültigkeit der umgekehrten Beziehung nachzuweisen, treffen wir folgende Festsetzungen: Es sei

$$\mathfrak{M}_i(v) \sim v = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

$$\mathfrak{M}_{k+1}(v) \sim \sum_{v=1}^k v \neq a_v,$$

$$\mathfrak{M}_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}(v_i) \sim \mathfrak{M}_{v_1}(v_1) \& \mathfrak{M}_{v_2}(v_2) \& \dots \& \mathfrak{M}_{v_{h_i}}(v_{h_i}).$$

Wir setzen nun für  $F_i(v_i)$  in  $\mathfrak{C}(a, v, u)$  den Ausdruck

$$\prod_{v_1 \dots v_{h_i} = 1}^{k+1} \left\{ \mathfrak{M}_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}(v_i) \& G_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}(v_i^{f_i(v_1, v_2, \dots, v_{h_i})}) \right\}$$

ein. Hieraus läßt sich dann für jedes aus den Variablen

$$a_1, \dots, a_s, y_1, y_2, u_1, \dots, u_s$$

gebildete  $h_i$ -tupel  $w_i$

$$F_i(w_i) \& \mathfrak{B}(a, y, u) \sim G_i^{f_i(w_i)}(w_i^{f_i(w_i)}) \& \mathfrak{B}(a, y, u)$$

und

$$\overline{F_i(w_i)} \& \mathfrak{B}(a, y, u) \sim \overline{G_i^{f_i(w_i)}(w_i^{f_i(w_i)})} \& \mathfrak{B}(a, y, u)$$

und somit auch

$$\mathfrak{C}(a, y, u) \& \mathfrak{B}(a, y, u) \sim \mathfrak{D}(y, u) \& \mathfrak{B}(a, y, u)$$

ableiten.

Wir haben also den Ausdruck  $\mathfrak{D}(y, u)$  so bestimmt, daß die beiden Formeln

$$\mathfrak{C}(a, y, u) \& \mathfrak{B}(a, y, u), \quad \mathfrak{D}(y, u) \& \mathfrak{B}(a, y, u)$$

durch Einsetzungen für Formelvariablen mittels der Operationen des durch die Gleichheitsaxiome erweiterten Aussagenkalküls ineinander überführbar sind. Demnach sind, wie wir gesehen haben, die Formeln  $\overline{\mathfrak{F}}$  und  $\overline{\mathfrak{G}}$  deduktionsgleich, und es folgt aus der Widerlegbarkeit oder  $N$ -zahligen Erfüllbarkeit der Formel  $\mathfrak{G}$  das entsprechende für die Formel  $\mathfrak{F}$ . Wir brauchen also zur Lösung unseres Entscheidungsproblems nur noch eine Lösung für die Formel  $\mathfrak{G}$  zu finden, welche ja durch die Äquivalenz

$$(9) \quad \mathfrak{G} \sim (Ex)(y) \{ \mathfrak{B}(x, y) \rightarrow (Eu)[\mathfrak{D}(y, u) \& \mathfrak{B}(x, y, u)] \} \& U$$

eingeführt ist. Dabei enthält der Ausdruck  $\mathfrak{D}(y, u)$  nach unseren Festsetzungen

$$\sum_{i=1}^n (k+1)^{h_i}$$

Formelvariablen. Diese Zahl wollen wir mit  $m$  bezeichnen. Da die Stellenzahl  $h_i$  der Formelvariablen  $F_i$  höchstens gleich  $h$  sein soll, ist

$$m \leq n \cdot (k+1)^h.$$

Die höchste Stellenzahl der in  $\mathfrak{D}(y, u)$  auftretenden Formelvariablen ist ebenfalls gleich  $h$ .

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, das Entscheidungsproblem für die Formel  $\mathfrak{G}$  zu lösen. Wir betrachten zu diesem Zweck die Formel

$$(y)(Eu) \mathfrak{D}(y, u),$$

für welche das Entscheidungsproblem ja bereits gelöst ist.

Ist diese Formel, welche  $m$  Formelvariablen mit der höchsten Argumentzahl  $h$  und  $s$  Seinszeichen enthält, nicht widerlegbar, so läßt sie sich, wie wir ja später zeigen wollen, in einem Bereich von

$$N = 4^{10ms^2 \cdot 2^h}$$

Individuen erfüllen. Es ist also für diese Zahl  $N$  der Ausdruck

$$\sum_{y_1, y_2=1}^N \prod_{u_1 \dots u_g=1}^N \mathfrak{D}(y, u)$$

erfüllbar.

Man erkennt, daß dann die Formel  $\mathfrak{G}$  in einem Bereich von  $N + k$  Individuen erfüllbar ist. Fügen wir nämlich zu den Individuen

$$1, 2, \dots, N$$

unseres Bereiches die Individuen

$$N + 1, N + 2, \dots, N + k$$

hinzu, und bezeichnen wir das  $k$ -tupel

$$(N + 1, N + 2, \dots, N + k)$$

mit  $\mathfrak{f}$ , so sind folgende Ausdrücke wahr:

$$\sum_{y_1, y_2=1}^N \sum_{u_1 \dots u_g=1}^N \mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y, u),$$

$$\sum_{y_1=1}^{N+k} \sum_{y_2=N+1}^{N+k} \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y)} \ \& \ \sum_{y_1=N+1}^{N+k} \sum_{y_2=1}^{N+k} \overline{\mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y)}.$$

Hieraus und aus der Erfüllbarkeit von

$$\sum_{y_1, y_2=1}^N \prod_{u_1 \dots u_g=1}^N \mathfrak{D}(y, u)$$

folgt aber die Erfüllbarkeit des Ausdrucks

$$\sum_{y_1, y_2=1}^{N+k} \left\{ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y) \rightarrow \prod_{u_1 \dots u_g=1}^{N+k} [\mathfrak{D}(y, u) \ \& \ \mathfrak{B}(\mathfrak{f}, y, u)] \right\}.$$

Da auch die Formel  $\mathfrak{U}$  in unserem Bereich wahr ist (er enthält mindestens  $k + 1$  Individuen), ist somit die Formel  $\mathfrak{G}$  in einem Bereich von  $N + k$  Individuen erfüllbar.

Wie wir aus den Abschätzungen

$$N \leq 4^{10m} \cdot s^2 \cdot s^k,$$

$$m \leq n \cdot (k + 1)^k,$$

$$s = l \cdot (k + 1)^3$$

ersehen, läßt sich also die Formel  $\mathfrak{G}$ , falls die Formel

$$(y)(\mathfrak{E}u) \mathfrak{D}(y, u)$$

nicht widerlegbar ist, in einem Bereich von

$$4^{10n} \cdot l^3 \cdot s^3 \cdot (k + 1)^{k + 3} + k$$

Individuen erfüllen. —

Ist andererseits die Formel

$$(\eta) (E u) \mathcal{D}(\eta, u)$$

widerlegbar, so ist, wie wir jetzt beweisen wollen, auch die Formel  $\mathfrak{G}$  widerlegbar.

Der Beweis dafür wäre trivial, wenn wir schon wüßten, daß die Formel  $\mathfrak{G}$  entweder in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar oder durch die Axiome widerlegbar ist. Denn aus der endlichen Erfüllbarkeit der Formel kann man unmittelbar die endliche Erfüllbarkeit der Formel

$$(\eta) (E u) \mathcal{D}(\eta, u)$$

ableiten. Somit würde aus der Widerlegbarkeit dieser letzteren Formel die Widerlegbarkeit der Formel  $\mathfrak{G}$  folgen.

Wir haben jedoch noch zu beachten, daß die Formel  $\mathfrak{G}$  nur im unendlichen Individuenbereich erfüllbar, d. h. weder in einem endlichen Individuenbereich erfüllbar noch aus den Axiomen widerlegbar sein könnte. Unser Beweis bedarf daher noch besonderer Hilfsmittel, und zwar gelingt er unter Benutzung der in § 2 abgeleiteten Bedingungen für die Erfüllbarkeit, die wir auf unsere Formel

$$(\eta) (E u) \mathcal{D}(\eta, u)$$

anwenden wollen.

Es seien

$$\mathfrak{G}_1(\eta, u), \dots, \mathfrak{G}_q(\eta, u)$$

die Grundkonjunktionen der genannten Formel, so daß also

$$(10) \quad \mathcal{D}(\eta, u) \sim \prod_{i=1}^q \mathfrak{G}_i(\eta, u)$$

gilt. Wir bilden nun die ableitbare Formel

$$\left\{ \begin{array}{l} (x) \sum_{i=1}^q [(E \eta) (E u) \{ \mathfrak{B}(x, \eta) \& \mathfrak{G}_i(\eta, u) \} \\ \vee (\eta) (u) \{ \mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \overline{\mathfrak{G}_i(\eta, u)} \} ]. \end{array} \right.$$

Diese gehe, wenn wir den hinter den Allzeichen  $(x)$  stehenden Ausdruck in der disjunktiven Normalform entwickeln, über in

$$(11) \quad (x) \prod_{v=1}^{s^q} \mathfrak{P}_v(x),$$

wobei die  $\mathfrak{P}_v(x)$  die Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in \mathfrak{N}} (E \eta) (E u) \{ \mathfrak{B}(x, \eta) \& \mathfrak{G}_i(\eta, u) \} \\ \& \sum_{i \notin \mathfrak{N}} (\eta) (u) \{ \mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow \overline{\mathfrak{G}_i(\eta, u)} \} \end{array} \right.$$

haben. Aus der Ableitbarkeit der Formel (11) ergibt sich nach (9) die Ableitbarkeit von

$$\mathfrak{G} \rightarrow \prod_{v=1}^q (E x) [\mathfrak{P}_v(x) \& (\eta) \{ \mathfrak{B}(x, \eta) \rightarrow (E u) \mathfrak{D}(\eta, u) \}].$$

Somit ist  $\mathfrak{G}$  nur dann erfüllbar, wenn mindestens eine Formel „ $\mathfrak{H}$ “ der Gestalt

$$\mathfrak{P}_v(a) \& (\eta) [\mathfrak{B}(a, \eta) \rightarrow (E u) \mathfrak{D}(\eta, u)]$$

erfüllbar ist. Wir können ferner auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mathfrak{P}_v(a)$  die Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^p (E \eta) (E u) \{ \mathfrak{B}(a, \eta) \& \mathfrak{G}_i(\eta, u) \} \\ \& \sum_{i=p+1}^q (\eta) (u) \{ \mathfrak{B}(a, \eta) \rightarrow \overline{\mathfrak{G}_i(\eta, u)} \} \end{array} \right.$$

hat. Definieren wir nun  $\mathfrak{Q}_1(a)$  und  $\mathfrak{Q}_2(a)$  durch

$$\mathfrak{Q}_1(a) \sim \sum_{i=1}^p (E \eta) (E u) \{ \mathfrak{B}(a, \eta) \& \mathfrak{G}_i(\eta, u) \}$$

$$\mathfrak{Q}_2(a) \sim (\eta) \{ \mathfrak{B}(a, \eta) \rightarrow (u) \sum_{i=p+1}^q \overline{\mathfrak{G}_i(\eta, u)} \},$$

so haben wir also

$$(12) \quad \mathfrak{H} \sim \mathfrak{Q}_1(a) \& \mathfrak{Q}_2(a) \& (\eta) [\mathfrak{B}(a, \eta) \rightarrow (E u) \mathfrak{D}(\eta, u)].$$

Bezeichnen wir die Menge der Grundkonjunktionen

$$\mathfrak{G}_1(\eta, u), \dots, \mathfrak{G}_p(\eta, u)$$

mit  $\mathfrak{M}$ , so gilt für jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion zweiten Grades  $\mathfrak{R}(v)$  mit der Variablenreihe  $v$  die Implikation

$$(13) \quad \mathfrak{Q}_1(a) \rightarrow (E v) [\mathfrak{B}(a, v) \& \mathfrak{R}(v)].$$

Für einfache  $\mathfrak{R}(v)$  ist dies nämlich nach Definition von  $\mathfrak{Q}_1(a)$  leicht zu erkennen. Außerdem besteht aber der Satz, daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion zweiten Grades einfach ist.

Aus der Definition von  $\mathfrak{Q}_2(a)$  und den Formeln (12), (13) ergibt sich nun

$$\mathfrak{H} \rightarrow (E v) (E u) [\mathfrak{B}(a, v) \& \mathfrak{R}(v) \& \mathfrak{D}(v, u) \& \sum_{i=p+1}^q \overline{\mathfrak{G}_i(v, u)}].$$

Da ferner, wie man aus (10) ersieht,

$$\mathfrak{D}(v, u) \& \sum_{i=p+1}^q \overline{\mathfrak{G}_i(v, u)} \rightarrow \prod_{i=1}^p \mathfrak{G}_i(v, u)$$

gilt, erhält man schließlich

$$\mathfrak{H} \rightarrow \prod_{i=1}^p (E v) (E u) [\mathfrak{R}(v) \& \mathfrak{G}_i(v, u)].$$



Hieraus ist zu ersehen, daß  $\mathfrak{S}$  nur dann erfüllbar ist, wenn die Menge  $\mathfrak{M}$  nicht leer ist und  $\mathfrak{R}(v)$  von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird.

Es ist also auch unsere Formel  $\mathfrak{G}$  nur dann erfüllbar, wenn es eine nicht leere Menge  $\mathfrak{M}$  von Grundkonjunktionen der Formel

$$(\eta) (E u) \mathfrak{D}(\eta, u)$$

gibt, so daß jede geordnete  $\mathfrak{M}$ -Konjunktion zweiten Grades von einer  $\mathfrak{M}$ -Grundkonjunktion ähnlich umfaßt wird. Nach den Ergebnissen des § 2 ist daher die Formel  $\mathfrak{G}$  nur dann erfüllbar, wenn sich auch die Formel

$$(\eta) (E u) \mathfrak{D}(\eta, u)$$

erfüllen läßt.

Da wir umgekehrt auch gezeigt hatten, daß im letzten Falle die Formel  $\mathfrak{S}$  schon in einem gewissen endlichen Bereich erfüllbar ist, können wir unter Berücksichtigung unserer vorherigen Ergebnisse folgenden Satz aussprechen:

*Eine jede Formel der Gestalt*

$$(E x_1) \dots (E x_k) (y_1) (y_2) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2, z_1, \dots, z_l),$$

die  $n$  Formelvariablen mit der höchsten Stellenzahl  $h$  enthält, ist entweder durch die Axiome widerlegbar oder in einem Bereich von

$$4^{10} n! \cdot 2^h \cdot (k+1)^{h+4} + k$$

Individuen erfüllbar.

(Eingegangen am 30. 6. 1933.)

# Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse.

Von

A. Khintchine in Moskau.

## § 1.

### Definition der stationären stochastischen Prozesse.

Ein *stochastischer Prozeß* ist eine einparametrische Schar  $x_t$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) von zufälligen Variablen; zur Kennzeichnung des Prozesses gehört, daß für jeden endlichen Wertevorrat  $t_1, t_2, \dots, t_n$  das  $n$ -dimensionale Verteilungsgesetz der entsprechenden Variablen  $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$  vorgegeben sei; selbstverständlich müssen die so definierten Verteilungsgesetze in ihren Zusammenhängen allen Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung genügen.

Während sich die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung ausnahmslos mit diskreten Folgen von zufälligen Variablen beschäftigte, hat sich in der neuesten Zeit die Theorie der stochastischen Prozesse zu einem der wichtigsten Zweige dieser Wissenschaft entwickelt; die mit ihr verbundenen theoretischen Problemkreise eröffneten dem Mathematiker ein äußerst fruchtbares Untersuchungsfeld, während andererseits ihre Ergebnisse zahlreiche Anwendungen, hauptsächlich in verschiedenen Fragen der physikalischen und technischen Statistik, gefunden haben. Es hat sich unter anderem herausgestellt, daß die wichtigsten Verteilungsgesetze, die in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie als asymptotische Formeln auftraten, in der Theorie der stochastischen Prozesse, wie auch zu erwarten war, die Rolle *exakter* Lösungen der entsprechenden Probleme übernehmen.

Die bisher erfolgten Untersuchungen beziehen sich fast ausnahmslos auf eine bestimmte Klasse von stochastischen Prozessen, der in theoretischer und praktischer Beziehung eine große Bedeutung zukommt. Wegen ihrer Analogie zu den „Markoffschen Ketten“, die unter den Folgen zufälliger Variablen eine hervorragende Rolle spielen, wollen wir sie als *Markoffsche Prozesse* bezeichnen. Das charakteristische Merkmal der Markoffschen Prozesse bildet der Umstand, daß für jeden Zeitpunkt die künftige Entwicklung des Vorganges nur von seinem gegenwärtigen Zustand, nicht aber von seiner Vorgeschichte abhängt. In präziser Weise

hat das folgende Bedeutung: sind  $t_1 < t_2 < t_3$  drei beliebige Zeitpunkte,  $a$  und  $b$  zwei beliebige reelle Zahlen, so ist das durch  $x_{t_2} = b$  bedingte Verteilungsgesetz von  $x_{t_1}$  mit dem durch die vollständigere Angabe  $x_{t_1} = a$ ,  $x_{t_2} = b$  bedingten identisch; die durch die Gegenwart gelieferten Voraussetzungen über die Zukunft können also von einer eventuell hinzutretenden Kenntnis über die Vorgeschichte des betrachteten Vorgangs in keiner Weise beeinflußt werden<sup>1)</sup>. Diese Art von Vorgängen, die eine in mathematischer Hinsicht verhältnismäßig leichte Behandlung zuläßt, ist in vielen Anwendungen auch der Wirklichkeit gut angepaßt (radioaktiver Zerfall, Fernspreverkehr u. dgl. m.); viel zahlreicher sind aber wohl die physikalischen und technischen Fragestellungen, bei denen die Vorgeschichte des Vorgangs für das Urteil über seine künftige Entwicklung eine wesentliche Bedeutung hat und auch näherungsweise nicht vernachlässigt werden darf. So würde z. B. die Auffassung der Lagenänderung von beweglichen Teilchen in Diffusionsvorgängen oder Brownscher Bewegung als eines Markoffschen Prozesses offenbar bedeuten, daß der Trägheit keine Rechnung getragen wird. Allerdings könnte man in diesem Beispiel den Begriff der Gegenwart derart erweitern, daß er außer der Lage noch die Geschwindigkeit des Teilchens enthalten soll, was den erwähnten Übelstand zu beseitigen im Stande wäre. Demgegenüber gibt es aber zahlreiche Beispiele, wo die Einführung noch so vieler Parameter in die Kennzeichnung des gegenwärtigen Zustandes die Sachlage doch nicht verbessert; es ist hier vor allem die *statistische Mechanik* zu erwähnen. Betrachtet man die stationäre Bewegung des Phasenraums eines mechanischen Systems und kennzeichnet den gegenwärtigen Zustand eines Punktes durch die Angabe der Zelle, in welcher er augenblicklich enthalten ist, so lassen sich über seine künftige Bewegung verschiedene Wahrscheinlichkeitsaussagen machen. Jede Kenntnis über die Vorgeschichte des Punktes (d. h. jede Angabe über die Zelle, in welcher er zu einem früheren Zeitpunkt war) verändert aber dieses Wahrscheinlichkeitsurteil sehr wesentlich. Diese Tatsache und auch die durch sie bedingte Unmöglichkeit, die Probleme der statistischen Mechanik mit Hilfe der Markoffschen Prozesse in Angriff zu nehmen, hat Hadamard sehr klar in seinem Vortrag auf dem Kongreß in Bologna 1928 ausgesprochen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Die ziemlich verbreitete Ausdrucksweise „durch die Angabe von  $x_t$  wird die Verteilung von  $x_{t'}$  ( $t' > t$ ) vollständig definiert“ ist selbstverständlich ungenügend; eine richtige Fassung findet man z. B. bei G. Pólya (Sur quelques points de la théorie des probabilités, Ann. Inst. H. Poincaré, 1930) und A. Kolmogoroff (Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104 (1931), S. 415).

<sup>2)</sup> Atti del Congr. Intern. dei Matem. Bologna 1928, B. V, S. 133—139; insbesondere S. 138.

Unter den Vorgängen, in denen die Vorgeschichte ein wesentliches Bestimmungsstück der die Zukunft betreffenden Wahrscheinlichkeitsurteile ausmacht, muß vor allem eine Klasse ausgezeichnet werden, deren eingehende Untersuchung zweifellos den Ausgangspunkt aller allgemeineren Forschungen auf diesem Gebiete zu bilden hat. Es sind dies die zeitlich homogenen oder, wie ich sie kürzer nennen will, *stationären* Prozesse. Der durch die Variablenschar  $\alpha$ , gekennzeichnete stochastische Prozeß soll als *stationär* bezeichnet werden, wenn die Verteilungsgesetze der beiden endlichen Variablengruppen  $(\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \dots, \alpha_{t_n})$  und  $(\alpha_{t_1+u}, \alpha_{t_2+u}, \dots, \alpha_{t_n+u})$  einander identisch ausfallen; die Zahl  $n$ , die Zeitpunkte  $t_1, t_2, \dots, t_n$  und die Zeitstrecke  $u$  können dabei ganz beliebig gewählt werden. Es ist ohne weiteres klar, daß dieser Art von stochastischen Prozessen in verschiedenartigen Anwendungsgebieten eine bedeutende Rolle zukommen muß; insbesondere bildet die oben erwähnte Bewegung des Phasenraums eines mechanischen Systems wegen ihrer Stationarität und Maßinvarianz einen stationären Prozeß<sup>3)</sup>, wodurch die Theorie dieser Prozesse eine fundamentale Bedeutung für die statistische Mechanik gewinnt. Aber auch in anderen Gebieten (so z. B. in der Vererbungslehre und Meteorologie) könnten vielleicht die Gesetzmäßigkeiten, die die stationären stochastischen Vorgänge beherrschen, praktische Wichtigkeit beanspruchen.

In dieser Abhandlung soll eine erste Skizze einer Theorie der stationären stochastischen Prozesse versucht werden. Die Methoden und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit beschränken sich durchweg auf solche Eigenschaften der im Prozeß begriffenen zufälligen Variablen, die in den Momenten erster und zweiter Ordnung ihrer Verteilung ihren vollständigen Ausdruck finden; es schien mir deshalb angebracht, die ganze Skizze als eine *Korrelationstheorie* der in Frage kommenden Art von stochastischen Vorgängen zu kennzeichnen. Selbstverständlich bedeutet eine derartige Einschränkung einen bewußten Verzicht auf die Erkenntnis mancher tieferliegenden Gesetzmäßigkeit; ich hoffe jedoch, daß trotzdem die gewählte Behandlungsmethode die wichtigsten Grundzüge der Theorie genügend klar hervortreten läßt. Andererseits ist zu bemerken, daß diese Einschränkung des Problemkreises offenbar der Theorie ein wesentlich umfangreicheres Anwendungsgebiet verleiht: die oben definierte Voraussetzung der Stationarität kann nämlich, ohne daß an den Methoden und Ergebnissen etwas zu ändern wäre, durch die folgende weniger bindende ersetzt werden:  $\alpha_t$  soll einen Erwartungswert und eine Streuung haben, die von  $t$  unabhängig sind, und der Korrelationskoeffizient der Variablen  $\alpha_t$ ,

<sup>3)</sup> Als Wahrscheinlichkeit einer die Punkte des Phasenraums kennzeichnenden Eigenschaft ist dabei das relative Lebesguesche Maß der Menge derjenigen Punkte aufzufassen, die diese Eigenschaft aufweisen. Näheres darüber siehe in § 5.

und  $x_u$  soll eine Funktion von  $|t - u|$  allein sein. In allem, was folgt, soll demnach die Stationarität des behandelten Prozesses diese allgemeinere Forderung bedeuten. Der einfacheren Schreibweise halber wollen wir darüber hinaus immer voraussetzen, daß  $E(x_t) = 0$ ,  $E(x_t^2) = 1$  ist, wo  $E$  hier und im folgenden ein Symbol der mathematischen Erwartung ist.  $E(x_u x_v)$  ist dann der Korrelationskoeffizient der Größen  $x_u$  und  $x_v$ . Nach Voraussetzung dürfen wir

$$E(x_u x_v) = R(u - v)$$

setzen, wo  $R(t)$  eine gerade Funktion ist, die wir die *Korrelationsfunktion* des betrachteten Prozesses nennen wollen. Ein stationärer Prozeß heiße *stetig*, wenn  $R(+0) = 1$  ist; im Fall eines stetigen stationären Prozesses ist  $R(t)$  eine stetige Funktion; denn für  $\Delta t \rightarrow 0$  ist nach der Schwarz-schen Ungleichung

$$\begin{aligned} |R(t + \Delta t) - R(t)| &= |E(x_0 x_{t+\Delta t}) - E(x_0 x_t)| = |E[x_0(x_{t+\Delta t} - x_t)]| \\ &\leq \sqrt{E(x_0^2) E[(x_{t+\Delta t} - x_t)^2]} = \sqrt{E[(x_{\Delta t} - x_0)^2]} = \sqrt{2} \sqrt{1 - R(\Delta t)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sind  $x_t$  und  $y_t$  zwei stochastisch unabhängige stationäre Prozesse (dies bedeutet, daß die Variablen  $x_t$  und  $y_t$  für alle Werte von  $t$  und  $t'$  stochastisch unabhängige Variable sind), so ist, wie man unmittelbar einsieht, auch der Prozeß  $z_t = x_t + y_t$  stationär. Dasselbe gilt auch dann, wenn  $x_t$  und  $y_t$  in stationärer Weise abhängig sind; das soll bedeuten, daß  $\frac{1}{2} [E(x_t y_{t'}) + E(x_{t'} y_t)]$  eine Funktion von  $|t' - t|$  allein ist. Wir wollen diese Funktion mit  $\varrho(t' - t)$  bezeichnen und im Fall  $E(x_t) = E(y_t) = 0$ ,  $E(x_t^2) = E(y_t^2) = 1$  die *gegenseitige Korrelationsfunktion* der beiden Prozesse  $x_t$  und  $y_t$  nennen. Sind  $R_1(t)$ ,  $R_2(t)$  bzw. die Korrelationsfunktionen der Prozesse  $x_t$  und  $y_t$  und  $R(t)$  die Korrelationsfunktion von  $x_t + y_t$ , so ist wegen  $E[(x_t + y_t)^2] = 2[1 + \varrho(0)]$

$$R(t - t') = \frac{E\{(x_t + y_t)(x_{t'} + y_{t'})\}}{2[1 + \varrho(0)]} = \frac{R_1(t - t') + R_2(t - t') + 2\varrho(t - t')}{2[1 + \varrho(0)]},$$

und folglich

$$(1) \quad \varrho(t) = [1 + \varrho(0)] R(t) - \frac{1}{2} [R_1(t) + R_2(t)].$$

Sind die Prozesse  $x_t$  und  $y_t$ , also auch die Funktionen  $R_1(t)$  und  $R_2(t)$  stetig, so ist wegen

$$\begin{aligned} |\varrho(t') - \varrho(t)| &= \frac{1}{2} |E\{x_0(y_{t'} - y_t) + y_0(x_{t'} - x_t)\}| \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{E(x_0^2) E\{(y_{t'} - y_t)^2\}} + \frac{1}{2} \sqrt{E(y_0^2) E\{(x_{t'} - x_t)^2\}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} [1 - R_1(t' - t)] + \frac{1}{2} \sqrt{2} [1 - R_2(t' - t)] \end{aligned}$$

auch  $\varrho(t)$  eine stetige Funktion.

Im Gebiete der diskreten Reihen von zufälligen Variablen entsprechen den stationären stochastischen Prozessen *stationäre Reihen zufälliger Variablen*; man bezeichnet mit diesem Namen zweckmäßig solche Reihen, deren Glieder sämtlich gleichen Erwartungswert und gleiche Streuung besitzen, und in denen der Korrelationskoeffizient zweier Glieder eine Funktion ihres gegenseitigen Abstandes in der gegebenen Reihe ist. Über solche Reihen sind einige Untersuchungen von Slutsky<sup>4)</sup> und Romanovsky<sup>5)</sup> bekannt, die übrigens hauptsächlich einige Entartungsfälle behandeln. Ich habe<sup>6)</sup> vor kurzem gezeigt, daß solche Reihen ganz allgemein dem Gesetz der großen Zahlen unterliegen. Über den kontinuierlichen Fall ist, soviel ich weiß, bisher nichts veröffentlicht worden.

## § 2.

### Allgemeine Form der Korrelationsfunktion im Fall eines stetigen stationären Prozesses.

Die Theorie, die im folgenden entwickelt werden soll, stützt sich in allem Wesentlichen auf eine Spektralzerlegung, deren Möglichkeit eine charakteristische Eigenschaft der Korrelationsfunktion eines stetigen stationären stochastischen Prozesses bildet. Es gilt nämlich folgender

Satz I. *Damit die Funktion  $R(t)$  die Korrelationsfunktion eines stetigen stationären stochastischen Prozesses sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie sich in der Form*

$$(2) \quad R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \, dF(x)$$

darstellen läßt, wo  $F(x)$  eine gewisse Verteilungsfunktion bedeutet.

Beweis: 1. Die Bedingung ist notwendig. Denn ist  $R(t)$  die Korrelationsfunktion eines stetigen stationären stochastischen Prozesses, so ist  $R(t)$  stetig und beschränkt. Ferner ist für beliebige reelle  $a, b$  und für eine beliebige in  $(a, b)$  stetige komplexwertige Funktion  $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} 0 \leq E \left| \int_a^b x_t \varphi(t) \, dt \right|^2 &= E \left| \int_a^b \int_a^b x_u x_v \varphi(u) \overline{\varphi(v)} \, du \, dv \right| \\ &= \int_a^b \int_a^b R(u-v) \varphi(u) \overline{\varphi(v)} \, du \, dv. \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> C. R. Acad. Sci. Paris 185, 169 (1927).

<sup>5)</sup> Rend. Circ. Mat. Palermo 56 (1932).

<sup>6)</sup> Giorn. Ist. Ital. Attuari 8 (1932), S. 287; Rec. math. Soc. Math. Moscow 40 (1933), S. 124.

Nach einem Satz von S. Bochner<sup>7)</sup> folgt daraus, daß  $R(t)$  in der Gestalt

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

dargestellt werden kann, wo  $F(x)$  eine nichtabnehmende Funktion mit beschränkter Schwankung ist; wegen der Realität von  $R(t)$  ist

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x);$$

endlich ist wegen  $R(0) = 1$ ,  $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ , also  $F(x)$  eine Verteilungsfunktion.

2. Die Bedingung ist hinreichend. Denn hat  $R(t)$  die Form (2), so nehme man eine zufällige Variable  $z$ , die dem Verteilungsgesetz  $F(z)$  unterliegt; ferner sei  $y$  eine zweite, von  $z$  unabhängige zufällige Variable, welche durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } 0 < y < 2\pi, \\ 0 & \text{für } y < 0 \text{ und } y > 2\pi \end{cases}$$

gekennzeichnet ist. Setzt man

$$(3) \quad x_t = \sqrt{2} \cos(y + zt),$$

so ist, wie man leicht nachrechnet,

$$E(x_t) = 0, \quad E(x_t^2) = 1,$$

$$E(x_u x_v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[(u-v)z] dF(z) = R(u-v),$$

womit alles bewiesen ist.

Bemerkung: Die Formel (3) definiert einen stochastischen Prozeß, der nur im weiteren Sinne stationär ist. Man kann aber, wie ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Kolmogoroff entnehme, leicht einen Prozeß mit derselben Korrelationsfunktion angeben, der auch in dem ursprünglichen engeren Sinne stationär ist. Man wählt dazu für jedes endliche Variablenystem  $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$  ein  $n$ -dimensionales *normales* Verteilungsgesetz, das ja durch die vorgegebenen Korrelationskoeffizienten eindeutig festgelegt ist; die Gestalt (2) der Korrelationsfunktion garantiert nämlich, daß die im Exponenten auftretende quadratische Form definit ausfällt.

<sup>7)</sup> Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, S. 76, Satz 23.



Haben wir es mit zwei stetigen stationären Prozessen zu tun, die stationär voneinander abhängen, so zeigt die Formel (1), daß die gegenseitige Korrelationsfunktion  $\varrho(t)$  sich in der Form

$$(4) \quad \varrho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx d\Phi(x)$$

darstellen läßt, wo  $\Phi(x)$  eine Funktion mit beschränkter Schwankung im unendlichen Intervall  $(-\infty, +\infty)$  bedeutet; es ist dabei offenbar

$$\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) = \varrho(0).$$

### § 3.

#### Eigenschaften der Korrelationsfunktion.

Aus der in § 2 gewonnenen Spektraldarstellung der Korrelationsfunktion lassen sich viele wichtige Eigenschaften derselben auf elementare Weise ableiten. Alle Anwendungen, die wir in diesem und im folgenden Paragraphen von dieser Fourierzerlegung zu machen haben, beruhen auf folgendem einfachen

Hilfssatz: Es sei  $\psi(x; a, b, \dots)$  eine reelle stetige Funktion der reellen Variablen  $x$ , die außerdem noch von den ebenfalls reellen Parametern  $a, b, \dots$  abhängt und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gibt eine positive Konstante  $C$ , so daß für alle  $x, a, b, \dots$

$$|\psi(x; a, b, \dots)| < C$$

ist;

2. Es gibt eine reelle Zahl  $\lambda$  von der Beschaffenheit, daß für jedes feste  $\delta > 0$  und für  $a, b, \dots \rightarrow \infty$

$$\psi(x; a, b, \dots) \rightarrow 0$$

gleichmäßig in  $|x - \lambda| > \delta$  gilt;

3. Es gibt eine reelle Zahl  $A$  von der Beschaffenheit, daß für beliebige feste positive Werte der Parameter  $a, b, \dots$  und für  $x \rightarrow \lambda$

$$\psi(x; a, b, \dots) \rightarrow A$$

gilt.

Ist dann  $\Phi(x)$  eine Funktion mit beschränkter Schwankung in  $(-\infty, +\infty)$ , so gilt für  $a, b, \dots \rightarrow \infty$

$$\chi(a, b, \dots) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x; a, b, \dots) d\Phi(x) \rightarrow A [\Phi(\lambda + 0) - \Phi(\lambda - 0)].$$

Beweis: Man setze  $K = \int_{-\infty}^{+\infty} |d\Phi(x)|$ ;  $\varepsilon > 0$  sei beliebig vorgegeben; man wähle  $\delta > 0$  so klein, daß

$$(5) \quad \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |dF(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}, \quad \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |d\Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

wird; für genügend große Werte von  $a, b, \dots$  ist dann wegen 2.

$$|\psi(x; a, b, \dots)| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{für } |x - \lambda| \geq \delta,$$

und folglich

$$(6) \quad \left| \int_{|x-\lambda|>\delta} \psi d\Phi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

für jede positive Zahl  $\eta < \delta$  hat man aber wegen (5)

$$(7) \quad \left| \int_{\eta < |x-\lambda| < \delta} \psi d\Phi(x) \right| < C \int_{\eta < |x-\lambda| < \delta} |d\Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

aus (6) und (7) folgt

$$\left| \chi(a, b, \dots) - \int_{\lambda-\eta}^{\lambda+\eta} \psi(x; a, b, \dots) d\Phi(x) \right| < \varepsilon;$$

und da hierin  $\eta$  beliebig klein ist, folgt nach der Eigenschaft 3 von  $\psi$

$$|\chi(a, b, \dots) - A\{\Phi(\lambda+0) - \Phi(\lambda-0)\}| < \varepsilon,$$

wenn nur  $a, b, \dots$  hinreichend groß sind; damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir gehen nun dazu über, einige Eigenschaften der Korrelationsfunktion festzustellen; wir wollen uns dabei mit der gegenseitigen Korrelationsfunktion  $\varrho(t)$  zweier stationärer Prozesse befassen, denn es genügt ja, diese Prozesse miteinander zu identifizieren, um den Spezialfall eines einzelnen Prozesses zu erhalten.

Satz 2. Die Korrelationsfunktion  $\varrho(t)$  besitzt einen bestimmten Mittelwert, d. h. es ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(t) dt$$

vorhanden<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Den analogen Satz für diskrete Reihen zufälliger Variablen habe ich mittels einer ganz anderen Methode früher bewiesen [Giorn. Ist. Ital. Attuari 8 (1932), 267].

Beweis: Nach (3) ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varrho(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T x}{T x} d\Phi(x);$$

hierin genügt  $\varphi(x; T) = \frac{\sin T x}{T x}$  offenbar allen Voraussetzungen des soeben bewiesenen Hilfssatzes, wenn man  $\lambda = 0$ ,  $A = 1$  wählt; folglich ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(t) dt = \Phi(+0) - \Phi(-0),$$

w. z. b. w.

Satz 3. Die Korrelationsfunktion  $\varrho(t)$  läßt sich in der Gestalt einer Summe

$$\varrho(t) = \varrho_1(t) + \varrho_2(t)$$

darstellen, wo  $\varrho_1(t)$  fastperiodisch ist und  $\{\varrho_2(t)\}^2$  den Mittelwert Null hat.

Beweis: In (4) zerlege man  $\Phi(x)$  in zwei Summanden

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$

von denen  $\Phi_1(x)$  ein Punktspektrum hat, während  $\Phi_2(x)$  stetig ist, und setze

$$\varrho_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx d\Phi_1(x), \quad \varrho_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx d\Phi_2(x),$$

so daß  $\varrho(t) = \varrho_1(t) + \varrho_2(t)$  wird.  $\varrho_1(t)$  ist die Summe einer gleichmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe und folglich fastperiodisch. Andererseits ist aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \{\varrho_2(t)\}^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \cos ty d\Phi_2(x) d\Phi_2(y) \right\} \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^T [\cos t(x+y) + \cos t(x-y)] dt \right\} d\Phi_2(x) d\Phi_2(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\sin T(x+y)}{T(x+y)} + \frac{\sin T(x-y)}{T(x-y)} \right\} d\Phi_2(x). \end{aligned}$$

Im Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T(x-y)}{T(x-y)} d\Phi_2(x)$  ist aber  $\varphi(x; T) = \frac{\sin T(x-y)}{T(x-y)}$  wieder

eine Funktion von der im oben bewiesenen Hilfssatz betrachteten Art, wenn man  $\lambda = y$ ,  $A = 1$  wählt; folglich konvergiert dieses Integral für  $T \rightarrow \infty$  gegen  $\Phi_2(y+0) - \Phi_2(y-0) = 0$ , und zwar gleichmäßig in

bezug auf  $y$ , wie man leicht daraus erschließt, daß die Funktion  $\Phi_2(x)$  in  $(-\infty, +\infty)$  von beschränkter Schwankung und folglich gleichmäßig stetig ist. Und da offenbar dasselbe auch für das andere Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin T(x+y)}{T(x+y)} d\Phi_2(x)$$

stattfindet, so konvergiert auch der ganze Ausdruck für  $T \rightarrow \infty$  gegen Null, w. z. b. w.

## § 4.

## Gesetz der großen Zahlen.

Es ist eine der wichtigsten Eigenschaften der stationären Reihen und Prozesse, daß sie eine Stabilität der arithmetischen Mittelbildungen aufweisen oder, wie man in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu sagen pflegt, dem Gesetz der großen Zahlen unterliegen. Für einen stationären stochastischen Prozeß hat das folgende Bedeutung: man setze

$$\xi(T) = \frac{1}{T} \int_0^T x_t dt;$$

sind dann  $\varepsilon$  und  $\delta$  beliebig kleine positive Zahlen, so ist für hinreichend großes  $T$  und für alle  $U > 0$  die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$|\xi(T+U) - \xi(T)| > \varepsilon$$

kleiner als  $\delta$ .

Um dies einzusehen, genügt es nach der Tschebycheffschen Ungleichung zu beweisen, daß für  $T \rightarrow \infty$  gleichmäßig in bezug auf  $U > 0$

$$\mu(T, U) = E\{[\xi(T+U) - \xi(T)]^2\} \rightarrow 0$$

gilt.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} [\xi(T+U) - \xi(T)]^2 &= \frac{1}{T^2(T+U)^2} \left[ T \int_0^{T+U} x_t dt - (T+U) \int_0^T x_t dt \right]^2 \\ &= \frac{1}{T^2(T+U)^2} \left[ T \int_T^{T+U} x_t dt - U \int_0^T x_t dt \right]^2 \\ &= \frac{1}{T^2(T+U)^2} \left[ T^2 \int_T^{T+U} \int_T^{T+U} x_u x_v du dv + U^2 \int_0^T \int_0^T x_u x_v du dv \right. \\ &\quad \left. - 2UT \int_0^T \int_T^{T+U} x_u x_v du dv \right], \end{aligned}$$

und folglich wegen  $E(x_u x_v) = R(u - v)$

$$\begin{aligned} \mu(T, U) = \frac{1}{T^2(T+U)^2} & \left[ T^2 \int_0^T \int_0^T R(u-v) du dv + U^2 \int_0^T \int_0^T R(u-v) du dv \right. \\ & \left. - 2UT \int_0^T \int_T^{T+U} R(u-v) du dv \right]. \end{aligned}$$

Setzt man hierin nach (2)

$$R(u-v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[(u-v)x] dF(x),$$

so ergibt eine elementare Rechnung

$$\begin{aligned} \mu(T, U) = \frac{U^2}{(T+U)^2} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \left( \frac{\sin \frac{1}{2} T x}{\frac{1}{2} T x} \right)^2 + \left( \frac{\sin \frac{1}{2} U x}{\frac{1}{2} U x} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2 \frac{\sin \frac{1}{2} T x}{\frac{1}{2} T x} \frac{\sin \frac{1}{2} U x}{\frac{1}{2} U x} \cos \frac{(T+U)x}{2} \right) dF(x). \end{aligned}$$

Wenn nun für  $T \rightarrow \infty$   $U$  beschränkt bleibt, wird der vor dem Integral stehende Faktor unendlich klein, und folglich konvergiert  $\mu(T, U)$  gegen Null. Wird aber  $U$  unendlich groß, so genügt offenbar der Integrand  $\varphi(x; U, T)$  allen Voraussetzungen des im § 3 bewiesenen Hilfsatzes, wenn man daselbst  $\lambda = 0$ ,  $A = 0$  setzt. Es ist folglich auch in diesem Fall  $\mu(T, U) \rightarrow 0$ , und damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Für stationäre Reihen habe ich den Beweis des analogen Satzes mittels ganz anderer Methoden schon früher gegeben<sup>9)</sup>.

## § 5.

### Mechanische Anwendungen.

Die in den vorstehenden Paragraphen geschilderte Methode steht in naher Beziehung zu einigen Untersuchungen über allgemeine dynamische Probleme, die in der letzten Zeit von Koopman, v. Neumann und E. Hopf veröffentlicht wurden<sup>10)</sup>. Sie unterscheidet sich von der Koopman-v. Neumannschen Methode hauptsächlich dadurch, daß Operatorenbetrachtungen bei der hier gegebenen Anordnung vermieden werden können. Die entsprechenden mechanischen Sätze erscheinen dabei nicht

<sup>9)</sup> Vgl. <sup>8)</sup>.

<sup>10)</sup> Vgl. insbesondere J. v. Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18 (1932), 70; B. O. Koopman and J. v. Neumann, Dynamical systems of continuous spectra, ibid. 18 (1932), 255.

als Folgerungen, sondern bilden lediglich eine Umdeutung der hier entwickelten Theorie; ich habe diese Sätze vor einigen Monaten in einer Note<sup>11)</sup> zusammengefaßt.

Ist  $V$  der endlich vorausgesetzte Phasenraum eines Hamiltonschen Systems,  $E$  eine im Lebesgueschen Sinne meßbare Punktmenge in  $V$  von positivem Maß  $m(E)$ ,  $F$  eine andere ebensolche Menge, und bedeuten  $E$ , bzw.  $F$ , die Mengen, in welche  $E$  bzw.  $F$  nach Abschluß einer Zeitstrecke  $t$  übergehen, so betrachte man die Funktion

$$\mu(t) = \frac{1}{2} [m(E, F) + m(EF_t)].$$

Wie oben, kann leicht gezeigt werden, daß diese Funktion eine Spektralzerlegung der Form (4) zuläßt; denn ist  $P_t$  der Punkt von  $V$ , in welchen der Punkt  $P$  nach Ablauf der Zeitstrecke  $t$  übergeht, und bedeutet  $\varphi(P)$  1 oder 0, je nachdem  $P \subset E$  oder  $P \not\subset E$  ist, und  $\varphi(P)$  die entsprechende Funktion für die Menge  $F$ , so ist offenbar

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \int [\varphi(P_t) \varphi(P) + \varphi(P) \varphi(P_t)] dV,$$

wo das Integral über den ganzen Phasenraum  $V$  zu erstrecken ist; diese Integration ist hier das Analogon der Bildung von mathematischen Erwartungen, und erlaubt infolgedessen alle Schlüsse, die wir in § 2 gezogen haben.

Aus der so gewonnenen Spektraldarstellung ergeben sich nun unmittelbar die Analoga der Sätze 2 und 3 von § 3: die Existenz von

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu(t) dt \text{ und die Zerlegung } \mu(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t), \text{ wo } \mu_1(t) \text{ fast-}$$

$$\text{periodisch und } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\mu_2(t)\}^2 dt = 0 \text{ ist. Das Gesetz der großen Zahlen}$$

in seiner in § 4 dargestellten Form läßt sich als der v. Neumannsche „Quasiergodensatz“ deuten.

Moskau, Mathematisches Institut der Universität.

<sup>11)</sup> Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 19 (1933), 567.

## Berichtigung

zu der Arbeit von Hans Fitting: „Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen“, Math. Annalen 107, S. 514–542 (im folgenden mit F zitiert).

In § 5 von F (S. 520–521) ist unter den Postulaten, die den Begriff eines „Bereiches“ definieren, das Axiom c) (F, S. 521 oben) zu streichen, da es — wie einfache Beispiele bestätigen — für die Automorphismen einer Gruppe nicht erfüllt zu sein braucht, die daher erst nach Fortlassung der Forderung c) einen „Bereich“ bilden.

Alle entscheidenden Resultate von F bleiben von dem Fortfall des Axioms c) unberührt, der nur die beiden folgenden Änderungen notwendig macht:

1. Am Schluß von F, § 5 (S. 521) wird das Axiom c) zum Beweis der Bemerkung, daß ein Bereich, der neben 0 und 1 auch  $-1$ , d. h. die Lösung der Gleichung  $1 + x = 0$  enthält, ein Ring im gewöhnlichen Sinne sein müsse, wesentlich benutzt. Diese Bemerkung ist daher fortzulassen; im Spezialfall des Automorphismenbereichs einer Gruppe bleibt sie jedoch bestehen, da  $-P_1 = (A \rightarrow A^{-1})$  nur bei Abelschen Gruppen ein Automorphismus (vgl. F, § 10, 1. Absatz, S. 525 oben) und der Automorphismenbereich bei Abelschen Gruppen ein Ring ist.

2. Im letzten Absatz von F, § 6 (S. 522) ist die Definition für Produkt und Summe der Ideale eines Bereiches zu ändern, weil sonst in einem Bereich Idealprodukte und -summen nicht wieder Ideale zu sein brauchen. Um das Produkt  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  bzw. die Summe  $(a_1, \dots, a_n)$  der Ideale  $a_1, \dots, a_n$  eines Bereiches zu erhalten, bilde man alle Produkte  $p = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  bzw. alle Summen  $s = a_1 + \dots + a_n$  mit  $a_i \in a_i$  (letztere natürlich nur, soweit sie definiert sind) und alle Ausdrücke von der Gestalt:

$$[(p_1 + p_2) + (p_3 + p_4)] + [(p_5 + p_6) + (p_7 + p_8)] + \dots$$

bzw.

$$[(s_1 + s_2) + (s_3 + s_4)] + [(s_5 + s_6) + (s_7 + s_8)] + \dots$$

in denen immer nur endlich viel Glieder  $p_1, p_2, \dots$  bzw.  $s_1, s_2, \dots$  auftreten und alle vorgeschriebenen Additionen ausführbar sein sollen.

Hans Fitting.



# Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen.

Von

Wilhelm Magnus in Frankfurt a. M.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	617
I. Die Abbildungen der von $n$ Punkten berandeten Kugel auf sich.	
§ 1. Die Gruppe der Abbildungsklassen . . . . .	619
§ 2. Über den Zusammenhang zwischen Zöpfen und Abbildungs- gruppen . . . . .	624
§ 3. Gruppentheoretische Herleitung der Relationen der Zöpfegruppe	629
II. Die Abbildungen des von $n$ Punkten berandeten Torus auf sich.	
§ 4. Die Erzeugenden der Gruppe der Abbildungsklassen für $n = 2$	634
§ 5. Die Relationen für die Gruppe der Abbildungsklassen des von zwei Punkten berandeten Torus . . . . .	639
§ 6. Der $n$ -fach punktierte Ring. Bemerkungen über berandete Flächen höheren Geschlechts . . . . .	643

## Einleitung.

Im folgenden soll die Gruppe der Abbildungsklassen<sup>1)</sup> für die von  $n$  Punkten berandete Kugel und für den von zwei Punkten berandeten Torus untersucht werden, und zwar sollen für die betreffenden Gruppen jeweils Systeme von Erzeugenden und definierenden Relationen angegeben werden. Dabei sollen zugleich die auftretenden Relationen auf ihre geometrische Bedeutung hin untersucht werden und insbesondere der sich gruppentheoretisch ergebende Zusammenhang zwischen den Abbildungen der von  $n$  Punkten berandeten Kugel auf sich und den Artinschen Zöpfen<sup>2)</sup> auch durch eine topologische Konstruktion nachgewiesen werden. Eine neue, gruppentheoretische Ableitung für die Relationen der Zöpfegruppe wird sich dabei mit ergeben. Für den von  $n$  Punkten berandeten Torus

<sup>1)</sup> Zwei topologische Abbildungen einer Fläche auf sich heißen zur selben Klasse gehörig, wenn sie sich nur um eine stetig in die Identität überführbare Abbildung unterscheiden. Vgl. etwa J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. Acta Mathematica 50 (1927), S. 265.

<sup>2)</sup> E. Artin, Theorie der Zöpfe. Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 4 (1926), S. 47—72.

wird ein rekursives Verfahren zur Aufstellung von Erzeugenden und definierenden Relationen für die Gruppe der Abbildungsklassen angegeben. Die Struktur dieser Gruppe und der Zöpfegruppe wird dabei einigermaßen klargestellt.

Die Gruppen der Abbildungsklassen zweiseitiger Flächen auf sich sind für den Fall der unberandeten Flächen vom Geschlecht  $\leq 1$  seit langem bekannt. Der erste, der sich allgemein mit dieser Frage für beliebiges Geschlecht und beliebige Zahl der Randpunkte beschäftigt hat, ist meines Wissens R. Fricke<sup>3)</sup>, der mittels seiner Theorie der kanonischen Diskontinuitätsbereiche ebener nichteuklidischer Bewegungsgruppen in allen Fällen Erzeugende für die Gruppe der Abbildungsklassen angibt. Für den Fall eines Geschlechtes  $\geq 2$  scheint es mir nicht sicher zu sein, daß seine Ableitung, die sich auf Arbeiten früherer Autoren über die Transformation der Abelschen Integrale erster Gattung bei Änderungen des kanonischen Schnittsystems einer Riemannschen Fläche stützt, völlig stichhaltig ist. Für den einzigen hier sonst noch behandelten Fall, nämlich für den Fall des geschlossenen Doppelringes, stimmen seine Resultate mit denen von M. Dehn<sup>4)</sup> und R. Baer<sup>4)</sup> überein. Für den Fall des Ringes mit einem und der Kugel mit vier Randpunkten leitet Fricke<sup>5)</sup> auch die Relationen für die Gruppe der Abbildungsklassen ab.

Besonders erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang die weiteren Untersuchungen von Fricke über dieses Thema. Fricke zeigt, daß sich in allen Fällen die Gruppe der Abbildungsklassen als Gruppe von birationalen Transformationen in sich eines algebraischen Gebildes in einem Raum von hinreichend vielen Dimensionen darstellen läßt, wobei die Gruppe auf dem algebraischen Gebilde (genauer für einen geeignet abzugrenzenden Teil desselben) einen Diskontinuitätsbereich besitzt. Dieser Diskontinuitätsbereich besitzt gleichzeitig eine interessante funktionentheoretische Bedeutung, die sich für den Fall der geschlossenen Flächen von einem Geschlecht  $\geq 2$  besonders einfach etwa folgendermaßen aussprechen läßt:

Jeder kanonischen Zerschneidung einer geschlossenen Riemannschen Fläche des betreffenden Geschlechtes  $p \geq 2$  entspricht eindeutig ein Punkt unseres algebraischen Gebildes, das in diesem Fall  $6p - 6$  (reelle) Dimensionen besitzt. Rechnet man zwei Flächen als gleich, wenn sie sich konform aufeinander abbilden lassen, und nennt man zwei kanonische

<sup>3)</sup> R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 1, Leipzig 1897, Abschnitt 2, Kap. 2.

<sup>4)</sup> Baer, Journ. f. Math. 156 (1927), 159 (1928).

<sup>5)</sup> Siehe <sup>3)</sup> und „Über die Theorie der automorphen Modulgruppen“, Göttinger Nachrichten 1896.

Schnittsysteme auf der Fläche gleich, wenn sie sich stetig auf der Fläche ineinander überführen lassen, so entsprechen die kanonisch zerschnittenen Flächen umkehrbar eindeutig den Punkten (eines Teils) unseres algebraischen Gebildes, während die Gesamtheit der verschiedenen konform nicht aufeinander abbildbaren Flächen gerade umkehrbar eindeutig auf den Diskontinuitätsbereich der Gruppe der Abbildungsklassen, — dargestellt als Gruppe von birationalen Transformationen des algebraischen Gebildes in sich — bezogen sind. Damit ist gleichzeitig eine Lösung des Problems von Riemanns  $3p - 3$  (komplexen) Moduln gegeben; die Gruppe der Abbildungsklassen der Fläche auf sich, dargestellt durch birationale Transformationen, nennt Fricke deshalb „automorphe Modulgruppe“; sie spielt für die Riemannschen Flächen eines Geschlechts  $p \geq 2$  dieselbe Rolle, wie die Modulgruppe für den Fall  $p = 1$ .

## Die Abbildungen der von $n$ Punkten berandeten Kugel auf sich.

### § 1.

#### Die Gruppe der Abbildungsklassen.

Die Fundamentalgruppe der von  $n$  Punkten berandeten Kugel wird erzeugt von  $n$  Elementen  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , die den  $n$  Umläufen um die Randpunkte entsprechen. Zwischen ihnen besteht nur die eine Relation

$$(1) \quad u_1 u_2 \dots u_n = 1.$$

Wir wollen uns auf Abbildungen mit Erhaltung der Indikatrix beschränken. Da es uns ferner nur um die Abbildungsklassen zu tun ist, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der zur Definition der Fundamentalgruppe erforderliche Bezugspunkt  $P$ , d. h. der einzige gemeinsame Punkt der Umläufe  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , bei unserer Abbildung in sich übergeht, da wir dies durch Hinzufügen einer geeigneten zur Klasse der Identität gehörigen Abbildung stets erreichen können. Die Kurven der Fundamentalgruppe gehen dann bei der Abbildung notwendig wieder in solche über, und insbesondere müssen die Umläufe  $u_1, u_2, \dots, u_n$  um die Randpunkte in ebensolche übergehen, und zwar wegen der vorausgesetzten Erhaltung der Indikatrix in gleichorientierte. Die den neuen Umläufen  $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$  zugehörigen Elemente der Fundamentalgruppen müssen somit die Form besitzen:

$$(2) \quad u'_i = T u_k T^{-1} \quad (v, k, = 1, 2, \dots, n),$$

wobei die  $T$ , geeignete Elemente der Fundamentalgruppe sind, und die  $k$ , eine Permutation der Indizes von 1 bis  $n$  darstellen. Sie soll „die der Abbildung zugeordnete Permutation“ heißen. Da sich ferner

die Elemente  $u$ , durch die  $u_i$  ausdrücken lassen müssen, und da außerdem natürlich auch für die  $u_i$  die Relation

$$(3) \quad u'_1 u'_2 \dots u'_n = 1$$

bestehen muß, gehört zu jeder Abbildung ein die Bedingungen (2) und (3) befriedigender Automorphismus der Fundamentalgruppe. Die Gesamtgruppe dieser Automorphismen werde mit  $\overline{\mathfrak{A}}$  bezeichnet; sie enthält offenbar die Gruppe  $\mathfrak{Z}$  der inneren Automorphismen. Man weiß nun<sup>6)</sup>, daß die Gruppe der Abbildungsklassen notwendig mit einer Untergruppe von  $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$  isomorph ist, da die inneren Automorphismen die einzigen sind, die von zur Klasse der Identität gehörigen Abbildungen erzeugt werden können.

Die Beziehung

$$(4) \quad \mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{Z}$$

wird sich später (§ 2) dadurch von selber ergeben, daß wir zu den  $\overline{\mathfrak{A}}$  erzeugenden Automorphismen Abbildungen angeben, die diese induzieren, so daß dann  $\mathfrak{A}$  wirklich mit  $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}$  selber isomorph sein muß.

Um nun die Erzeugenden und Relationen von  $\mathfrak{A}$  aufzustellen, untersuchen wir zunächst eine Untergruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  vom Index  $n$  von  $\overline{\mathfrak{A}}$ , wobei  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  die Gruppe  $\mathfrak{Z}$  als Untergruppe enthält;  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  sei dabei die Gruppe der Automorphismen, die außer den Bedingungen (2) und (3) die weitere

$$(5) \quad u'_i = T_1 u_i T_1^{-1}$$

erfüllen, für die also die nach (2) zugeordnete Permutation nur die Indizes 2 bis  $n$  permutiert. Da alle inneren Automorphismen zur identischen Permutation gehören, ist

$$(6) \quad \mathfrak{A}_1 \triangleq \overline{\mathfrak{A}}_1/\mathfrak{Z}$$

eine Untergruppe vom Index  $n$  in  $\mathfrak{A}$ , deren Erzeugende und definierende Relationen zunächst bestimmt werden sollen. Dazu bemerken wir, daß wegen (1) und (3) aus (5) sofort

$$(7) \quad u'_2 \dots u'_n = T_1 u_2 \dots u_n T_1^{-1}$$

folgt. Drücken wir hierin die Erzeugende  $u_1$ , welche ja höchstens noch in  $T_1$  auftreten kann, durch  $u_2 \dots u_n$  vermöge (1) aus, und verfahren wir genau so mit  $u_i$  in den  $T_i$  in

$$(8) \quad u'_v = T_v u_k T_v^{-1} \quad (v, k = 2, \dots, n),$$

<sup>6)</sup> Siehe z. B. <sup>1)</sup>, S. 281. Der Beweis für berandete Flächen läßt sich auf den Fall der geschlossenen Flächen zurückführen, indem man die Punkte durch „Löcher“ ersetzt, und diese durch aufgesetzte gelochte Ringe schließt. Man hat dann Abbildungen der so entstehenden geschlossenen Fläche zu untersuchen, bei denen die aufgesetzten Ringe punktweise festbleiben.

so gehen die Beziehungen (7) und (8) in identische Beziehungen zwischen den freien Erzeugenden  $u_2, \dots, u_n$  über. Durch Hinzufügen eines geeigneten Automorphismus aus  $\mathfrak{Z}$  können wir offenbar stets erreichen, daß in (7)  $T_1 \equiv 1$  wird; in jeder Nebengruppe von  $\mathfrak{Z}$  in  $\bar{\mathfrak{A}}_1$  liegt also ein Automorphismus, für den außer (8) noch

$$(9) \quad u'_2 \dots u'_n \equiv u_2 \dots u_n$$

identisch in den  $u$ , mit  $v \geq 2$  gilt. Die Gruppe der (8) und (9) befriedigenden Automorphismen werde mit  $\mathfrak{Z}_{n-1}$  bezeichnet. Ist  $\mathfrak{D}$  der Durchschnitt  $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_{n-1})$ , so ist also  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{Z}_{n-1} \mathfrak{D}$ .

Um  $\mathfrak{D}$ , d. h. die in  $\mathfrak{Z}_{n-1}$  enthaltenen inneren Automorphismen zu bestimmen, benutze man, daß aus der Beziehung (9) und  $u'_i = T u_i T^{-1}$  die weitere

$$(10) \quad T u_2 \dots u_n T^{-1} \equiv u_2 \dots u_n$$

folgt. Hieraus folgt aber, daß  $T$  eine Potenz von  $u_2 \dots u_n$  sein muß. Das läßt sich entweder elementar und direkt folgern<sup>7)</sup>, oder auch mit Hilfe eines Satzes von Schreier<sup>8)</sup>, demzufolge  $T$  und  $u_2 \dots u_n$  in der von  $u_2, \dots, u_n$  erzeugten freien Gruppe eine freie Untergruppe erzeugen; diese kann nur dann abelsch sein, wenn sie zyklisch ist, und  $T$  und  $u_2 \dots u_n$  müssen somit Potenzen eines und desselben Ausdrucks in  $u_2, \dots, u_n$  sein; da  $u_2 \dots u_n$  keine andere als die  $\pm 1$ -te Potenz eines Elementes aus der von  $u_2, \dots, u_n$  erzeugten freien Gruppe sein kann, ist unsere Behauptung bewiesen.  $\mathfrak{D}$  ist also eine zyklische von dem Automorphismus

$$(11) \quad u'_i = T u_i T^{-1}, \quad T \equiv u_2 \dots u_n \quad (v = 2, \dots, n)$$

erzeugte Gruppe.

Die Gruppe  $\mathfrak{Z}_{n-1}$  ist nun nach E. Artin<sup>2)</sup> wohl bekannt; sie ist nichts anderes als die Gruppe der Zöpfe von  $n-1$  Fäden; als ihre Erzeugenden lassen sich die Automorphismen

$$(12) \quad \begin{aligned} u'_i &= u_{i+1}, \quad u'_{i+1} = u_{i+1}^{-1} u_i u_{i+1} & (i = 2, \dots, n-1), \\ u'_k &= u_k & (k = 2, \dots, n, \quad k \neq i, i+1) \end{aligned}$$

wählen, die bzw. mit  $\sigma_i$  ( $i = 2, \dots, n-1$ ) bezeichnet werden sollen, und als definierende Relationen kann man das System

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i, k = 2, \dots, n-1), \\ \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} &= 1 & (i \neq k+1, k-1) \end{aligned}$$

wählen. Der spezielle Automorphismus (11) drückt sich durch die  $\sigma_i$  als  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{1-n}$  aus, so daß wir in den  $\sigma_i$  mit den Relationen (13) und

$$(14) \quad (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = 1$$

<sup>7)</sup> Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn Bernhard Neumann.

<sup>8)</sup> Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5 (1927), S. 168 ff.

ein vollständiges System von Erzeugenden und definierenden Relationen für  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{Z}_{n-1}/\mathfrak{D}$  besitzen.

Um von hier aus zu einem ebensolchen System für die Gesamtgruppe  $\mathfrak{A}$  der Abbildungsklassen zu kommen, führen wir zunächst als weitere Erzeugende den Automorphismus

$$(15) \quad u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2^{-1} u_1 u_2, \quad u'_k = u_k \quad (k = 3, \dots, n)$$

ein, der  $\sigma_1$  heiße. Da die den Automorphismen  $\sigma_i$  mit  $i = 1, \dots, n-1$  durch (2) zugeordneten Permutationen die Transpositionen  $(i, i+1)$  sind, folgt, daß sich mit Hilfe der  $\sigma_i$  zu allen Permutationen der Indizes  $1, 2, \dots, n$  dieselben induzierende Automorphismen konstruieren lassen; gemäß der Definition von  $\mathfrak{A}_1$  wird also  $\mathfrak{A}$  von den  $\sigma_i$  erzeugt. Dieselben sind offenbar gleichzeitig die Erzeugenden der Zöpfegruppe  $\mathfrak{Z}_n$  von  $n$  Fäden, so daß zwischen ihnen gemäß (13) die Relationen

$$(13a) \quad \begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \dots, n-1, \\ \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} &= 1 & \begin{aligned} &k = 1, \dots, n-1, \\ &k \neq i+1, i-1 \end{aligned} \end{aligned}$$

bestehen.  $\mathfrak{A}$  ist also eine Faktorgruppe von  $\mathfrak{Z}_n$ ; das Bestehen der Relation (14) ist aber zur Definition von  $\mathfrak{A}$  nicht ausreichend. Um alle Relationen von  $\mathfrak{A}$  zu bekommen, hat man so vorzugehen:  $\mathfrak{Z}_n$  ist als eine Gruppe von Automorphismen der freien, von  $u_1, u_2, \dots, u_n$  erzeugten Gruppe  $\mathfrak{F}_n$  erklärt; ihre Automorphismen sind gleichzeitig solche der freien, von  $u_2, \dots, u_n$  erzeugten Faktorgruppe  $\mathfrak{F}_{n-1}$ , d. h. der Fundamentalgruppe der berandeten Kugel. Diejenigen Automorphismen aus  $\mathfrak{Z}_n$ , die in  $\mathfrak{F}_{n-1}$  innere Automorphismen induzieren, sind gleich eins zu setzen, wenn man  $\mathfrak{A}$  erhalten will. Zu jedem Automorphismus aus  $\mathfrak{Z}_n$  gehört gemäß (2) eine Permutation; da zu inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_{n-1}$  notwendig die identische Permutation gehört, liegen die inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_{n-1}$  notwendig schon in der Untergruppe  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  von  $\mathfrak{Z}_n$ , die von all den Automorphismen gebildet wird, deren zugehörige Permutationen den Index 1 festlassen.  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  ist vom Index  $n$  in  $\mathfrak{Z}_n$ ; als Repräsentanten der rechteitigen Nebengruppen von  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  in  $\mathfrak{Z}_n$  können wir außer dem Einheitslement die  $n-1$  Elemente

$$(16) \quad s_k = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

wählen, denen bzw. die zyklischen Permutationen

$$(1, 2, \dots, k, k+1)$$

der Indizes 1 bis  $n$  zugeordnet sind. In der Tat läßt sich jede Permutation in der Form

$$\pi_1 \cdot (1, 2, \dots, k, k+1)$$

darstellen, wobei  $\pi_1$  eine den Index 1 festlassende Permutation bedeutet.





Daß die linken Seiten dieser Relationen innere Automorphismen von  $\mathfrak{S}_{n-1}$  ergeben, somit gleich eins zu setzen sind, ist leicht einzusehen, da  $(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k$  der Automorphismus

$$\begin{aligned} u'_i &= (u_1 \dots u_k)^{-1} u_i u_1 \dots u_k & (i \leq k) \\ u'_i &= u_i & (i > k) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ist. Ferner ist klar, daß sich die linken Seiten durch die  $\tau_i$ ,  $\sigma$ , aus (17) ausdrücken lassen müssen. Wir haben nun nur noch zu zeigen, daß dies in einer Weise geschieht, die es gestattet, die  $\tau_i$  durch die  $\sigma$ , auszudrücken. Dazu berücksichtigen wir die aus (13a) zu folgernden Relationen<sup>10)</sup>

$$(13b) \quad \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 = (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{k-1} (\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^{-k+1},$$

die zusammen mit der nach (17) evidenten Relation

$$\sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 = \tau_{k-1} \dots \tau_1$$

für  $(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k$  den Wert

$$(\tau_{k-1} \dots \tau_1) (\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^{k-1}$$

ergibt. Dieser in die  $(k-1)$ -te Relation (19) eingesetzt, zeigt also, daß sich mittels (19) und (13a) die  $\tau_i$  durch die  $\sigma$ , ( $v = 2, \dots, n-1$ ) ausdrücken lassen.

Damit ist endgültig gezeigt, daß für die von  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  erzeugte Abbildungsgruppe  $\mathfrak{A}$  die Relationen (14), (13a), (19) ein vollständiges System von definierenden Relationen bilden (siehe auch Ende von § 3).

## § 2.

### Über den Zusammenhang zwischen Zöpfen und Abbildungsgruppen.

Es sollen hier die Resultate des § 1 geometrisch interpretiert werden. Dabei ist erstens noch nachzuweisen, daß den in § 1 gefundenen Erzeugenden  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  der Abbildungsgruppe auch wirklich Abbildungen der von  $n$  Punkten berandeten Kugel auf sich entsprechen: die  $\sigma_i$  waren ja zunächst als Automorphismen der Fundamentalgruppe und nicht als Abbildungen gefunden worden. Es handelt sich dabei aber nur um die gut bekannte Tatsache, daß es möglich ist, eine Kreisscheibe, aus der zwei Punkte herausgenommen sind, in der in Fig. 1 skizzierten Art auf

<sup>10)</sup> Nach <sup>2)</sup>, S. 52, Gl. 12 ist

$$\begin{aligned} \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} \sigma_i \sigma_{k-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} &= \sigma_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i < k-1, \text{ also für } k-1 \geq i+1 \\ \sigma_i &= (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{i-1} \sigma_1 (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{1-i}, \text{ also} \\ \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 &= (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{k-2} \sigma_1 \{(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{-1} \sigma_1\}^{k-2} \\ &= (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{k-2} \sigma_1 (\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^{2-k} = (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^{k-1} (\sigma_2 \dots \sigma_{k-1})^{1-k}. \end{aligned}$$

sich abzubilden: Sind  $P$  der feste Punkt, durch den die Kurven der Fundamentalgruppe gehen,  $P_1$  bzw.  $P_2$  die beiden „inneren“ Randpunkte, und  $u_1$  bzw.  $u_2$  die einfachen Umläufe um dieselben, so sollen bei der Abbildung der „äußere“ Rand in sich,  $u_1$  bzw.  $u_2$  in Kurven, die mit  $u_2$  bzw.  $u_2^{-1} u_1 u_2$  homotop sind und schließlich  $P_1$  in  $P_2$  und umgekehrt  $P_2$  in  $P_1$  übergehen.

Zweitens soll jetzt eine geometrische Interpretation für den Zusammenhang der Abbildungsgruppe mit der Zöpfegruppe gegeben werden. Zu diesem Zweck kann man davon ausgehen, daß eine beliebige topologische Abbildung der Kugel auf sich, bei welcher die Indikatrix erhalten bleibt, sich stetig in die identische Abbildung überführen läßt; genauer gesagt, ist es möglich, eine Schar  $A(t)$  von Abbildungen zu finden, welche stetig von einem Parameter  $0 \leq t \leq 1$  abhängen, derart, daß  $A(0)$  die Identität und  $A(1)$  die zu betrachtende Abbildung ist. Denken wir uns

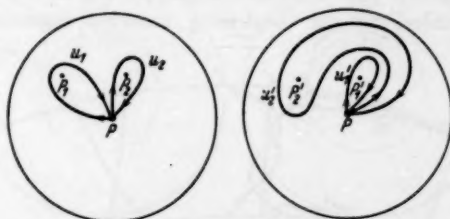


Fig. 1.

nun die Kugel als wirkliche Kugel im Euklidischen Raum, und verbinden wir mit dem Prozeß des Abbildens der Kugel auf sich ein „Aufblasen“ derselben, indem wir die ursprüngliche Kugel mit dem Radius  $r$  durch  $A(t)$  nicht auf sich selbst, sondern auf eine konzentrische Kugel mit dem Radius  $r+t$  abgebildet denken, — wobei also ein Punkt  $P$ , der bei der Abbildung  $A(t)$  in einen Punkt  $P'$  der ursprünglichen Kugel übergehen würde, in einen mit  $P'$  auf demselben Radius liegenden Punkt der konzentrischen Kugel mit dem Radius  $r+t$  übergehen soll. Die Bahn eines Punktes während der Abbildung ist dann eine stetige Kurve, die den ursprünglichen Punkt  $P$  mit einem Bildpunkt  $P_1$  auf der Kugel vom Radius  $r+1$  verbindet, und jede zwischen diesen Kugeln — der „inneren“ vom Radius  $r$  und der „äußeren“ vom Radius  $r+1$  — liegende konzentrische Kugel genau einmal schneidet. Das zwischen beiden Kugeln liegende Gebiet wird also durch diese Bahnkurven einfach und lückenlos überdeckt.

In jeder Abbildungsklasse der von  $n$  Punkten berandeten Kugel gibt es nun eine Abbildung, die sich zu einer Abbildung der unberandeten Kugel auf sich ergänzen läßt. Dies läßt sich z. B. mit Hilfe von Fig. 1

und der eingangs gemachten Bemerkung über die Erzeugung der Abbildungsklassen zeigen.

Eine solche denke man sich vorgenommen und in der eben charakterisierten Art als Abbildung der Kugel auf eine mit ihr konzentrische Kugel dargestellt.

Die von den  $n$  Randpunkten ausgehenden Kurven müssen dann in der äußeren Kugel in den Bildern dieser Randpunkte endigen, d. h. also in den radial über den Randpunkten der inneren Kugel liegenden Punkten. Diese  $n$  Kurven, die die Randpunkte der inneren und der äußeren Kugel verbinden, bilden nun nach dem oben geschilderten Charakter derselben ein zopfartiges Geflecht, das zur Charakterisierung der betreffenden Abbildungsklasse dienen kann.

Dazu betrachte man außer der Bahn der Randpunkte auch noch die dem Bezugspunkt  $P$  der Fundamentalgruppe zugeordnete Kurve. Es möge zur Vereinfachung der Darstellung zunächst angenommen werden,

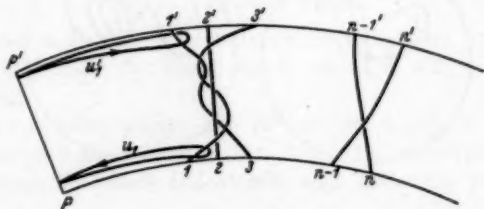


Fig. 2.

daß  $P$  sich beständig radial bewegt, und daß ferner die  $n$  Randpunkte mit  $P$  zusammen auf einem Großkreis der Kugel liegen, und daß schließlich die die Randpunkte verbindenden Kurven sich so auf die Ebene dieses Großkreises projizieren lassen, daß ihre Projektionen die Bahn von  $P$  nicht schneiden (siehe Fig. 2). Die  $n$  den Randpunkten zugehörigen Kurven oder Fäden bilden dann gerade einen Zopf, dessen „Rahmen“<sup>11)</sup> statt aus parallelen Graden aus konzentrischen Kreisbögen besteht. Als Umläufe  $u_1, u_2, \dots, u_n$  der Fundamentalgruppe der Kugel kann man dann gerade die von Artin eingeführten Umläufe<sup>11)</sup> von  $P$  aus um die einzelnen Fäden des Zopfes einführen, und man sieht gleichzeitig, daß die Substitution, die diese Umläufe erleiden, wenn  $P$  von der inneren nach der äußeren Kugel gleitet, gerade einen der Abbildung zugeordneten Automorphismus der Fundamentalgruppe darstellt.

<sup>11)</sup> Siehe loc. cit. <sup>2)</sup> S. 47, 58 und Fig. 11.

Es ist also zwar ein vorgegebener Zopf zur Charakterisierung einer Abbildungsklasse ausreichend, aber es gilt nicht das Umgekehrte; vielmehr gibt es im allgemeinen unendlich viele Zöpfe, mit Projektionen, die sich nicht mit Hilfe der von Artin<sup>11)</sup> angegebenen „erlaubten“ Deformationen ineinander überführen lassen und zur Abbildungsklasse der Identität gehören; dies entspricht dem gruppentheoretischen Sachverhalt, wonach die Gruppe der Abbildungsklassen eine Faktorgruppe der Zöpfegruppe ist. Als Gründe dafür sind anzusehen erstens, daß zu den von Artin angegebenen Zopfdeformationen hier noch weitere hinzukommen, die zu neuen Zöpfen derselben Abbildungsklasse führen, nämlich das Hinüberziehen eines Fadens „von außen“ über die ganze innere Kugel hinweg (siehe Fig. 3), und zweitens die Tatsache, daß die oben gemachte Voraus-

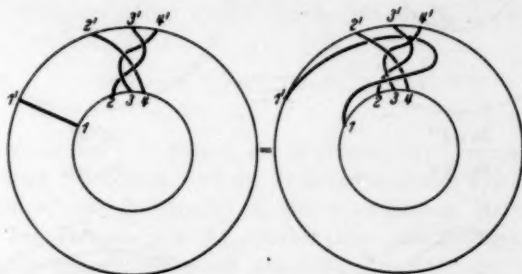


Fig. 3.

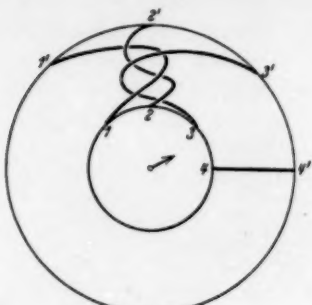
setzung über die Bahn des Punktes  $P$  wesentlich einschränkend war; dieselbe kann an sich eine beliebig mit den übrigen Fäden verschlungene Kurve sein; das Geflecht der den Randpunkten zugehörigen Fäden läßt sich dann als ein Zopf „gesehen von der Bahn von  $P$  aus“ auffassen, hängt aber wesentlich von dieser Bahn ab.

Die Ergebnisse von § 1 ermöglichen nun eine Charakterisierung der zur Abbildungsklasse der Identität gehörigen Zöpfe, wenn man sich diese etwa in der im vorletzten Abschnitt angegebenen Art definiert denkt. Es gilt nämlich:

*Ein Zopf gehört nur dann zur Abbildungsklasse der Identität, wenn er sich durch Zopfdeformationen und Drehungen der inneren Kugel, die diese wieder in ihre frühere Lage bringen, herausdrillen, d. h. in den zur identischen Abbildung gehörigen Zopf überführen läßt.*

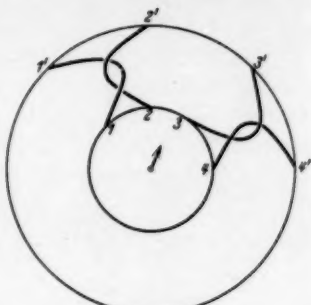
Beweis: Zunächst sind die linken Seiten der Relationen (14), (19) des § 1 — also gerade der Relationen, die zu den Zopfrelationen (13a) hinzukommen — Zöpfe, welche sich durch geeignete Bewegungen der inneren Kugel herausdrillen lassen;  $(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k$  ist nämlich gerade der

Zopf, der durch eine einmalige volle Torsion der  $k$  ersten Fäden entsteht; (vgl. Artin, loc. cit. <sup>2)</sup>, S. 54).  $(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k (\sigma_{k+1} \dots \sigma_n)^{k-n}$  erhält man also, indem man die  $k$  ersten Fäden in einem Drehsinne, die  $n-k$  übrigen im anderen Drehsinne einer vollen Torsion unterwirft (siehe Fig. 4), der entstehende Zopf kann aber offenbar durch eine geeignete Drehung



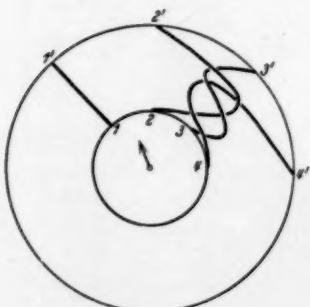
$$(\sigma_1 \sigma_2)^3$$

Fig. 4 a.



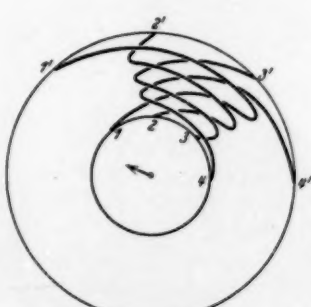
$$\sigma_1^{-2} \sigma_3^2$$

Fig. 4 b.



$$(\sigma_2 \sigma_3)^3$$

Fig. 4 c.



$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^2$$

Fig. 4 d.

der inneren Kugel herausgedrillt werden. Alle Zöpfe, die auf Grund der Relationen (14), (19) von § 1 zur Abbildungsklasse der Identität gehören, erhält man nun nach einem bekannten gruppentheoretischen Satz <sup>12)</sup> durch Transformation der linken Seiten (14), (19) mit beliebigen Zöpfen und Komposition dieser Transformaten. Wie sich im nächsten Paragraphen

<sup>12)</sup> Siehe O. Schreier, loc. cit. <sup>6)</sup>, S. 171.

zeigen wird, sind aber die linken Seiten von (14) und (19) ein Erzeugendensystem einer invarianten Untergruppe der Zöpfegruppe, gehen also bei Transformation mit beliebigen Zöpfen nur in Aggregate aus eben denselben Ausdrücken über, lassen sich also, ebenso wie diese, durch Drehungen der inneren Kugel herausdrillen.

## § 3.

**Gruppentheoretische Herleitung der Relationen der Zöpfegruppe.**

In § 1 wurde benutzt, daß die sämtlichen Relationen, die zwischen den durch

$$(20) \quad \begin{aligned} u'_k &= u_k & (k \neq i, i+1; k=1, \dots, n), \\ u'_i &= u_{i+1}, \quad u'_{i+1} = u_{i+1}^{-1} u_i u_{i+1} & (i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

definierten Automorphismen  $\sigma_i$  der freien, von  $u_1, u_2, \dots, u_n$  erzeugten Gruppe  $\mathfrak{F}_n$  bestehen, alle aus

$$(21) \quad \begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i, k=1, \dots, n-1), \\ \sigma_i &\rightleftharpoons \sigma_k & (k \neq i+1, i-1) \end{aligned}$$

folgen, wobei  $\rightleftharpoons$  nach J. Nielsen als Abkürzung für „vertauschbar mit“ gebraucht wird. Bei Artin wird die Vollständigkeit des Systems (21) für die von den  $\sigma_i$  erzeugte Gruppe  $\mathfrak{Z}_n$  mit topologischen Methoden nachgewiesen. Die Formeln von § 1 erlauben aber mit geringer Mühe dasselbe Resultat gruppentheoretisch abzuleiten, so daß also topologische Betrachtungen nur bei der Herleitung der Formeln (1) und (2) von § 1 und am Beginn von § 2 in den Beweisen auftreten.

Die Automorphismen  $\sigma_i$  der freien Gruppe  $\mathfrak{F}_n$  sind auch solche der freien Gruppe  $\mathfrak{F}_{n-1}$  von  $n-1$  Erzeugenden  $u_1, \dots, u_n$ , welche aus  $\mathfrak{F}_n$  durch Hinzufügen der Relation

$$(22) \quad u_1 u_2 \dots u_n = 1$$

entsteht; die von ihnen erzeugte Automorphismengruppe von  $\mathfrak{F}_{n-1}$  heiße  $\mathfrak{Z}_n$ . Außer den Relationen (21) müssen für  $\mathfrak{Z}_n$  dann aber noch weitere Relationen zwischen den  $\sigma_i$  gelten. *Es wird gelingen, nachzuweisen, daß man als definierende Relationen von  $\mathfrak{Z}_n$  außer (21) nur noch die eine Relation*

$$(23) \quad (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n = 1$$

*benötigt.* Damit wird dann gleichzeitig die Vollständigkeit des Systems (21) für  $\mathfrak{Z}_n$  nachgewiesen sein; aus den Relationen (21) folgt nämlich, daß  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$  mit allen  $\sigma_i$  vertauschbar ist<sup>15)</sup>. Daher gilt: Ein Ausdruck in den  $\sigma_i$ , der auf Grund von (21) und (23) gleich eins ist, ist auf

<sup>15)</sup> S. Artin <sup>3)</sup>, S. 54.

Grund von (21) allein in eine Potenz von  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$  verwandelbar, denn nach einem oben<sup>13)</sup> zitierten Satz läßt er sich allein auf Grund von (21) in ein Produkt von Transformaten von  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$ , also auch in eine Potenz hiervon verwandeln. Zwischen den Erzeugenden  $\sigma_i$  von  $\bar{Z}_n$  kann dann also außer (21) höchstens noch eine Relation

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2n} = 1$$

bestehen; da aber  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2n}$  der Automorphismus

$$(24) \quad u_i = (u_1 u_2 \dots u_n)^{-1} u_i (u_1 u_2 \dots u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ist, ist dies offenbar nicht der Fall. Formel (24) zeigt gleichzeitig, daß für  $\bar{Z}_n$  (23) gelten muß.

Es ist jetzt also nur noch notwendig, sich mit  $\bar{Z}_n$  zu beschäftigen, und die Vollständigkeit des Relationensystems (21), (23) für diese Gruppe nachzuweisen. Dazu bezeichnen wir die abstrakte Gruppe von  $n-1$  Erzeugenden  $\sigma_i$  mit den Relationen (21), (23) mit  $\mathfrak{Y}_n$ ; es ist also  $\bar{Z}_n$  sicher eine Faktorgruppe von  $\mathfrak{Y}_n$ , und es soll nun  $\mathfrak{Y}_n = \bar{Z}_n$  nachgewiesen werden.

Nun erzeugen die Elemente

$$(25) \quad \tau_i = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1} \sigma_i^2 \sigma_{i-1}^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

und

$$\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}$$

nach dem in § 1 bemerkten eine Untergruppe  $\mathfrak{Y}_n^{(1)}$  von  $\mathfrak{Y}_n$ , welche in  $\mathfrak{Y}_n$  höchstens den Index  $n$  besitzt, da sich als Repräsentanten der rechtsseitigen Nebengruppen von  $\mathfrak{Y}_n^{(1)}$  in  $\mathfrak{Y}_n$  die Elemente

$$1, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

wählen lassen. Andererseits ist dieser Index auch mindestens gleich  $n$ , da die  $\tau_i$  und  $\sigma_i$  mit  $v > 1$  in der Faktorgruppe  $\bar{Z}_n$  von  $\mathfrak{Y}_n$  eine Untergruppe vom genauen Index  $n$  erzeugen, nämlich die Untergruppe  $\bar{Z}_n^{(1)}$  aller der Automorphismen aus  $\bar{Z}_n$ , für die  $u_i = T_1 u_i T_1^{-1}$  ist. Folglich muß auch  $\mathfrak{Y}_n^{(1)}$  eine Faktorgruppe von  $\mathfrak{Y}_n^{(1)}$  sein, und es ist dann und nur dann (21), (23) ein vollständiges Relationensystem für  $\bar{Z}_n$ , wenn alle zwischen den  $\tau_i$ ,  $\sigma_i$  ( $v > 1$ ) bestehenden Relationen von  $\bar{Z}_n^{(1)}$  aus (21), (23) folgen, falls man für die  $\tau_i$  ihre Werte aus (25) einsetzt.

Die Gruppe  $\bar{Z}_n^{(1)}$  ist nun nach § 1 (wo sie mit  $\bar{\mathfrak{U}}_1$  bezeichnet wurde) nichts weiter als die von den Automorphismen  $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  und den sämtlichen inneren Automorphismen der freien Gruppe  $\bar{Z}_{n-1}$  erzeugte Gruppe. Nehmen wir nun unter Anwendung vollständiger Induktion an, für die von  $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  erzeugte Automorphismengruppe  $\bar{Z}_{n-1}$  sei bereits erwiesen, daß alle Relationen in derselben aus dem sinngemäß verengten System (21), nämlich aus

$$(26) \quad \begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 2, \dots, n-2), \\ \sigma_i &\stackrel{\rightarrow}{\rightleftharpoons} \sigma_k & (k = 2, \dots, n-1; k \neq i+1, i-1) \end{aligned}$$



folgen — für  $n = 2$  ist dies unschwer direkt nachzuweisen —, berücksichtigen wir ferner, daß nach § 1  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2(n-1)}$  die einzigen in  $\mathfrak{Z}_{n-1}$  enthaltenen inneren Automorphismen sind, und daß schließlich die inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_{n-1}$  in jeder sie enthaltenden Automorphismengruppe eine invariante, mit  $\mathfrak{F}_{n-1}$  isomorphe freie Untergruppe bilden, so erhalten wir nach einem bekannten Prinzip<sup>14)</sup> ohne weiteres die definierenden Relationen von  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  durch die folgenden Angaben: Man bezeichne mit  $I_T$  den inneren Automorphismus  $u'_i = T^{-1}u_i T$  von  $\mathfrak{F}_{n-1}$ ; es gilt  $I_{T_1} I_{T_2} = I_{T_2} I_{T_1}$ . Sodann hat man als vollständiges Relationensystem außer (26) nur noch

$$(27) \quad \begin{cases} \sigma_i I_{u_k} \sigma_i^{-1} = I_{u_k} & (k \neq i, i+1; k = 2, \dots, n-1), \\ \sigma_i I_{u_i} \sigma_i^{-1} = I_{u_{i+1}} & (i = 2, \dots, n-1), \\ \sigma_i I_{u_{i+1}} \sigma_i^{-1} = I_{u_{i+1}} I_{u_i} I_{u_{i+1}}^{-1}; \end{cases}$$

$$(28) \quad (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = I_{u_n} I_{u_{n-1}} \dots I_{u_2},$$

wobei die  $I_{u_i}$  zusammen mit den  $\sigma_i$  ( $\nu > 1$ )  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  erzeugen. Da aus (26) folgt, daß  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1}$  mit allen übrigen  $\sigma_i$  ( $\nu > 1$ ) vertauschbar ist, ist die dritte Zeile in (27) eine Folge der beiden ersten und von (28).

Nun hängen die Erzeugenden  $\tau_i$  von  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$  mit den  $\sigma_i$  und  $I_{u_i}$  durch die Beziehungen (18) und (11) zusammen. Die dort auftretenden inneren Automorphismen können dazu dienen,  $I_{u_k}$  durch die  $\tau_i, \sigma_i$  auszudrücken; diese Ausdrücke wären dann in (27), (28) einzusetzen, und das Bestehen der so entstehenden Relationen mit Hilfe von (21), (23) wäre nachzuweisen. Wir werden indessen zur Vermeidung allzu komplizierter Rechnungen so vorgehen, daß wir erstens gewisse Ausdrücke  $\Theta_i$  aus den  $\tau_i, \sigma_i$  ( $\nu > 1$ ) konstruieren, von denen sich auf Grund von (21), (23) allein nachweisen läßt, daß sich die  $\tau_i$  durch sie und die  $\sigma_i$  mit  $\nu > 1$  ausdrücken lassen, und die in  $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$ , also auf Grund von (18), (28), (27), gleich den  $I_{u_i}$  sind. Sodann ist zweitens zur Vervollendung unseres Beweises nur noch zu zeigen, daß diese  $\Theta_i$ , für die  $I_{u_i}$  in (27), (28) eingesetzt, zu Relationen zwischen  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  führen, die aus (21), (23) folgen.

Wir setzen

$$(29) \quad \Theta_i = \tau_1 (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2-n} (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1}$$

und für  $i > 2$ .

$$(30) \quad \Theta_i = \sigma_{i-1} \dots \sigma_2 \Theta_2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{i-1}^{-1};$$

<sup>14)</sup> Vgl. etwa K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig 1932, I, 12, S. 23.

es ist  $\Theta_i = I_{n_i}$  in  $\tilde{\mathfrak{B}}_n^{(1)}$ , wie man aus (18), (27), (28) leicht folgert. Sodann weisen wir das bestehen von

$$(31) \quad \begin{aligned} \tau_i &\equiv \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \sigma_i^2 \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \Theta_2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_{i+1}^{-1} \end{aligned}$$

als Konsequenz von (21), (23) nach. In der Tat ist gemäß (13b) am Schluß von § 1, sinngemäß auf  $\sigma_{n-1}, \dots, \sigma_2$  angewandt, und weil  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} \rightleftharpoons \sigma_i$  ( $i > 1$ ),

$$(32) \quad \Theta_2 = \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \dots \sigma_2,$$

wodurch (31) übergeht in

$$(33) \quad \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \sigma_i^2 \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1} = \sigma_i^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_i,$$

oder, wegen  $\sigma_i^2 = (\sigma_1 \dots \sigma_i)^{i-1} \sigma_1^2 (\sigma_1 \dots \sigma_i)^{1-i}$  (siehe Fußnote zu (13b)) in

$$(\sigma_1 \dots \sigma_i)^{i+1} \sigma_1^2 (\sigma_1 \dots \sigma_i)^{-i-1} = \sigma_1^2.$$

Diese Relation folgt aber wirklich aus (21) (vgl. Anm. <sup>13</sup>).

Damit ist der erste Teil unserer Aufgabe erledigt. Es bleibt nur noch übrig, die Beziehungen (27), (28) mit  $\Theta_i$  statt  $I_{n_i}$  aus (21), (23) abzuleiten, wobei, wie schon gesagt, von (27) nur die beiden ersten Zeilen berücksichtigt werden müssen. Man bekommt dabei aus (27) nur

$$(34) \quad \sigma_i \rightleftharpoons \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \Theta_2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{k-1}^{-1} \\ (k-1, i = 2, \dots, n-1; k \neq i, i+1),$$

während die zweite Zeile (27) wegen der Definition der  $\Theta_i$  identisch erfüllt wird.

(34) ist für  $i > k \geq 2$  sicher erfüllt, da dann  $i \geq 3$  ist, und nach (21) ist alsdann  $\sigma_i$  sowohl mit  $\sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}$  wie mit  $\sigma_1^2$  wie (vgl. Fußnote zu (13b)) mit  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-2}$  wie mit  $(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-2}$  vertauschbar. Für  $i < k-1 > 2$  (es muß  $i \geq 2$  sein) folgt dagegen aus (vgl. Fußnote zu (13b))

$$\sigma_2 \dots \sigma_{k-1} \sigma_i \sigma_{k-1}^{-1} \dots \sigma_2^{-1} = \sigma_{i+1},$$

daß (34) mit der Vertauschbarkeit von  $\sigma_{i+1}$  und  $\Theta_2$  äquivalent ist: dies folgt wie im Fall  $i > k$ .

Als letztes bleibt noch die der Relation (28) entsprechende Relation

$$(35) \quad \begin{aligned} &(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = \Theta_n \Theta_{n-1} \dots \Theta_2 \Theta_2 \\ &= (\sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \Theta_2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1}) (\sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \Theta_2 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1}) \dots (\sigma_2 \Theta_2 \sigma_2^{-1}) \Theta_2 \end{aligned}$$

zu bestätigen, die wegen (32) auf die folgende Relation führt:

$$(36) \quad (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \{(\sigma_{n-k} \dots \sigma_2) T (\sigma_{n-1} \dots \sigma_{n-k+1})\}$$

mit  $T = \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ ; dabei soll für das im ersten Faktor auftretende  $\sigma_n$  natürlich 1 gesetzt werden.

Berücksichtigen wir, daß für  $i > 1$  und  $< n-1$   $T \sigma_i T^{-1} = \sigma_{i+1}$  ist (vgl. Fußnote zu (13b)), sowie die Vertauschbarkeitsrelationen in (21), so folgt, indem wir jeweils  $\sigma_{n-1} \dots \sigma_{n-k+1}$  nach rechts und  $\sigma_{n-k} \dots \sigma_2$  nach links „durchziehen“, daß (36) gleichbedeutend ist mit

$$(37) \quad (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = \left\{ \prod_{k=2}^{n-1} (\sigma_{n-1} \dots \sigma_k) \right\} T^{n-1} \left\{ \prod_{k=2}^{n-1} (\sigma_k \dots \sigma_2) \right\}.$$

Nach Artin [loc. cit.<sup>2)</sup> S. 54] ist aber  $T^{n-1} = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$ , also nach (23) (diese Relation wird nur hier gebraucht)  $= 1$ , und somit geht die rechte Seite von (37) über in

$$(\sigma_{n-1} \dots \sigma_2) (\sigma_{n-1} \dots \sigma_3) \dots \sigma_{n-1} \cdot \sigma_2 (\sigma_3 \sigma_2) \dots (\sigma_{n-1} \dots \sigma_2),$$

was auf Grund der Vertauschbarkeitsrelationen in (21) und wegen  $\sigma_i \rightleftharpoons (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1}$  gleich  $(\sigma_{n-1} \dots \sigma_2)^{n-1} = (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1}$  ist.

Der am Schluß von § 2 benutzte Satz, daß die Elemente

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n, \quad (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1}, \quad \sigma_1^2 (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2-n}, \dots$$

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k (\sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1})^{k-n}, \dots, (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{1-n}$$

eine invariante Untergruppe von  $\mathfrak{Z}_n$  erzeugen, ergibt sich ohne weiteres daraus, daß  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$  zum Zentrum gehört, und in  $\bar{\mathfrak{Z}}_n$  die Elemente

$$(\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{1-n} = I_{u_2 \dots u_n}^{-1}, \quad (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{n-1} = I_{u_n}^{-1},$$

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})^k (\sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1})^{k-n} = I_{u_{k+1} \dots u_n}^{-1}$$

als Erzeugende für die Gruppe der inneren Automorphismen dienen können.

Schließlich folgt aus (27), (29) und der nach (30) gemachten Bemerkung wegen der Definition der Gruppe der Abbildungsklassen als Faktorgruppe der inneren Automorphismen in  $\bar{\mathfrak{Z}}_n$  sofort, daß man zu den Zöplerrelationen (21) nur die Relationen

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n = 1, \quad \sigma_1^2 (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{2-n} (\sigma_3 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = 1$$

hinzufügen muß, um ein System von definierenden Relationen für die Gruppe der Abbildungsklassen zu erhalten. Denn durch Hinzufügen von  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n = 1$  geht  $\mathfrak{Z}_n$  in  $\bar{\mathfrak{Z}}_n$  über, und in  $\bar{\mathfrak{Z}}_n$  folgt aus

$$\sigma_1^2 (\sigma_3 \dots \sigma_{n-1})^{2-n} (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} = 1,$$

daß  $I_{u_2}$ , also wegen der zweiten Zeile in (27) alle  $I_{u_i}$  gleich eins werden.

## Die Abbildungen des von $n$ Punkten berandeten Torus auf sich.

### § 4.

Die Erzeugenden der Gruppe der Abbildungsklassen für  $n = 2$ .

Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  des von zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  berandeten Torus wird erzeugt durch die Umläufe  $u_1$  und  $u_2$  um die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und durch zwei Kurven  $a$  und  $b$  eines Riemannschen kanonischen Schnittsystems für die unberandete Fläche. Alle Relationen zwischen diesen Erzeugenden folgen aus einer einzigen, die bei geeigneter Normierung der Anordnung und des Durchlaufungssinnes der zugehörigen Kurven sich auf die Form

$$(1) \quad u_1 u_2 a^{-1} b a b^{-1} = 1$$

bringen läßt. Betrachtet man wieder nur Abbildungen mit Erhaltung der Indikatrix, welche den festen Bezugspunkt  $P$  für die Kurven der Fundamentalgruppe in sich überführen, so erhält man, wie in § 1, daß jeder solchen Abbildung ein Automorphismus der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  entspricht, bei welchem  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $a$ ,  $b$  bzw. in Elemente  $u'_1$ ,  $u'_2$ ,  $a'$ ,  $b'$  übergehen, die den Beziehungen

$$(2) \quad u'_i = T_i u_i T_i^{-1} \quad (i, k_i = 1, 2),$$

$$(3) \quad u'_1 u'_2 a'^{-1} b' a' b'^{-1} = 1$$

genügen. Im folgenden soll ein solcher Automorphismus stets mit

$$[u'_1, u'_2, a', b']$$

bezeichnet werden, wobei für die in den eckigen Klammern stehenden Elemente ihre Ausdrücke in  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $a$ ,  $b$  eingesetzt zu denken sind. Die (2), (3) genügenden Automorphismen erzeugen eine Gruppe  $\overline{\mathfrak{A}}$ , die die Gruppe  $\mathfrak{I}$  der sämtlichen inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}$  enthält. Die gesuchte Gruppe  $\mathfrak{A}$  der Abbildungsklassen wird dann gleich  $\overline{\mathfrak{A}}/\mathfrak{I}$  sein, da sich zeigen läßt, daß zu den noch zu bestimmenden Erzeugenden von  $\overline{\mathfrak{A}}$  stets eine sie induzierende Abbildung gefunden werden kann.

Anstatt  $\overline{\mathfrak{A}}$  und  $\mathfrak{A}$  selber zu untersuchen, soll, analog zu dem Verfahren in § 1, eine Untergruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  vom Index 2 in  $\overline{\mathfrak{A}}$  betrachtet werden, die aus den Automorphismen besteht, für die außer (2) und (3) noch

$$(4) \quad u'_1 = T_1 u_1 T_1^{-1}$$

erfüllt ist.  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  enthält  $\mathfrak{I}$ , und  $\mathfrak{A}_1 = \overline{\mathfrak{A}}_1/\mathfrak{I}$  ist infolgedessen eine Untergruppe vom Index 2 in  $\mathfrak{A}$ .

Aus (4) folgert man schließlich genau wie in § 1, daß  $\mathfrak{A}_1$  isomorph ist mit einer Faktorgruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_1/\mathfrak{I}'$ , wobei  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  diejenige Gruppe von Auto-

morphismen von  $\mathfrak{F}$  ist, für die nach Elimination von  $u_1$  mittels (1) identisch in den Erzeugenden  $u = u_1$ ,  $a$ ,  $b$  die Bedingungen

$$(5) \quad u' \equiv T u T^{-1},$$

$$(6) \quad u' a'^{-1} b' a' b'^{-1} \equiv u a^{-1} b a b^{-1}$$

gelten, und  $\mathfrak{Z}'$  die in  $\bar{\mathfrak{A}}_1$  enthaltene Untergruppe von inneren Automorphismen bezeichnet; da  $u$ ,  $a$ ,  $b$  eine freie Gruppe erzeugen, kann man analog wie in § 1 leicht zeigen, daß  $\mathfrak{Z}'$  von den Potenzen des Automorphismus

$$(7) \quad [\Theta^{-1} u \Theta, \Theta^{-1} a \Theta, \Theta^{-1} b \Theta], \quad \Theta \equiv u a^{-1} b a b^{-1}$$

erzeugt wird.

R. Fricke<sup>15)</sup> hat auf einem topologischen Wege gezeigt, daß man als Erzeugende von  $\mathfrak{A}_1$  die folgenden Automorphismen wählen kann:

$$(8) \quad \begin{cases} r = [u, a, b a], \\ s = [u, a^{-1} b^{-1} a, a], \\ \tau = [a u a^{-1}, a u^{-1} a u a^{-1}, b a u a^{-1}]. \end{cases}$$

Daß diese zur Erzeugung von  $\bar{\mathfrak{A}}_1$  ausreichen, läßt sich indessen auch gruppentheoretisch etwa folgendermaßen ableiten:

$$A = [T u T^{-1}, a', b']$$

sei ein beliebiger Automorphismus aus  $\bar{\mathfrak{A}}_1$ . Falls in  $T$ ,  $a'$ ,  $b'$ , nachdem man in diesen Elementen durch identische Umformungen so viel als möglich  $u$ -Zeichen beseitigt hat, keine  $u$ -Zeichen mehr auftreten, genügen  $r$  und  $s$  zur Zusammensetzung von  $A$ , da dann aus

$$(9) \quad T u T^{-1} a'^{-1} b' a' b'^{-1} \equiv u a^{-1} b a b^{-1}$$

folgt, daß  $T \equiv 1$  sein muß, da sich das  $T$  ganz links in (9) sonst nicht wegheben kann. Wegen der daraus folgenden Beziehung

$$a'^{-1} b' a' b'^{-1} \equiv a^{-1} b a b^{-1}$$

folgt unsere Behauptung aus einer Untersuchung von J. Nielsen<sup>16)</sup> über die Automorphismen der freien Gruppen von zwei Erzeugenden. Aus eben diesen Untersuchungen folgt auch, daß man in (9) stets erreichen kann, daß, falls  $a'$  und  $b'$  beide  $u$ -Zeichen noch wesentlich, d. h. nach Ausführung aller Kürzungen von  $a a^{-1}$ ,  $b b^{-1}$ ,  $u u^{-1}$  enthalten, sich durch Anwendung von  $r$  und  $s$  stets erreichen läßt, daß in  $a'^{-1} b'$ ,  $b' a'$ ,  $a' b'^{-1}$  keine Komponente  $a'^{-1}$ ,  $b'$ ,  $a'$ ,  $b'^{-1}$  von einem ihrer Nachbarn hinsicht-

<sup>15)</sup> Siehe l. c. <sup>3)</sup>, S. 320 ff.

<sup>16)</sup> Mathem. Annalen 78 (1918). Insbesondere S. 393.

lich ihrer  $u$ -Zeichen zu mehr als der Hälfte absorbiert wird. Man hat dazu nur zu berücksichtigen, daß sich aus  $r$  und  $s$  die Automorphismen

$$(10) \quad \begin{array}{lll} [b^{-1}a, a], & [a, ba], & [a, ba^{-1}], \\ [b^{-1}a, b], & [ba, b], & [b, ba^{-1}], \end{array}$$

zusammensetzen lassen, deren Anwendung auf  $A$  im umgekehrten Falle zu einer Verminderung der Gesamtzahlen der in  $a'$  und  $b'$  vorhandenen  $u$ -Zeichen führen würde, was nicht unbegrenzt geschehen kann, ohne daß  $a'$  oder  $b'$  oder beide ihre sämtlichen  $u$ -Zeichen verlieren.

Es ist nun zweckmäßig, zunächst die Spezialfälle zu untersuchen, daß  $a'$  oder  $b'$  oder  $T$  keine  $u$ -Zeichen enthalten.

I.  $a'$  enthält keine  $u$ -Zeichen mehr.

In  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  bleiben dann auch nach Ausführung aller möglichen Absorptionen alle  $u$ -Zeichen in  $b'$  und  $b'^{-1}$  stehen. In  $TuT^{-1}a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  muß dann wegen (9) entweder das erste  $u$ -Zeichen in  $T$  (bzw., wenn  $T$  kein solches enthält, das mittlere  $u$ -Zeichen in  $TuT^{-1}$ ) oder das letzte  $u$ -Zeichen in  $b'^{-1}$  stehenbleiben, je nachdem ob das mittlere  $u$ -Zeichen in  $TuT^{-1}$  von  $b'$  absorbiert wird oder nicht. In jedem Falle wird aber  $T$  hinsichtlich seiner  $u$ -Zeichen völlig von  $b'$  absorbiert. Enthält somit  $T$  überhaupt noch  $u$ -Zeichen, so führt eine Anwendung von<sup>17)</sup>

$$\rho = \tau \tau s^{-1} = [a^{-1}b^{-1}a u a^{-1}ba, \quad b^{-1}a u a^{-1}ba, \quad b]$$

auf  $A$  zu einem Automorphismus, in welchem  $T$  keine  $u$ -Zeichen mehr enthält. Dieser Fall soll später erledigt werden.

II.  $b'$  enthält keine  $u$ -Zeichen mehr.

In diesem Falle führt genau wie oben eine Anwendung von

$$\tau = [a u a^{-1}, \quad a u^{-1} a u a^{-1}, \quad b a u a^{-1}]$$

auf  $A$  zu dem Fall, daß  $T$  keine  $u$ -Zeichen mehr enthält.

III.  $T$  enthält keine  $u$ -Zeichen mehr.

Bleibt in  $TuT^{-1}a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  nach Ausführung aller Absorptionen das  $u$ -Zeichen in  $TuT^{-1}$  stehen, so muß  $T \equiv 1$  sein, und  $a'^{-1}b'a'b'^{-1} \equiv a^{-1}b a b^{-1}$ , was nur dann möglich ist, wenn  $a'$  und  $b'$  keine  $u$ -Zeichen enthalten, wie man nach der eingangs zitierten Schlußweise von Nielsen zeigen kann, da sich dann durch Anwendung der Automorphismen (10) eine beständige Verminderung der Gesamtzahl der  $u$ -Zeichen in  $a'$  und  $b'$  erreichen lassen müßte, bis entweder  $a'$  oder  $b'$  keine  $u$ -Zeichen mehr enthält oder bis in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  genau die Hälfte der  $u$ -Zeichen in  $a'^{-1}$  von  $b'$  und umgekehrt, ebenso die Hälfte der  $u$ -Zeichen in  $b'$  von  $a'$  und

<sup>17)</sup>  $A_1 A_2$  soll der Automorphismus sein, der entsteht, wenn erst  $A_1$  und dann  $A_2$  ausgeführt wird.

umgekehrt, und schließlich die Hälfte der  $u$ -Zeichen von  $b'^{-1}$  in  $a'b'^{-1}$  von  $a'$  absorbiert werden müßte und umgekehrt. In diesem Falle folgert man sofort  $a' \equiv S\alpha S^{-1}$ ,  $b' \equiv S\beta S^{-1}$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  keine  $u$ -Zeichen mehr enthalten. Es folgt aus

$$a'^{-1}b'a'b'^{-1} \equiv S\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}S^{-1} \equiv a^{-1}ba b^{-1}$$

somit, daß auch  $S$  keine  $u$ -Zeichen mehr enthalten darf. Enthielte etwa  $b'$  keine  $u$ -Zeichen mehr, so wäre aus demselben Grunde

$$a'^{-1}b'a' \equiv a^{-1}ba b^{-1}b'$$

von  $u$ -Zeichen frei, also auch  $a'$ .

Wir können nun den Fall betrachten, daß in  $TuT^{-1}a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  das erste  $u$ -Zeichen links nicht stehenbleibt; es darf dann eventuell nach wiederholter Anwendung von (10) nur das letzte  $u$ -Zeichen in  $b'^{-1}$  bzw.  $a'$  stehenbleiben, je nachdem ob  $b'$   $u$ -Zeichen enthält oder nicht. Der zweite Fall kann (vgl. I) nur eintreten, wenn  $a'$  nur ein  $u$ -Zeichen enthält. Dann wird  $a' \equiv a_1 u a_2$ ,

$$T^{-1}a_2^{-1} \equiv 1, \quad Ta_1^{-1}b'a_1 \equiv 1, \quad a_2b'^{-1} \equiv a^{-1}ba b^{-1},$$

also

$$b' \equiv a_1 a_2 a_1^{-1}, \quad a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1} \equiv a^{-1}ba b^{-1};$$

also besteht für  $a_1$  und  $b'$  die Identität

$$a_1^{-1}b'a_1 b'^{-1} \equiv a^{-1}ba b^{-1}.$$

Nach Nielsen<sup>14)</sup> gibt es folglich einen durch  $r$  und  $s$  erzeugten Automorphismus

$$[u, a_1, b'].$$

Wendet man auf diesen  $srs^{-1}$  an, so erhält man dasselbe, wie wenn man  $[u, b^{-1}a, b]$  auf  $A$  anwendet.

Der Fall, daß  $b'$   $u$ -Zeichen enthält, nicht aber  $a'$ , ist analog zu erledigen.

Nach dem im ersten Absatz von III bemerkten, ist der allgemeinste hier zu behandelnde Fall aber stets auf die erledigten Fälle oder auf den folgenden Sonderfall:

$$a' \equiv S\alpha S^{-1}, \quad b' \equiv S\beta S^{-1},$$

wobei  $\alpha, \beta$  keine und  $S$  nur ein  $u$ -Zeichen enthält, zurückzuführen, und zwar durch hinreichend oftmaliges Anwenden von (8), da schließlich in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  nur zwei  $u$ -Zeichen stehenbleiben dürfen. Man findet, daß sich  $S = Tu^{-1}$  wählen läßt, woraus dann

$$T\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1} \equiv 1, \quad T^{-1} \equiv a^{-1}ba b^{-1}$$

folgt. Hiernach gibt es einen Automorphismus

$$[u, \alpha, \beta],$$



der sich aus  $\tau, s$  erzeugen läßt (siehe <sup>16</sup>)), und aus diesem entsteht  $A$  durch Hinzufügen von

$$(7) \quad [\Theta^{-1} u \Theta, \Theta^{-1} a \Theta, \Theta^{-1} b \Theta], \quad \Theta \equiv u a^{-1} b a b^{-1}.$$

Setzen wir zur Abkürzung noch

$$(12) \quad \varrho = s \tau s^{-1} = [a^{-1} b^{-1} a u a^{-1} b a, b^{-1} a u a^{-1} b a, b],$$

so wird der Automorphismus (7) gleich

$$s^{-1} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau,$$

womit III erledigt ist.

Der allgemeine Fall soll nun dadurch erledigt werden, daß wir zeigen: Wenn weder I, noch II, noch III vorliegt, läßt sich  $A$  stets durch Hinzufügen mehrerer Automorphismen (8) in einen solchen verwandeln, für den die Anzahl der  $u$ -Zeichen in  $T$  kleiner ist als in  $A$ ; der allgemeine Fall muß sich also allmählich auf einen der drei erledigten Spezialfälle zurückführen lassen.

Man denke sich in  $a'^{-1} b' a' b'^{-1}$  durch Absorption möglichst viele  $u$ -Zeichen weggeschafft, wobei wir annehmen dürfen, daß keines der Elemente  $a'^{-1}, b', a', b'^{-1}$  von einem Nachbar zu mehr als der Hälfte hinsichtlich seiner  $u$ -Zeichen absorbiert wird. Werden nun trotzdem in  $b'$  und  $a'$  alle  $u$ -Zeichen absorbiert, so findet man

$$a' \equiv S \alpha S^{-1}, \quad b' \equiv S \beta S^{-1}$$

mit von  $u$  freien  $\alpha, \beta$ , und weiter aus

$$T u T^{-1} S a^{-1} \beta \alpha \beta^{-1} S^{-1} \equiv u a^{-1} b a b^{-1},$$

daß entweder  $S^{-1}$  mit  $u a^{-1} b a b^{-1}$  aufhört, in welchem Falle man das Reziproke des Automorphismus (7) hinzufügt, oder aber, daß sogleich  $T^{-1} S = R(a, b)$  ist, weil  $T^{-1}$  alle  $u$ -Zeichen von  $S$  absorbiert. Das ergibt

$$T u R(a, b) \alpha^{-1} \beta \alpha \beta^{-1} R^{-1}(a, b) T^{-1} \equiv u a^{-1} b a b^{-1},$$

und demzufolge muß  $T$  die Form haben

$$T \equiv (u a^{-1} b a b^{-1})^i,$$

denn da  $T^{-1} u a^{-1} b a b^{-1} T$  nur noch ein  $u$ -Zeichen enthält, wird, wenn wir  $u a^{-1} b a b^{-1} \equiv z$  als neues primitives Element zusammen mit  $a, b$  einführen,

$$T^{-1}(z, a, b) z T(z, a, b) \equiv z P(a, b),$$

woraus  $T \equiv z^i$  folgt. Damit ist auch dieser Fall erledigt, wie man durch  $i$ -fache Anwendung von (7) zeigt.

Es bleibt noch der sozusagen „allgemeinste“ Fall, daß 1. in  $a'^{-1} b' a' b'^{-1}$  nach Ausführung aller Absorptionen mindestens die Hälfte der  $u$ -Zeichen in  $a'^{-1}, b'^{-1}$  und überdies 2. auch in  $b'$  oder  $a'$  min-

destens ein  $u$ -Zeichen stehenbleibt, wobei 3. keine Komponente  $b'$ ,  $a'$ , von einem Nachbar zu mehr als der Hälfte ihrer  $u$ -Zeichen absorbiert wird. Es mögen nach Ausführung aller Absorptionen in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  genau  $2N$ , in  $a'^{-1}b'a'$  genau  $M$   $u$ -Zeichen stehenbleiben.  $b'^{-1}$  enthalte  $\beta$   $u$ -Zeichen, von denen sich in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  genau  $\lambda$  gegen einen Teil der  $M$  aus  $a'^{-1}b'a'$  stehenbleibenden wegheben mögen, so daß in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  aus  $a'^{-1}b'a'$  endgültig  $M - \lambda$  Zeichen stehenbleiben. Aus Voraussetzung 3. folgt  $M \geq \beta$ , da  $a'^{-1}b'a'$  mindestens soviel  $u$ -Zeichen enthalten muß wie  $b'$ , ferner gilt  $M - 2\lambda + \beta = 2N$ , und  $M \leq 2N$ , da wegen Voraussetzung 1.  $2\lambda \leq \beta$  sein muß. Hieraus und aus  $M \geq \beta$  und  $M - \lambda = 2N - \beta + \lambda$  folgt schließlich  $M - \lambda \geq N$ , wobei das Gleichheitszeichen nur für  $M = \beta$  gelten kann. Dann muß aber  $a' \equiv a_1 a_2$ ,  $b' \equiv a_1 b_1 a_1^{-1}$  sein, wobei  $a_1$  und  $a_2$  genau gleichviele, etwa  $\alpha$ , und  $b_1$  keine  $u$ -Zeichen enthält. Es wird  $\beta = M = 2\alpha$ , und wegen Voraussetzung 2.  $\alpha > \lambda$ .

Im Falle  $M - \lambda > N$  muß in  $TuT^{-1}a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  das mittlere  $u$  in  $TuT^{-1}$  gegen ein aus  $a'^{-1}b'a'$  nach Ausführung aller Absorptionen in  $a'^{-1}b'a'b'^{-1}$  stehengebliebenes  $u$ -Zeichen fortfallen, da  $T^{-1}$  genau  $N$   $u$ -Zeichen enthält; also enthält  $uT^{-1}a'^{-1}b'a'$  wegen  $M \leq 2N$  deren höchstens noch  $M - N - 1 < N$ , und in

$$a'^{-1}b'^{-1}a'TuT^{-1}a'^{-1}b'a' \equiv T_1 u T_1^{-1}$$

enthält  $T_1$  weniger  $u$ -Zeichen als  $T$ , also bewirkt  $s \tau s^{-1}$  (siehe I) angewandt auf  $A$  eine Verminderung der Anzahl der  $u$ -Zeichen in  $T$ .

Im Falle  $M = N + \lambda$  kann man nur schließen, daß  $T^{-1}a'^{-1}b'a'$  noch höchstens  $M - N$   $u$ -Zeichen enthält. Wegen  $M = 2\alpha > 2\lambda$  und  $M \leq 2N$  gilt dann aber  $2N \geq 2\alpha > 2\lambda$ , also  $N + \lambda < 2N$ , also  $M - N = \lambda < N$ , und dasselbe Verfahren wie oben führt zum Ziel.

## § 5.

### Die Relationen für die Gruppe der Abbildungsklassen des von zwei Punkten berandeten Torus.

Die in § 4 eingangs eingeführte Gruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  ist zunächst eine Automorphismengruppe der von  $u$ ,  $a$ ,  $b$  erzeugten freien Gruppe  $\mathfrak{F}$ . Wegen (6), § 4 ist sie gleichzeitig eine Automorphismengruppe der durch die Relationen  $ua^{-1}ba b^{-1} = 1$  aus  $\mathfrak{F}$  entstehenden Faktorgruppe  $\mathfrak{F}^*$ , die eine freie Gruppe der Erzeugenden  $a$ ,  $b$  ist. Es können dabei aber Automorphismen von  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  in  $\mathfrak{F}^*$  den identischen Automorphismus erzeugen, ohne daß für  $\mathfrak{F}$  dasselbe gilt;  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  geht also in eine Faktorgruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  von

sich über, wenn man sie als Automorphismengruppe von  $\mathfrak{F}^*$  auffaßt, und zwar gehen die in (8), (12), § 4 eingeführten Erzeugenden von  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  bzw. in die Automorphismen

$$\begin{aligned} r^* &= [a, ba], \quad s^* = [a^{-1}b^{-1}a, a] \\ \tau^* &= [ba b^{-1}a b a^{-1}b^{-1}, b a b a^{-1}b^{-1}], \quad \varrho^* = [b^{-1}a b, b] \end{aligned}$$

über.  $\tau^*$  und  $\varrho^*$  erzeugen mithin die Untergruppe  $J^*$  der inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}^*$ . Nach J. Nielsen<sup>13)</sup> ergibt sich, daß  $\overline{\mathfrak{A}}_1/J^*$  die homogene Modulgruppe ist mit den einzigen Relationen

$$(13) \quad \begin{aligned} 1 &= s^{*4} (= [a^{-1}ba b^{-1}a b a^{-1}b^{-1}a, a^{-1}ba b a^{-1}b^{-1}a]) \\ s^{*2} &= (r^{*-1}s^*)^3, \end{aligned}$$

und da  $J^*$  eine freie invariante Untergruppe von zwei Erzeugenden in  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  sein muß, folgt nach schon früher benutzten Sätzen<sup>14)</sup>, daß die Relationen

$$(14) \quad \begin{cases} s^{*-4} \varrho^* \tau^{*-1} \varrho^{*-1} \tau^* = 1, & s^{*2} (r^{*-1}s^*)^{-3} = 1 \\ s^* \tau^* s^{*-1} = \varrho^*, & r^* \tau^* r^{*-1} = \tau^* \\ s^* \varrho^* s^{*-1} = \varrho^* \tau^{*-1} \varrho^{*-1}, & r^* \varrho^* r^{*-1} = \varrho^* \tau^{*-1} \end{cases}$$

zur Definition von  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  ausreichen. Nun verifiziert man leicht, daß in  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  die Relationen

$$(15) \quad \begin{aligned} s^2 &= (r^{-1}s)^3, \\ s \tau s^{-1} &= \varrho, \quad r \tau r^{-1} = \tau, \quad s \varrho s^{-1} = \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1}, \quad r \varrho r^{-1} = \varrho \tau^{-1} \end{aligned}$$

bestehen, und überdies der Automorphismus (7)

$$s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau$$

allein auf Grund der Relationen (15) mit allen übrigen Automorphismen vertauschbar ist, also zum Zentrum gehört. Genau wie in § 3 kann man hieraus schließen: Da  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  eine Faktorgruppe von  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  ist, deren sämtliche Relationen (14) man erhält, indem man das Element  $s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau$  des Zentrums von  $\overline{\mathfrak{A}}_1$  gleich eins setzt, kann außer (15) in  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  höchstens noch eine Relation  $(s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau)^2 = 1$  zur Definition nötig sein; wegen der Bedeutung von  $s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau$  (Gl. 7) ist das nicht der Fall. — Schließlich erhalten wir die Untergruppe  $\mathfrak{A}_1$  in der Gruppe der Abbildungsklassen, indem wir zu (15) wieder die Relation

$$(16) \quad s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau = 1$$

hinzufügen, da alle inneren Automorphismen von  $\overline{\mathfrak{A}}_1^*$  Potenzen von  $s^{-4} \varrho \tau^{-1} \varrho^{-1} \tau$  sind (§ 4). Wir erhalten also schließlich:

$\mathfrak{A}_1$  wird erzeugt von  $r, s, \varrho, \tau$  mit den Relationen (15), (16).  $\mathfrak{A}_1$  ist übrigens isomorph mit einer Untergruppe vom Index 2 in der Automorphismengruppe der freien Gruppe von zwei Erzeugenden.

Um noch  $\mathfrak{A}$ , die volle Gruppe der Abbildungsklassen, zu bestimmen, führen wir noch den Automorphismus ein:

$$\sigma = [u_2, u_3^{-1} u_1, u_3, a, b],$$

geschrieben in der Bezeichnungsweise ganz zu Beginn von § 4. Nach der Relation (1), § 4 wird, da innere Automorphismen von  $\mathfrak{F}$  gleich eins zu setzen sind, analog wie in § 1:

$$\sigma^2 = s^{-4},$$

$$(17) \quad \sigma r \sigma^{-1} = r, \quad \sigma s \sigma^{-1} = s, \quad \sigma \tau \sigma^{-1} = \tau^{-1} s^4.$$

Die Relationen (17) genügen, um festzulegen, daß  $r, s, \tau$  in  $\mathfrak{A}$  eine Untergruppe vom Index 2 erzeugen, sie sind folglich zusammen mit (15), (16) zur Definition von  $\mathfrak{A}$  ausreichend, denn da  $\sigma$  selber nicht in  $\mathfrak{A}$  liegt, liefert  $\mathfrak{A}_1$  eine Untergruppe vom genauen Index 2 in der von  $r, s, \tau, \sigma$  erzeugten Gruppe.

Zum Schluß ist noch der Nachweis zu erbringen, daß zu den Automorphismen  $r, s, \tau, \sigma$  der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}$  wirklich sie induzierende Abbildungen gehören. Für  $\sigma$  ist dies nach dem Beginn von § 2 ohne weiteres klar; für  $r, s, \tau$  kann man es folgendermaßen nachweisen: Wir betrachten die universelle Überlagerungsfläche des geschlossenen Torus, also die euklidische Ebene. Legen wir den Bezugspunkt  $P$  der Kurven der Fundamentalgruppe in den einen Randpunkt  $P_1$ , so liefert das Schnittsystem der Fundamentalgruppe in der euklidischen Ebene etwa ein Parallelogrammnetz, wobei im Innern jedes Parallelogramms ein über  $P_2$  gelegener Punkt der Überlagerungsfläche liegt, ferner der Kurve, die zu  $u_3$  gehört, unendlich viele einfache Umläufe zugehören, die etwa vom linken unteren Eckpunkt jedes Parallelogramms ausgehen und um den im Innern desselben liegenden Bildpunkt von  $P_2$  herumlaufen, und alle Netzeckpunkte über  $P_1$  liegen. (Siehe Fig. 5). Die Fig. 6 zeigen dann, daß zu  $\tau, r, s$  gewiß sie induzierende Abbildungen gehören;  $r$  und  $s$  sind nichts weiter als wohlbekannte Abbildungen des geschlossenen Torus auf sich, wobei man jetzt nur darauf zu achten hat, daß das Bild eines Fundamentalparallelogramms wieder denselben Überlagerungspunkt von  $P_2$  enthält, wie das ursprüngliche.  $\varrho, \tau$  schließlich entsprechen einem Hinwegziehen eines der kanonischen Schnitte  $a, b$  über den Punkt  $P_2$ ; auf der Überlagerungsfläche wirkt sich das so aus, daß nach der Abbildung ein

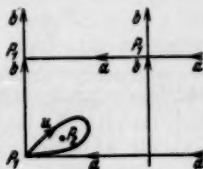
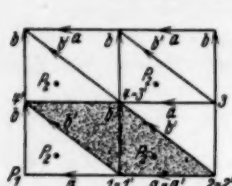


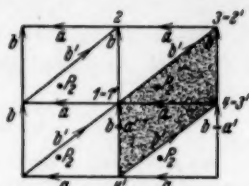
Fig. 5.

anderer Überlagerungspunkt von  $P_2$  in das Innere des Ausgangsparallelogramms fällt als vorher.  $\tau$ ,  $\varrho$  würden auf der unberandeten Fläche, ebenso wie  $\sigma$ , zur Klasse der Identität gehören. Im übrigen ist jedem doppelpunktfreien Weg, der von einem festen Überlagerungspunkt  $P_1^{(0)}$  von  $P_2$  ausgehend unter Vermeidung der Überlagerungspunkte von  $P_1$  zu einem beliebigen Überlagerungspunkt  $P_3^{(*)}$  von  $P_2$  hinführt, eine bestimmte



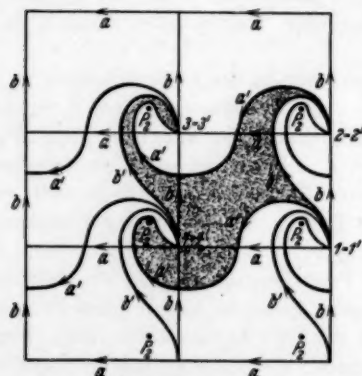
$$r-[u, a, ba]$$

Fig. 6 a.



$$s'r-[u, b, ba']$$

Fig. 6 b.



$$\tau-[a u a', a u' a u a', b a u a']$$

Fig. 6 c.

Abbildung zugeordnet, die zu einer durch  $\varrho$ ,  $\tau$  erzeugten Klasse gehört, und bei der  $P_1$  längs des eben charakterisierten Weges wandert, wenn man die Abbildung in geeigneter Weise (nämlich als Abbildung der nur von  $P_1$  berandeten Fläche) kontinuierlich entstanden denkt. Zu Wegen, die nicht unter Festhaltung ihrer Endpunkte und ohne einen Überlagerungspunkt von  $P_1$  zu überstreichen ineinander deformiert werden können, gehören verschiedene Abbildungsklassen. Alle auf der unberandeten Fläche zur Klasse der Identität gehörigen Abbildungen lassen sich so erhalten, eventuell nach Ausführung einer  $\sigma$  induzierenden Abbildung.

## § 6.

**Der  $n$ -fach punktierte Ring. Bemerkungen über berandete Flächen höheren Geschlechts.**

Die im Falle des 2-fach punktierten Ringes durchgeführten Betrachtungen lassen sich unverändert auf den allgemeinen Fall der  $n$ -fachen Punktierung übertragen. Die Fundamentalgruppe  $\mathfrak{F}_n$  wird, analog wie für  $n = 2$ , erzeugt von den  $n$  Umläufen  $u_1, u_2, \dots, u_n$  um die Randpunkte und von den Schnitten  $a, b$ . Zwischen ihnen besteht die einzige definierende Relation

$$(1) \quad u_1 u_2 \dots u_n a^{-1} b a b^{-1} = 1.$$

Die Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  der Abbildungsklassen erhält man, indem man zunächst die Gruppe  $\overline{\mathfrak{A}}_n$  derjenigen Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$  bildet, für die

$$(2) \quad u'_r = T_r u_r T_r^{-1} \quad (r, k_r = 1, \dots, n)$$

$$u'_1 u'_2 \dots u'_n a'^{-1} b' a' b'^{-1} = 1$$

ist, und dann  $\overline{\mathfrak{A}}_n / \overline{J}_n$  bildet, wobei  $\overline{J}_n$  die in  $\overline{\mathfrak{A}}_n$  enthaltene Untergruppe der inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$  ist.

In  $\overline{\mathfrak{A}}_n$  ist eine Untergruppe vom Index  $n$  enthalten, welche  $\overline{\mathfrak{B}}_n$  heiße und durch folgende Festsetzung definiert ist: Alle und nur die Automorphismen von  $\overline{\mathfrak{A}}_n$  gehören zu  $\overline{\mathfrak{B}}_n$ , für die außer (2) noch

$$(3) \quad u'_1 = T_1 u_1 T_1^{-1}$$

erfüllt, also  $k_1 = 1$  ist.

$\overline{\mathfrak{B}}_n$  besitzt nun folgende Eigenschaften:  $\overline{\mathfrak{B}}_n$  besteht aus all den Automorphismen der Gruppe  $\mathfrak{F}_n$  (aufgefaßt als freie Gruppe der Erzeugenden  $u_2, \dots, u_n, a, b$ ), für die

$$(4) \quad u'_2 \dots u'_n a'^{-1} b' a' b'^{-1} \equiv T u_2 \dots u_n a^{-1} b a b^{-1} T^{-1}$$

ist, identisch in  $u_2, \dots, u_n, a, b$ . Schließlich werde mit  $\mathfrak{B}_n$  diejenige Untergruppe von  $\overline{\mathfrak{B}}_n$  bezeichnet, für die in (4)  $T \equiv 1$  gilt. Dann läßt sich die Aufstellung der Erzeugenden und definierenden Relationen von  $\mathfrak{A}_n$  rekursiv bewerkstelligen, wenn gezeigt wird, wie die Erzeugenden und Relationen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  aus denen von  $\mathfrak{B}_n$  und die von  $\mathfrak{A}_n$  aus denen von  $\mathfrak{B}_n$  berechnet werden können. Dies geschieht durch die folgenden Sätze, die der Reihe nach ganz analog wie für  $n = 2$  abgeleitet werden können.

I. Als Erzeugende von  $\mathfrak{B}_n$  können die folgenden Automorphismen dienen<sup>18)</sup>

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_r = [u_2, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, u_{r+1}^{-1} u_r u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n, a, b] \\ \quad \quad \quad (\nu = 2, \dots, n-1), \\ \tau = [u_2, \dots, u_{n-1}, a u_n a^{-1}, a u_n^{-1} a u_n a^{-1}, b a u_n a^{-1}], \\ r = [u_2, \dots, u_n, a, b a], \\ s = [u_2, \dots, u_n, a^{-1} b^{-1} a, a]. \end{cases}$$

<sup>18)</sup> In den eckigen Klammern stehen der Reihe nach die Elemente von  $\mathfrak{F}_n$ , in die bzw.  $u_2, \dots, u_n, a, b$  bei dem betreffenden Automorphismus übergehen.

Der Beweis dieser Behauptung kann mit Hilfe der in § 4 entwickelten Methode unter Benutzung vollständiger Induktion nach  $n$ , oder aber direkt mit topologischen Methoden nach Fricke<sup>19)</sup> geführt werden.

II. Die in  $\mathfrak{B}_n$  enthaltenen inneren Automorphismen bilden eine zyklische, zum Zentrum gehörige Untergruppe  $\mathfrak{Z}_{n-1}$ , welche von dem Automorphismus

$$Z_{n-1} = [\theta_{n-1}^{-1} u_1 \theta_{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{-1} u_n \theta_{n-1}, \theta_{n-1}^{-1} a \theta_{n-1}, \theta_{n-1}^{-1} b \theta_{n-1}]$$

mit  $\theta_{n-1} \equiv u_2 \dots u_n a^{-1} b a b^{-1}$  erzeugt wird. Es ist übrigens

$$Z_{n-1} = (\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^{n-1} s^{-4} \varrho_{n-1} \tau_{n-1}^{-1} \varrho_{n-1}^{-1} \tau_{n-1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \tau_{n-1} &= \tau \sigma_{n-1}^{-1} \tau \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^{-1} \tau \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}^{-1} \tau \sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \\ &= [a u_1 a^{-1}, a u_2 a^{-1}, \dots, a u_n a^{-1}, a (u_2 \dots u_n)^{-1} a u_2 \dots u_n a^{-1}, \\ &\quad b a u_2 \dots u_n a^{-1}] \end{aligned}$$

und  $\varrho_{n-1} = s \tau_{n-1} s^{-1}$  ist.  $\mathfrak{B}_n \mathfrak{Z}_{n-1}$  ist infolgedessen diejenige Untergruppe vom Index  $n$  in  $\mathfrak{A}_n$ , für deren Elemente in (2)  $k_1 = 1$  gilt. Der Beweis hierfür ist genau wie der entsprechende Beweis in § 4 zu führen.

III. Für die in  $\mathfrak{B}_{n+1}$  enthaltene Untergruppe  $\mathfrak{B}'_{n+1}$  vom Index  $n$ , deren Elemente von denjenigen Automorphismen gebildet werden, für die  $u'_1 \equiv T_1 u_1 T_1^{-1}$  ist, gilt, daß  $\mathfrak{B}'_{n+1}/\mathfrak{Z}_n$  isomorph ist mit  $\mathfrak{B}_n$ , d. h. mit der durch Hinzunahme aller inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$  erweiterten Gruppe  $\mathfrak{B}_n$ . Dabei ist unter  $\mathfrak{B}_{n+1}$  naturgemäß diejenige Gruppe von Automorphismen der freien, von  $u_1, u_2, \dots, u_n, a, b$  erzeugten Gruppe  $\mathfrak{F}_{n+1}$  zu verstehen, welche von den Automorphismen (5) und dem weiteren

$$(6) \quad \sigma_1 = [u_1, u_2^{-1} u_1 u_2, u_3, \dots, u_n, a, b]$$

erzeugt wird, und  $\mathfrak{Z}_n$  ist dementsprechend nach dem Muster von  $\mathfrak{Z}_{n-1}$  zu bilden.

Der Beweis für III führt, explizit dargestellt, auf beschwerliche Rechnungen; er ist nach dem Muster der in §§ 3, 5 durchgeführten Rechnungen etwa auf dem folgenden Wege zu erbringen:

$\mathfrak{B}_{n+1}$  enthält eine Untergruppe  $\mathfrak{B}'_{n+1}$  vom Index  $n$ , welche aus denjenigen Automorphismen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  besteht, für die  $u'_1 \equiv T_1 u_1 T_1^{-1}$  wird. Als Erzeugende derselben lassen sich die Automorphismen (5) und

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \tau \sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \\ \sigma_1^2, \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_1 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \end{cases}$$

wählen (vgl. § 1; man beachte, daß für  $n > 2$   $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  mit  $r, s, \tau$  und  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  mit  $r, s$  vertauschbar sind, sowie die unten (nach (10)) gemachten Bemerkungen). (5) und (7) sind, wenn man (1) zur Elimination von  $u_1$  benutzt, zugleich Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$ , und zwar solche, welche durch Kombination von inneren Automorphismen mit solchen aus

<sup>19)</sup> Siehe l. c. 3), S. 299–329.



$\mathfrak{B}_n$  entstehen. Man zeigt leicht, daß man durch Kombination aus (5), (7) und den aus diesen Automorphismen zusammengesetzten Automorphismen

$$(8) \quad s\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}\tau\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}s^{-1}; Z_{n-1}$$

alle inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$  erzeugen kann, und somit in der Tat durch (5) und (7) genau die volle Gruppe  $\mathfrak{B}_n$  erzeugen kann. Da die inneren Automorphismen von  $\mathfrak{F}_n$  in jeder sie enthaltenden Automorphismengruppe von  $\mathfrak{F}_n$  eine freie invariante Untergruppe von  $n+1$  Erzeugenden bilden, ist es leicht, nach dem Muster der §§ 3, 5 ein System von zwischen (5), (7) bestehenden definierenden Relationen von  $\mathfrak{B}_n$  zu berechnen, wenn die von  $\mathfrak{B}_n$  schon bekannt sind.  $R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_k = 1$  sei etwa ein solches System. Dann ist durch direkte Rechnung zu verifizieren, daß, wenn man die Automorphismen (5) und (7) nun wieder als solche von  $\mathfrak{F}_{n+1}$  auffaßt, diese Relationen übergehen in Relationen

$$(9) \quad R_1 = Z_n^{\sigma_1}, R_2 = Z_n^{\sigma_2}, \dots, R_k = Z_n^{\sigma_k}.$$

Da sich  $Z_n$  durch die Automorphismen (5), (7) ausdrücken läßt, und  $Z_n$  zum Zentrum von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  gehört, stellt (9), zusammen mit den Relationen, die ausdrücken, daß  $Z_n$  mit allen Automorphismen (5), (7) vertauschbar ist, ein vollständiges System definierender Relationen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  dar. Von hier aus sind die Relationen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  dann in der folgenden Weise zu gewinnen: Man drücke vermöge (7) die Erzeugenden von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  durch (5) und (6) aus — das sind ja Erzeugende von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  —, und setze dies in die Relationen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  ein. Das so entstehende Relationensystem zwischen den Erzeugenden (5), (6) heiße  $\Sigma$ . Zusammen mit den Relationen

$$(10) \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_1 \not\approx \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, r, s, \tau,$$

die für  $n > 2$  jedenfalls bestehen, liefert es ein vollständiges Relationensystem für  $\mathfrak{B}_{n+1}$ , denn  $\Sigma$  und (10) ermöglicht, jedes Element von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  auf eine der Formen

$$B'_{n+1}, B'_{n+1}\sigma_1, B'_{n+1}\sigma_1\sigma_2, \dots, B'_{n+1}\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$$

zu bringen, wobei  $B'_{n+1}$  ein Element aus  $\mathfrak{B}'_{n+1}$  ist. Zunächst ist dies nämlich nach dem in §§ 1, 3 über die Zöpfgruppen Gesagten ohne weiteres möglich für alle nur aus  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  zusammengesetzten Elemente aus  $\mathfrak{B}_{n+1}$ , da  $\Sigma$  und (10) alle Relationen, die zwischen diesen Erzeugenden der Zöpfgruppe bestehen, zur Folge haben müssen. Da ferner

$$(11) \quad \sigma_1 \dots \sigma_i \tau \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \dots \sigma_i s \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \dots \sigma_i \tau \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$$

für  $i = 1, 2, \dots, n-1$  stets auf Grund von (10) und  $\Sigma$  (unter Berücksichtigung der Gestalt (7) gewisser Erzeugenden von  $\mathfrak{B}'_{n+1}$ ) zu  $\mathfrak{B}'_{n+1}$  gehören, folgt diese Tatsache allgemein. In der Tat müssen aus  $\Sigma$  notwendig die Relationen  $\sigma_i \not\approx r, s$  für  $i = 2, \dots, n-1$  und  $\sigma_i \not\approx \tau$  für  $i = 2, \dots, n-2$  folgen, da ja alle zwischen  $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, r, s, \tau$  be-

stehenden Relationen aus  $\Sigma$  folgen müssen; zusammen mit (10) folgt also, daß die Ausdrücke (11) entweder gleich  $r$ ,  $s$ ,  $\tau$  sind, oder für  $i = n - 1$  zu den unter (7) aufgeführten Erzeugenden von  $\mathfrak{B}'_{n+1}$  gehören. Daraus folgt leicht die oben ausgesprochene Behauptung.

Der Beweis von III zeigt ohne weiteres, wie man rekursiv Erzeugende und definierende Relationen von  $\mathfrak{B}_n$  finden kann, wenn dies für  $n = 2$  geschehen ist. Der Schluß dieses Beweises und die Bemerkung am Ende von II ermöglichen zugleich leicht eine Aufstellung von definierenden Relationen für  $\mathfrak{A}_n$  [als deren Erzeugende man (5) und (6) wählen kann]. Übrigens ist auch leicht einzusehen, daß man  $\mathfrak{A}_n$  aus  $\mathfrak{B}_{n+1}$  erhält, indem man zu den Relationen von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  zunächst  $Z_n = 1$  hinzufügt, und in der so entstehenden,  $\mathfrak{B}_n$  enthaltenden Faktorgruppe von  $\mathfrak{B}_{n+1}$  ein System von Erzeugenden der in  $\mathfrak{B}_n$  enthaltenen inneren Automorphismen gleich eins setzt. Ein solches kann durch Kombination von  $n + 1$  Automorphismen (7), (8) mit geeigneten Elementen von  $\mathfrak{B}_n$  leicht erhalten werden. Eine geometrische Interpretation der gruppentheoretischen Ergebnisse kann durch Kombination des in den Paragraphen 2, 5 Gesagten gegeben werden.

Das oben entwickelte Verfahren läßt sich auch auf die Behandlung berandeter zweiseitiger Flächen mit einem Geschlecht  $p \geq 2$  anwenden. Nach Fricke<sup>19)</sup> kennt man nämlich auch hier die Erzeugenden, die zu den Erzeugenden der Automorphismen der Fundamentalgruppe der unberandeten Fläche hinzutreten müssen, damit man ein System von Erzeugenden für die Gruppe der Abbildungsklassen der berandeten Fläche erhält. Da man außerdem gewisse Automorphismen der Fundamentalgruppen unberandeter Flächen kennt, welche ähnliche Eigenschaften besitzen wie im vorstehenden  $r$  und  $s$ ; so lassen sich alle in II, III aufgestellten Behauptungen ohne weiteres übertragen, bis auf die Behauptung über die Identität von  $3_n$  in II und III. Hierzu ist mindestens noch die Kenntnis eines Systems von Erzeugenden für die Automorphismen der Fundamentalgruppe der unberandeten Fläche notwendig, und ein solches liegt bisher nur für  $p = 2$  vor<sup>20)</sup>. In diesem Fall wird es möglich sein, I, II, III vollständig zu übertragen, und damit den Zusammenhang zwischen der Gruppe der Abbildungsklassen der von  $n$  Punkten berandeten Fläche mit derjenigen der von  $n - 1$  Punkten berandeten Fläche festzulegen. Dies soll bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden.

<sup>20)</sup> Vgl. Dehn, Baer l. c. <sup>4)</sup>. Ferner L. Goeritz, *Abh. aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 9 (1933), S. 223.

# Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen.

Von

Alexander Kurosch in Moskau.

## Einleitung.

Im Gegensatz zu der Theorie der endlichen Gruppen, die sich als ein gut bearbeiteter und in vielen seiner Teile schon vollendeter Zweig der Mathematik darstellt, bilden die Arbeiten über unendliche Gruppen, genauer über Gruppen ohne Voraussetzung der endlichen Anzahl von Elementen, noch keine entsprechende „Theorie“. Die Untersuchungen über unendliche Gruppen gehören gewöhnlich zu einer von zwei Richtungen, die miteinander keine Berührungspunkte haben. Man betrachtet erstens einige „fast endliche“ Gruppen, d. h. Gruppen, in denen die Voraussetzung der endlichen Anzahl von Elementen durch eine andere, nicht so beschränkende Endlichkeitsvoraussetzung ersetzt worden ist; z. B. bei Abelschen Gruppen Voraussetzung einer endlichen Anzahl von Erzeugenden oder endlicher Ordnungen aller Elemente, bei nichtkommutativen Gruppen Vorhandensein einer Kompositionsreihe oder Endlichkeit der Untergruppenketten. Diese Richtung beschäftigt sich meistens mit direkten Summen- und Produktzerlegungen.

Die zweite Richtung, deren Bedeutung für die Topologie der Mannigfaltigkeiten und für die Theorie der automorphen Funktionen bekannt ist, beschäftigt sich mit Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind. Die Untersuchungen solcher Gruppen sind sehr schwierig, und hier betrachtete man bis jetzt entweder einfachste Klassen von Gruppen, z. B. Gruppen mit einer einzigen definierenden Relation, oder sogar einzelne Beispiele. Diese Richtung ist also noch sehr weit von jener Allgemeinheit entfernt, die für die heutige Algebra bezeichnend ist.

Es entsteht die Aufgabe, diesen Zweig der Gruppentheorie auf neuen Grundlagen, *ohne den Begriff der Erzeugenden*, aufzubauen. Diese Richtung soll der ersten entgegengesetzt sein und sozusagen „sehr unendliche“ Gruppen untersuchen. Die Lösung dieser Aufgabe liegt noch weit im Felde; der erste Schritt ist aber schon getan, und das verdanken wir O. Schreier.

Schreier hat schon die lange bekannten *freien Gruppen*, d. h. Gruppen, die eine Menge von Erzeugenden *ohne* Relationen besitzen, betrachtet und auf eine sehr bemerkenswerte Weise bewiesen, daß jede Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei ist<sup>1)</sup>. In der Definition der freien Gruppe spielen noch die Erzeugenden eine Rolle, aber sie werden gänzlich eliminiert in dem von Schreier eingeführten Begriffe des *freien Produktes von Gruppen*; die Definition dieses Begriffes wird in § 1 der vorliegenden Arbeit gegeben. Er kann freilich auch mit Hilfe von Erzeugenden und definierenden Relationen definiert werden, und zwar so:

Eine Gruppe  $G$  ist in ein freies Produkt zerlegbar, wenn sie eine Menge von Erzeugenden besitzt, die so in paarweise elementenfremde Teilmengen zerlegt werden kann, daß jede definierende Relation nur zu derselben Teilmenge gehörende Erzeugende verbindet.

In einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> hat der Verfasser die Probleme über Untergruppen freier Produkte (das *Untergruppenproblem*) und über Beziehungen zwischen verschiedenen Zerlegungen einer Gruppe in ein freies Produkt von unzerlegbaren Faktoren (das *Isomorphieproblem*) gestellt und sie in einigen Fällen unter sehr beschränkenden Voraussetzungen gelöst. Das erste Problem ist nämlich nur für freie Produkte von beliebigen zyklischen Gruppen gelöst worden, und diese Lösung hatte sich auf Schreiersche Sätze gestützt. Das zweite Problem war für freie Produkte von Abelschen Gruppen und von Gruppen ohne Elemente unendlicher Ordnung gelöst worden.

In der vorliegenden Arbeit wird das *Untergruppenproblem für jedes freie Produkt, ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Struktur der Faktoren dieses Produktes, gelöst werden*. Die Schreierschen Untersuchungen werden dabei nicht benutzt, der Schreiersche Satz über Untergruppen freier Gruppen wird also von neuem bewiesen werden. Von der unter <sup>2)</sup> zitierten Arbeit sind diese Betrachtungen auch unabhängig. Mit Hilfe unseres Untergruppensatzes erhält auch das *Isomorphieproblem eine allgemeine Lösung* (§ 5).

Die Theorie der freien Produkte fordert noch viele weitere Betrachtungen. Außer vielen Problemen, die nicht sehr schwierig scheinen —

<sup>1)</sup> O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamb. Abhandl. 5 (1927), S. 161—183. Eine Vereinfachung bei W. Hurewicz. Zu einer Arbeit von O. Schreier, Hamb. Abhandl. 8 (1930), S. 307—314. Schon früher hatte J. Nielsen diesen Satz bei Voraussetzung einer endlichen Anzahl der Erzeugenden bewiesen. Später war die Theorie der freien Gruppen von F. Levi, Math. Zeitschr. 32, 37 fortgeführt worden.

<sup>2)</sup> A. Kurosch, Über freie Produkte von Gruppen, Math. Annalen 108 (1933), S. 26—36.

z. B. die Bestimmung der Automorphismengruppe eines freien Produktes, wenn die Automorphismengruppen der Faktoren als bekannt vorausgesetzt werden — entsteht noch ein sehr schweres und sehr wichtiges *Zerlegungsproblem*:

Ist jede in ein freies Produkt zerlegbare Gruppe als ein freies Produkt von *unzerlegbaren* Faktoren darstellbar? Ist besonders jede Gruppe, deren unzerlegbare Untergruppen alle unendliche zyklische Gruppen sind, eine freie Gruppe?

Weitere Untersuchungen werden sich wahrscheinlich einerseits auf freie Produkte mit einer vereinigten Untergruppe<sup>2)</sup> beziehen, andererseits sich mit unzerlegbaren Gruppen, die zerlegbare Untergruppen besitzen, beschäftigen.

## § 1.

## Definitionen.

Es sei eine Menge von Gruppen  $H_\alpha$  ( $\alpha$  durchläuft eine beliebige Indexmenge) gegeben. Unter dem *freien Produkte* dieser Gruppen, *Komponenten* genannt, versteht man eine Gruppe  $G$ ,

$$G = \prod_{\alpha} H_{\alpha}.$$

die aus allen formalen Produkten  $h_1 h_2 \dots h_n$  besteht, wo jeder Faktor  $h_i$  ein von 1 verschiedenes Element aus einer Komponente  $H_{\alpha_i}$  ist und wo je zwei benachbarte Faktoren  $h_i, h_{i+1}$  zu verschiedenen Komponenten gehören.

Ist  $g = h_1 h_2 \dots h_n$ , so nennen wir  $h_1 h_2 \dots h_n$  die *unkürzbare Darstellung* für das Element  $g$ , die Anzahl der Faktoren  $n$  die *Länge* von  $g$  (in Zeichen:  $n = l(g)$ ). Jedes Element von  $G$  hat eine einzige unkürzbare Darstellung durch Elemente von Komponenten  $H_\alpha$ .

Um die unkürzbare Darstellung für das Produkt von zwei Elementen  $g = h_1 h_2 \dots h_n$ ,  $g' = h'_1 h'_2 \dots h'_m$  in gegebener Reihenfolge zu bilden, schreiben wir die unkürzbaren Darstellungen dieser Elemente nacheinander,

$$gg' = h_1 h_2 \dots h_n h'_1 h'_2 \dots h'_m.$$

Ist  $h'_1 = h_n^{-1}$ ,  $h'_2 = h_{n-1}^{-1}$ , ...,  $h'_k = h_{n-k+1}^{-1}$ , aber  $h'_{k+1} \neq h_{n-k}^{-1}$  ( $0 \leq k \leq \min(n, m)$ ), so werden  $k$  *Kürzungen* der Reihe nach vollzogen. Gehören  $h_{n-k}$  und  $h'_{k+1}$  zu verschiedenen Komponenten, so ist schon die unkürzbare Darstellung für das Produkt  $gg'$  erhalten; im entgegengesetzten Falle bildet das Produkt  $h_{n-k} h'_{k+1}$  ein von 1 verschiedenes Element aus einer Komponente, also soll eine *Vereinigung* ausgeführt

<sup>2)</sup> Vgl. Schreier, l. c. <sup>1)</sup>.

werden. Es ist leicht zu zeigen, daß diese Definition der Gruppenmultiplikation assoziativ ist<sup>4)</sup>).

Das Einselement 1 der Gruppe  $G$  ist ein Element, dessen unkürzbare Darstellung leer ist, d. h. keine Faktoren  $h_i$  enthält;  $l(1) = 0$ . Ist  $g = h_1 h_2 \dots h_n$ , so wird  $g^{-1} = h_n^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1}$  sein.

Hat das Element  $g$  von  $G$  eine gerade Länge,  $l(g) = 2k$ , also

$$g = h_{-k} \dots h_{-1} h_1 \dots h_k,$$

so heißt  $h_{-k} \dots h_{-1}$  die *erste Hälfte* von  $g$ ,  $h_1 \dots h_k$  die *zweite Hälfte*. Hat das Element  $g$  eine ungerade Länge,  $l(g) = 2k + 1$ , also

$$g = h_{-k} \dots h_{-1} h_0 h_1 \dots h_k,$$

so heißt  $h_{-k} \dots h_{-1}$  die *erste Hälfte*,  $h_1 \dots h_k$  die *zweite Hälfte*,  $h_0$  der *Zentralfaktor* von  $g$ . Es ist klar, daß die erste Hälfte von  $g^{-1}$  zu der zweiten Hälfte von  $g$  und die zweite Hälfte von  $g^{-1}$  zu der ersten Hälfte von  $g$  invers sind.

Ein Element  $g = h_{-k} \dots h_{-1} h_0 h_1 \dots h_k$  ungerader Länge soll eine *Transformation* heißen, wenn seine erste und zweite Hälfte zueinander invers sind,  $h_{-i} = h_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), d. h. wenn  $g$  zu seinem Zentralfaktor  $h_0$  konjugiert ist. Ist  $g$  eine Transformation, so wird

$$g^n = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} h_0^n h_1 \dots h_k$$

sein und daher sind  $g$  und  $h_0$  von gleicher Ordnung. Ist aber  $g$  keine Transformation, so ist die von  $g$  erzeugte zyklische Untergruppe gewiß unendlich.

Aus der Definition des freien Produktes folgt sofort:

Ist  $G = \prod_a H_a$ , so gibt es in  $G$  keine nichtidentischen Relationen, welche Elemente von verschiedenen Komponenten  $H_a$  verbinden.

Ist  $G = \prod_a H_a$  und ist jede Komponente  $H_a$  selbst ein freies Produkt von Komponenten  $H_{a\beta}$ ,  $H_a = \prod_{\beta} H_{a\beta}$ , so gilt

$$G = \prod_{a, \beta} H_{a\beta}.$$

Eine Gruppe  $G$  heißt *zerlegbar*, wenn sie als ein freies Produkt von echten Untergruppen dargestellt werden kann, anderenfalls *unzerlegbar*.

In der vorliegenden Arbeit wird man folgende Bezeichnungen brauchen:  $g \in G$ , wenn  $g$  ein Element der Gruppe  $G$  ist;  $F \subset G$ , wenn  $F$  eine Untergruppe von  $G$  ist;  $F = F_1 \cap F_2$ , wenn die Untergruppe  $F$  der Durchschnitt der Untergruppen  $F_1$  und  $F_2$  ist.

<sup>4)</sup> Vgl. z. B. Schreier, l. c. <sup>1)</sup>.

## § 2.

**Untergruppensatz.** Die Konstruktion der Untergruppen  $\Phi_r$  und  $K_r$ .

Ist eine Gruppe  $G$  das freie Produkt ihrer Untergruppen  $H_\alpha$ ,  $G = \prod_\alpha H_\alpha$ , so enthält  $G$  gewiß, außer Untergruppen von Komponenten  $H_\alpha$  und ihren konjugierten Untergruppen, auch unendliche zyklische Untergruppen. Wir wollen zeigen, daß diese Untergruppen und ihre freien Produkte alle Untergruppen von  $G$  erschöpfen, und zwar:

**Untergruppensatz.** Jede Untergruppe  $F$  von  $G$  kann selbst in ein freies Produkt zerlegt werden,

$$F = \prod_\beta F_\beta^{(5)},$$

wo jeder Faktor  $F_\beta$  entweder eine unendliche zyklische Gruppe oder mit einer Untergruppe von einer Komponente  $H_\alpha$  konjugiert ist.

Es sei  $F$  eine beliebige Untergruppe von  $G$ . Wir definieren die Untergruppen  $\Phi_\mu$  von  $F$  ( $\mu$  eine Ordnungszahl) folgendermaßen:

$$\Phi_0 = 1.$$

Sind Untergruppen  $\Phi_\mu$  von  $F$  für alle  $\mu < \nu$  schon gewählt und ist  $K_\nu$  die von diesen  $\Phi_\mu$  erzeugte Untergruppe von  $F$ , d. h. die minimale Untergruppe von  $F$ , die alle  $\Phi_\mu$  enthält, so betrachten wir solche zu  $K_\nu$  nicht gehörende Elemente von  $F$ , die eine minimale Länge haben; diese Länge bezeichnen wir mit  $l_\nu$ . Wenn es Transformationen unter diesen Elementen gibt, so sei  $g_\nu^{-1} h g_\nu$  (mit  $h \in H_{\alpha_\nu}$ ) eine solche. Wir bezeichnen dann mit  $H_\nu^*$  den Durchschnitt der Untergruppen  $F$  und  $g_\nu^{-1} H_{\alpha_\nu} g_\nu$ ,

$$H_\nu^* = F \cap g_\nu^{-1} H_{\alpha_\nu} g_\nu.$$

Diese Untergruppe ist zu einer Untergruppe der Komponente  $H_{\alpha_\nu}$  konjugiert<sup>5)</sup>. Gibt es aber in der Menge  $F - K_\nu$  keine Transformationen von der Länge  $l_\nu$  (z. B. bei geradem  $l_\nu$ ), so setzen wir  $H_\nu^* = 1$ .

Wenn es in  $F$ , aber außerhalb der von  $K_\nu$  und  $H_\nu^*$  erzeugten Untergruppe, Elemente der Länge  $l_\nu$  gibt, deren zweite Hälfte  $g_\nu$  ist und deren Zentralfaktoren zur Komponente  $H_{\alpha_\nu}$  gehören, so bezeichnen wir mit  $f_{\nu,1}$  eins von diesen Elementen. Wenn  $H_\nu^* = 1$  ist, so ist  $f_{\nu,1}$  ein willkürlich gewähltes Element der Länge  $l_\nu$  aus der Menge  $F - K_\nu$ ; seine zweite Hälfte bezeichnen wir mit  $g_\nu$ , die Komponente, in der sein Zentralfaktor (bei ungeradem  $l_\nu$ ) aufgeht, mit  $H_{\alpha_\nu}$ .

<sup>5)</sup> Dieses Produkt kann eventuell nur aus einem Faktor bestehen.

<sup>6)</sup> Wir behaupten noch nicht, daß der Durchschnitt der Untergruppen  $K_\nu$  und  $H_\nu^*$  nur aus einem einzigen Einselement besteht. Das wird erst in § 4 bewiesen werden.



Es seien die Elemente  $f_{\delta}$  für jede Ordnungszahl  $\delta < \sigma$  schon ausgewählt. Wir wählen dann ein Element von  $F$  der Länge  $l$ , das außerhalb der von  $K$ ,  $H^*$  und allen  $f_{\delta}$  erzeugten Untergruppe liegt, dessen zweite Hälfte  $g$ , ist und dessen Zentralfaktor zur Komponente  $H_{\sigma}$  gehört; dieses Element bezeichnen wir mit  $f_{\sigma}$ . Dieser Auswahlprozeß wird sein Ende bei einer Ordnungszahl  $\sigma$ , erreichen. Mit  $\Phi$ , bezeichnen wir jetzt die von  $H^*$  und allen  $f_{\delta}$  ( $\delta < \sigma$ ) erzeugte Untergruppe von  $F$ . Außer der von  $K$ , und  $\Phi$ , erzeugten Untergruppe gibt es in  $F$  keine Elemente mehr von der Länge  $l$ , mit der zweiten Hälfte  $g$ , und mit dem Zentralfaktor aus der Komponente  $H_{\sigma}$ .

Für eine Ordnungszahl  $\kappa$  wird die Gleichheit

$$K_{\kappa} = F$$

erreicht werden; dabei werden die Untergruppen  $\Phi$ , für alle  $\nu < \kappa$  aufgebaut werden.

Unser Zweck ist, zu zeigen, daß die Untergruppe  $F$  das freie Produkt der Untergruppen  $\Phi_{\nu}$ , und jedes  $\Phi_{\nu}$  das freie Produkt von  $H^*$  und zyklischen Untergruppen  $\{f_{\delta}\}$  ist.

Unter den Erzeugenden der Untergruppe  $\Phi_{\mu}$  werden wir die Elemente  $f_{\mu\delta}$  ( $\delta < \sigma_{\mu}$ ), ihre Inversen  $f_{\mu\delta}^{-1}$  und alle von 1 verschiedenen Elemente der Untergruppe  $H_{\mu}^*$  verstehen. Die Erzeugenden aller Untergruppen  $\Phi_{\mu}$  ( $\mu < \nu$ ) sind Erzeugende für  $K_{\nu}$ .

Es sei  $U$  entweder eine von den Untergruppen  $\Phi_{\mu}$  oder eine von den Untergruppen  $K_{\nu}$ . Ihre Erzeugenden sollen durch den Buchstaben  $a$  mit unteren Indizes bezeichnet werden.

Das Produkt  $a_1 a_2 \dots a_k$  heißt ein Wort in  $U$ , wenn keine zwei benachbarten Faktoren  $a_i, a_{i+1}$  zueinander invers sind oder zu derselben Untergruppe  $H_{\mu}^*$  gehören. Das Wort  $a_1 a_2 \dots a_k$  heißt Primwort, wenn die Länge seiner unkürzbaren Darstellung gleich der maximalen Länge seiner Faktoren  $a_i$  ist,

$$l(a_1 a_2 \dots a_k) = \max l(a_i)^7).$$

Primworte in  $U$  sollen durch den Buchstaben  $a$  mit oberen Indizes bezeichnet werden. Unter dem Zentralfaktor eines Primwortes  $a'$  und seinen ersten und zweiten Hälften werden wir den Zentralfaktor usw. seiner unkürzbaren Darstellung verstehen.

Die Kürzungen in dem Produkte  $a' a''$  zweier Primworte  $a', a''$  von  $U$  können mehr oder weniger weit gehen. Wir werden daher drei Arten der Nachbarschaft zwischen  $a'$  und  $a''$  (in dieser Reihenfolge) unterscheiden:

<sup>7)</sup> Ist  $U = \Phi_{\mu}$ , so haben natürlich alle Erzeugenden  $a_i$  dieselbe Länge.

Nachbarschaft erster Art, wenn  $l(a'a'') > \max(l(a'), l(a''))$  ist,

Nachbarschaft zweiter Art, wenn  $l(a'a'') = \max(l(a'), l(a''))$  ist,

Nachbarschaft dritter Art, wenn  $l(a'a'') < \max(l(a'), l(a''))$  ist.

Ist z. B.  $l(a') \leq l(a'')$ , so drückt die Nachbarschaft zweiter Art folgendes aus: Bei geradem  $l(a')$  vernichten Kürzungen die ganze zweite Hälfte von  $a'$ , aber Kürzungen und Vereinigungen lassen die erste Hälfte von  $a'$  invariant; bei ungeradem  $l(a')$  wird der Zentralfaktor von  $a'$  sich mit einem Faktor von  $a''$  vereinigen. Dementsprechend wird es bei Nachbarschaften erster und dritter Art sein.

### § 3.

#### Die Struktur der Untergruppen $\Phi$ .

Die Konstruktion der Untergruppen  $\Phi$ , und  $K$ , führt uns zu folgenden Hilfssätzen, von denen der zweite erst im § 5 benutzt wird.

Hilfssatz 1. *Je zwei Elemente  $f_{\sigma_1}$  und  $f_{\sigma_2}$  ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ) haben verschiedene erste Hälften.*

Dies ist klar bei gerader Länge  $l$ , da die zweiten Hälften dieser beiden Elemente gleich  $g$ , sind; wenn  $f_{\sigma_1}$  und  $f_{\sigma_2}$  zusammenfallende erste Hälften hätten, so würde  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma_2}$  sein.

Es sei  $l$ , ungerade. Haben  $f_{\sigma_1}$  und  $f_{\sigma_2}$  gleiche erste Hälften, so werden die Kürzungen in dem Produkte

$$f = f_{\sigma_1}^{-1} f_{\sigma_2}$$

die Zentralfaktoren, die zur nämlichen Komponente  $H_\sigma$ , gehören, erreichen. Da die erste Hälfte von  $f_{\sigma_1}^{-1}$  gleich  $g^{-1}$  ist, so wäre bei der Kürzung der Zentralfaktoren  $f = 1$  und mithin  $f_{\sigma_1} = f_{\sigma_2}$ . Wenn aber die Zentralfaktoren nur vereinigt werden, so wird  $f$  eine Transformation, also ein Element der Untergruppe  $H_\sigma^*$ . Das Element  $f_{\sigma_2}$  wird daher in der von  $H_\sigma^*$  und  $f_{\sigma_1}$  erzeugten Untergruppe liegen, entgegen der Konstruktion der Untergruppe  $\Phi$ .

Hilfssatz 2. *Jedes solche Element  $f$  von  $F$ , dessen erste Hälfte der ersten Hälfte eines Elementes  $f_{\mu\sigma}$  gleich ist und dessen Zentralfaktor (bei ungeradem  $l_\mu$ ) zur Komponente  $H_{\mu\sigma}$  gehört, ist selbst in der Untergruppe  $K_{\mu+1}$  (und daher in jeder  $K$ , bei  $\nu > \mu$ ) enthalten.*

In dem Produkte  $f^{-1}f_{\mu\sigma}$  erreichen die Kürzungen die Zentralfaktoren, also muß  $l(f^{-1}f_{\mu\sigma}) \leq l_\mu$  sein. Ist

$$l(f^{-1}f_{\mu\sigma}) < l_\mu,$$

so wird  $f^{-1}f_{\mu\sigma} \in K_\mu$ , da  $l_\mu$  die minimale Länge der außerhalb  $K_\mu$  liegenden Elemente ist; daher wird  $f^{-1}f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$ , und da  $f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$ , so folgt  $f \in K_{\mu+1}$ . Ist aber

$$l(f^{-1}f_{\mu\sigma}) = l_\mu,$$

so wird die zweite Hälfte des Elementes  $f^{-1}f_{\mu\sigma}$  gleich  $g_\mu$  sein und der Zentralfaktor dieses Elementes zur Komponente  $H_{\mu\mu}$  gehören; daraus folgt  $f^{-1}f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$  und dann wieder  $f \in K_{\mu+1}$ . Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir werden jetzt eine beliebige Untergruppe  $\Phi$ , betrachten; ihre Erzeugenden wollen wir nun mit  $b_i$ , ihre Primworte mit  $b^{(i)}$  bezeichnen.

Jedes aus einem einzigen Faktor bestehende Wort  $b_1$  ist ein Primwort. Ein Wort  $b_1 b_2$ , wo die zweite Hälfte von  $b_1$  gleich  $g_\mu$ , die erste Hälfte von  $b_2$  gleich  $g_\mu^{-1}$  ist, ist auch ein Primwort; in der Tat, bei  $l(b_1 b_2) < l_\mu$  wird das Element  $b_1 b_2$  in der Untergruppe  $K_\mu$  aufgehen, also muß eines der Elemente  $b_1, b_2$  zu der von  $K_\mu$  und dem zweiten Elemente erzeugten Untergruppe gehören, was unmöglich ist. Endlich ist ein Wort  $b_1 b_2 b_3$ , wo  $b_2 \in H_\mu^*$ ,  $b_1$  ein Element  $f_{\nu\mu_1}$ ,  $b_3$  ein  $f_{\nu_2}^{-1}$  ist, auch ein Primwort (sowohl bei  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  als auch bei  $\sigma_1 = \sigma_2$ ).

Es gibt in  $\Phi$ , keine anderen Primworte. Diese Behauptung folgt nämlich aus dem folgenden Satz, der die Struktur der Untergruppe  $\Phi$ , völlig charakterisiert:

Ist  $f = b_1 b_2 \dots b_n$  ein beliebiges Wort von  $\Phi$ , so kann man die Faktoren dieses Wortes so vereinigen,

$$f = (b_1 \dots b_{i_1}) (b_{i_1+1} \dots b_{i_2}) \dots (b_{i_{k-1}+1} \dots b_n),$$

daß jedes Wort  $b_{i_{k-1}+1} \dots b_{i_k}$  ein Primwort  $b^{(s)}$  von obenerwähnter Art sein wird, also

$$f = b' b'' \dots b^{(k)}$$

gilt, und zwischen je zwei benachbarten Primworten  $b^{(s)}, b^{(s+1)}$  Nachbarschaft erster Art vorhanden ist.

Der Satz ist richtig bei  $n = 1$ . Ist er schon für  $n - 1$  bewiesen, so gilt

$$b_1 b_2 \dots b_{n-1} = b' b'' \dots b^{(s)};$$

die zweite Hälfte von  $b^{(s)}$  ist dieselbe, wie die von  $b_{n-1}$ . Ist diese Hälfte gleich  $g_\mu$ , besteht also  $b^{(s)}$  aus einem oder zwei Faktoren, und hat  $b_n$  die erste Hälfte  $g_\mu^{-1}$ , so bildet das Produkt  $b^{(s)} b_n$  ein Primwort. In allen anderen Fällen wird nach Hilfssatz 1 zwischen  $b^{(s)}$  und  $b_n$  Nachbarschaft erster Art sein, also bildet  $b_n$  allein ein neues Primwort  $b^{(s+1)}$ .

Aus diesem Satze folgt, daß aus jedem Worte von  $\Phi$ , nach Ausführung aller Kürzungen gewiß eine vom Einselement verschiedene unkürzbare Darstellung bleibt. Hieraus erhalten wir sogleich:

Die Untergruppe  $\Phi$ , ist das freie Produkt der Untergruppe  $H^*$  und der von den Elementen  $f_{\sigma}$  erzeugten unendlichen zyklischen Untergruppen.

#### § 4.

##### Die Struktur der Untergruppen $K_r$ .

Wir wenden uns nun zur Betrachtung einer Untergruppe  $K_r$ ; ihre Erzeugenden bezeichnen wir mit  $a_i$ , ihre Primworte mit  $a^{(j)}$ . Wir nehmen an, daß in der Untergruppe  $K_r$  folgende Induktionsvoraussetzung (A) erfüllt ist, deren Richtigkeit für  $K_1 = 1$  trivial ist und für  $K_2 = \Phi_1$  schon im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden ist:

(A) Ist  $a_1 a_2 \dots a_n$  ein beliebiges Wort von  $K_r$ , so kann man die Faktoren dieses Wortes mindestens auf eine Weise so vereinigen,

$$a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 \dots a_{i_1}) (a_{i_1+1} \dots a_{i_2}) \dots (a_{i_{k-1}+1} \dots a_n),$$

daß jedes Wort  $a_{i_{k-1}+1} \dots a_{i_k}$  ein Primwort  $a^{(k)}$  wird, also

$$a_1 a_2 \dots a_n = a' a'' \dots a^{(k)}$$

gilt, und zwischen je zwei benachbarten Primworten  $a^{(k)}$ ,  $a^{(k+1)}$  Nachbarschaft erster Art vorhanden ist.

Aus dieser Voraussetzung folgt sogleich

Hilfssatz 3. Die Länge jedes Wortes  $a_1 a_2 \dots a_n$ , das kein Primwort ist, ist größer als die Länge jedes seiner Faktoren  $a_i$ ,

$$l(a_1 a_2 \dots a_n) > \max l(a_i).$$

Kein Wort in der Untergruppe  $K_r$  kann daher dem Einselement gleich sein; denn sonst erhielte man eine nichtidentische Relation in  $G$ . Daraus folgt unmittelbar:

Die Untergruppe  $K_r$  ist das freie Produkt aller vom Einselement verschiedenen Untergruppen  $H_{\mu}^*$  ( $\mu < r$ ) und aller von den Elementen  $f_{\sigma}$  ( $\mu < r$ ,  $\sigma < \sigma_{\mu}$ ) erzeugten unendlichen zyklischen Untergruppen.

Um die Voraussetzung (A) für die Untergruppe  $K_{r+1}$  zu beweisen, müssen wir zunächst zeigen, daß der Durchschnitt der Untergruppen  $K_r$  und  $H^*$  nur das Einselement enthält. Zu diesem Zwecke werden wir folgende Hilfssätze beweisen, in denen die Rede von Worten der Untergruppe  $K_r$  sein wird.

Hilfssatz 4. Ist das Wort  $a_1 a_2 \dots a_s$  ein Primwort, so ist auch jeder seiner Abschnitte  $a_1 a_2 \dots a_s$ ,  $s \leq k$  (und jeder Abschnitt  $a_1 \dots a_s$ ,  $t \geq 1$ ) ein Primwort.

Es sei der Abschnitt  $a_1 \dots a_s$ ,  $s < k$ , kein Primwort, aber  $a_1 \dots a_{s+1}$  Primwort. Nach (A) gilt

$$a_1 \dots a_s = a' \dots a^{(r)}, \quad r > 1,$$

also, nach Hilfssatz 3,

$$l(a_1 \dots a_s) > \max l(a^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Gäbe es im Worte

$$a_1 \dots a_s a_{s+1} = a' \dots a^{(r)} a_{s+1}$$

zwischen den Primworten  $a^{(j)}$ ,  $a_{s+1}$  eine Nachbarschaft erster oder zweiter Art, so wäre die Länge des Wortes  $a_1 \dots a_s a_{s+1}$  größer als die Länge jedes seiner Faktoren, was für ein Primwort unmöglich ist. Gäbe es aber zwischen  $a^{(j)}$  und  $a_{s+1}$  eine Nachbarschaft dritter Art, so würde das Produkt  $a^{(j)} a_{s+1}$ , das ein Wort ist, eine kleinere Länge als einer von seinen Faktoren haben, entgegen dem Hilfssatze 3.

**Hilfssatz 5.** *Es sei  $a_1 \dots a_k$  ein Primwort. In seiner unkürzbaren Darstellung bleiben die erste Hälfte von  $a_1$  und die zweite Hälfte von  $a_k$  invariant, und ihre Zentralfaktoren (wenn sie vorhanden sind) können nur durch andere vom Einselement verschiedene Elemente aus denselben Komponenten ersetzt werden.*

Dies ist klar bei  $k = 1$ . Ist diese Behauptung schon für das Wort  $a_1 \dots a_{k-1}$ , das, nach Hilfssatz 4, ein Primwort ist, bewiesen, so folgt ihre Richtigkeit für  $a_1 \dots a_{k-1} a_k$  aus der Bemerkung, daß zwischen den Primworten  $a_1 \dots a_{k-1}$  und  $a_k$  gewiß Nachbarschaft zweiter Art vorhanden sein muß.

**Hilfssatz 6.** *Jedes Wort  $f$  von  $K$ , dessen unkürzbare Darstellung eine Transformation ist, hat die Gestalt*

$$f = a_n^{-1} \dots a_1^{-1} a_0 a_1 \dots a_n;$$

hier ist  $a_0$  eine Transformation, also gehört es zu einer Untergruppe  $H_\mu^*$  ( $\mu < \nu$ ).

Es sei  $f = a_1 a_2 \dots a_k$ . Wäre  $a_1 = a_k^{-1}$ , so könnten wir die Transformation

$$a_1^{-1} / a_1 = a_2 \dots a_{k-1}$$

betrachten. Gehören  $a_1$  und  $a_k$  zu derselben Untergruppe  $H_\mu^*$ , so könnten wir zur Transformation

$$a_1^{-1} / a_1 = a_2 \dots a_{k-1} (a_k a_1)$$

übergehen. Wir nehmen daher an, daß  $a_1$  und  $a_k$  keine inversen Elemente zueinander sind und nicht zu derselben Untergruppe  $H_\mu^*$  gehören. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir zeigen, daß  $k = 1$  ist, d. h.  $f$  nur aus einem einzigen Faktor besteht.

Es sei umgekehrt  $k > 1$ . Ist  $f$  kein Primwort, so kann man es, nach (A), als Produkt von Primworten darstellen,

$$f = a' a'' \dots a^{(r-1)} a^{(r)};$$

zwischen  $a'$  und  $a''$  (und zwischen  $a^{(r-1)}$  und  $a^{(r)}$ ) ist die Nachbarschaft erster Art. Da die erste Hälfte der unkürzbaren Darstellung von  $f$  zu ihrer zweiten Hälfte invers ist, muß in dem Produkte  $a^{(r)} a'$  zwischen den Faktoren Nachbarschaft dritter Art existieren, was aber unmöglich ist, da  $a^{(r)} a'$  zufolge der über  $f$  gemachten Voraussetzungen ein Wort ist.

Es sei nun  $f$  ein Primwort. Es gibt ein solches  $a_i$ , daß  $l(f) = l(a_i)$  gilt; wir können annehmen, daß  $a_i$  entweder ein Element aus einer Untergruppe  $H_\mu^*$  oder eines der Elemente  $f_{\mu\sigma}$  ( $\mu < \nu$ ) ist, denn wäre es ein Element  $f_{\mu\sigma}^{-1}$ , so würden wir die Transformation  $f^{-1}$  betrachten. Ist  $i < k$ , so werden wir die Transformation

$$a_{i+1} \dots a_k f a_k^{-1} \dots a_{i+1} = a_{i+1} \dots a_k a_i \dots a_i$$

betrachten; wäre dieses Wort kein Primwort, so würden die vorangehenden Betrachtungen anwendbar sein; ist es aber ein Primwort, so hat sein letztes Element eine maximale Länge. Wir nehmen daher an, daß  $i = k$  ist, also  $l(f) = l(a_k)$  gilt. Die Länge von  $a_k$  ist dabei gewiß ungerade.

Gehört  $a_k$  zur Untergruppe  $\Phi_\mu$ , so ist seine zweite Hälfte gleich  $g_\mu$  und sein Zentralfaktor gehört zur Komponente  $H_{a_\mu}$ . Dann wird, nach Hilfssatz 5, die zweite Hälfte von  $f$  auch gleich  $g_\mu$  sein und der Zentralfaktor von  $f$  zu  $H_{a_\mu}$  gehören; da  $f$  eine Transformation ist, so wird die erste Hälfte von  $f$  gleich  $g_\mu^{-1}$  sein. Ist die in  $\Phi_\mu$  aufgehende Untergruppe  $H_\mu^*$  vom Einselement verschieden, so gehört  $f$ , wie wir sehen, zu dieser Untergruppe, so daß

$$f = a_0 \in H_\mu^*$$

ist. Aber daraus folgt

$$a_1 \dots a_k a_0^{-1} = 1,$$

was bei  $k > 1$  gewiß unmöglich ist. Ist aber  $H_\mu^* = 1$ , so geht das Wort  $f$  in einer Untergruppe  $K_\lambda$  mit  $\lambda < \mu$  auf, läßt sich also durch Erzeugende dieser Untergruppe darstellen,

$$f = a'_1 a'_2 \dots a'_m.$$

Es gilt aber jetzt

$$a_1 \dots a_k a_m^{-1} \dots a_1^{-1} = 1.$$

was auch unmöglich ist, da links ein Wort steht.

Hilfssatz 7. Enthält die Untergruppe  $K$ , eine Transformation  $f = g^{-1} h g$  mit  $h \in H_a$ , so enthält sie auch den ganzen Durchschnitt der Untergruppen  $g^{-1} H_a g$  und  $F$ ,

$$K, \supset g^{-1} H_a g \cap F.$$

Nach Hilfssatz 6 gilt nämlich

$$f = a_n^{-1} \dots a_1^{-1} a_0 a_1 \dots a_n \text{ mit } a_0 \in H_\mu^*, \quad \mu < \nu.$$

Enthält die Untergruppe  $F$  noch eine Transformation  $f' = g^{-1} h' g$  mit  $h' \in H_a$ , so muß das Element  $a_1 \dots a_n f' a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$  zur Untergruppe  $H_\mu^*$  gehören, also in der Untergruppe  $K$ , aufgehen. Daher gilt  $f' \in K$ .

Hieraus folgt, da die Untergruppe  $H_\mu^*$  mindestens ein nicht in  $K$ , aufgehendes Element enthält, daß der Durchschnitt der Untergruppen  $K$ , und  $H_\mu^*$  nur aus dem Einselement besteht, also keine Erzeugende  $b_i$  der Untergruppe  $\Phi$ , in  $K$ , aufgeht.

### § 5.

#### Beweis des Untergruppensatzes. Isomorphiesatz.

Wir sind jetzt in der Lage, die Voraussetzung (A) für die Untergruppe  $K_{\nu+1}$  zu beweisen;  $K_{\nu+1}$  ist die von  $K_\nu$  und  $\Phi_\nu$  erzeugte Untergruppe, also bilden die Erzeugenden von  $K_\nu$  und  $\Phi_\nu$ , in ihrer Gesamtheit Erzeugende von  $K_{\nu+1}$ . Wir schicken dazu drei Hilfssätze über Nachbarschaften zwischen Primworten von  $K_\nu$  und  $\Phi_\nu$  voraus; wie früher bedeutet  $a'$  ein beliebiges Primwort von  $K_\nu$ ,  $b'$  ein Primwort von  $\Phi_\nu$ .

Hilfssatz 8. Ist  $l(a') < l(b')$ , so ist zwischen  $a'$  und  $b'$  Nachbarschaft dritter Art unmöglich.

In der Tat, ist  $b' = b_1 \dots b_n$ , so wäre bei der Nachbarschaft dritter Art

$$l(a' b_1) < l(b_1),$$

also  $a' b_1 \in K$ , und daher  $b_1 \in K$ , entgegen dem § 4.

Hilfssatz 9. Ist  $l(a') = l(b')$ , so kann zwischen  $a'$  und  $b'$  nur Nachbarschaft erster Art vorhanden sein.

Es seien

$$a' = a_1 a_2 \dots a_n, \quad b' = b_1 b_2 \dots b_i$$

und

$$l(a') = l(a_j), \text{ aber } l(a') > l(a_i) \text{ bei } i > j.$$

Gibt es zwischen  $a'$  und  $b'$  Nachbarschaft zweiter oder dritter Art, so wird zwischen  $a'$  und  $b_i$  auch Nachbarschaft zweiter oder sogar dritter Art vorhanden sein. Das Wort  $a_{j+1} \dots a_n$  ist, nach Hilfssatz 4, ein Primwort, und es ist

$$l(a_{j+1} \dots a_n) < l(a').$$

Es gibt zwischen den Primworten  $a_1 \dots a_j$  und  $a_{j+1} \dots a_n$  Nachbarschaft zweiter Art, also muß zwischen  $a_{j+1} \dots a_n$  und  $b_i$  auch Nachbar-



schaft zweiter Art vorhanden sein (die Nachbarschaft dritter Art ist nach Hilfssatz 8 ausgeschlossen). Daraus folgt

$$l(a_{j+1} \dots a_s b_1) = l(b_1).$$

Da zwischen  $a_1 \dots a_j$  und  $a_{j+1} \dots a_s b_1$  die Nachbarschaft zweiter Art ist, so sind die zweite Hälfte von  $a_j$  und die erste Hälfte von  $a_{j+1} \dots a_s b_1$  zueinander invers und ihre Zentralfaktoren gehören, bei ungerader Länge, zu derselben Komponente. Daraus folgt aber, entweder nach der Konstruktion der Untergruppen  $\Phi_u$  oder nach Hilfssatz 2 (letzteres bei  $a_j = f_{u\alpha}^{-1}$ ):

$$a_{j+1} \dots a_s b_1 \in K_r, \text{ also } b_1 \in K_r.$$

Hilfssatz 10. Sind zwischen  $b'$  und  $a'$  und zwischen  $a'$  und  $b''$  die Nachbarschaften zweiter Art (also  $l(a') < l_r$ ), so kann zwischen  $b'a'$  und  $b''$  nur Nachbarschaft erster Art sein.

Es seien

$$b' = b_{11} b_{12} \dots b_{1r}, \quad b'' = b_{21} b_{22} \dots b_{2t}.$$

Wäre zwischen  $b'a'$  und  $b''$  die Nachbarschaft zweiter oder dritter Art, so müßte zwischen  $b_{1r}a'$  und  $b_{21}$  (und zwischen  $b_{1r}$  und  $a'b_{21}$ ) auch Nachbarschaft zweiter oder sogar dritter Art vorhanden sein.

Dieses ist unmöglich bei der Voraussetzung, daß die zweite Hälfte von  $b_{1r}$  gleich  $g_r$  und die erste Hälfte von  $b_{21}$  gleich  $g_r^{-1}$  ist; denn die Kürzungen könnten dann nicht das ganze Wort  $a'$  vernichten.

Es sei jetzt die erste Hälfte von  $b_{21}$  gleich  $g_r^{-1}$ , aber die zweite Hälfte von  $b_{1r}$  von  $g_r$  verschieden; dann ist gewiß die erste Hälfte von  $b_{1r}$  gleich  $g_r^{-1}$ . Da zwischen  $b_{1r}a'$  und  $b_{21}$  Nachbarschaft zweiter oder dritter Art vorausgesetzt war, so muß die zweite Hälfte von  $b_{1r}a'$  gleich  $g_r$  sein. Daraus folgt aber

$$b_{1r}a' \in H_r^*,$$

also geht  $b_{1r}$  selbst in der von  $K_r$  und  $H_r^*$  erzeugten Untergruppe auf, was unmöglich ist. Genau so wird es auch bei der Voraussetzung gehen, daß die zweite Hälfte von  $b_{1r}$  gleich  $g_r$ , aber die erste Hälfte von  $b_{21}$  von  $g_r^{-1}$  verschieden ist.

Es seien endlich die zweite Hälfte von  $b_{1r}$  von  $g_r$  und die erste Hälfte von  $b_{21}$  von  $g_r^{-1}$  verschieden. Bei unseren Voraussetzungen über die Nachbarschaft zwischen  $b_{1r}a'$  und  $b_{21}$  wird das Produkt  $b_{1r}a'b_{21}$  entweder eine in  $H_r^*$  enthaltene Transformation oder gleich 1 sein. Da  $b_{1r}$  von  $b_{21}$  und von  $b_{21}^{-1}$  gewiß verschieden ist (die Kürzungen sollen das ganze  $a'$  vernichten), so kommen wir in beiden Fällen zum Widerspruch: war das Element  $b_{21}$  später als  $b_{1r}$  gewählt, so wird es in der von  $K_r$ ,  $H_r^*$  und  $b_{1r}$  erzeugten Untergruppe aufgehen. Der Hilfssatz 10 ist bewiesen.

Wir befinden uns jetzt in der Lage, die Induktionsvoraussetzung (A) für die Untergruppe  $K_{r+1}$  zu beweisen. Jedes Wort von  $K_{r+1}$  läßt sich nämlich, bei geeigneter Gruppierung seiner Faktoren, als Produkt von Worten und daher von Primworten von  $K$ , und  $\Phi$ , darstellen. Die Hilfssätze 8, 9, 10 zeigen uns, wann zwei nebeneinanderstehende Primworte von  $K$ , und von  $\Phi$ , zu einem Primworte vereinigt werden können; in dem Falle, der im Hilfssatz 10 betrachtet worden war, soll das Primwort  $a'$  entweder mit  $b'$  oder mit  $b''$  vereinigt werden. Jedes Wort von  $K_{r+1}$  ist also als Produkt von Primworten der Gestalt  $a'$ ,  $b'$ ,  $a'b'$ ,  $b'a'$  und  $a'b'a''$ , zwischen denen Nachbarschaften erster Art vorhanden sind, darstellbar.

Die Voraussetzung (A) ist für die Untergruppe  $K_{r+1}$  bewiesen. Ihre Erfüllung für die Untergruppe  $K_1$  mit einer Limeszahl  $\lambda$  folgt daraus, daß jedes Wort von  $K_1$  schon in einer Untergruppe  $K_\mu$  mit  $\mu < \lambda$  aufgeht. (A) gilt daher in allen Untergruppen  $K_r$ , also in der Untergruppe  $F$  selbst, und das beweist den Untergruppensatz.

**Zusatz.** Jede unzerlegbare Untergruppe eines freien Produktes  $G = \prod_a H_a$  ist entweder eine unendliche zyklische Gruppe oder mit einer Untergruppe von einer Komponente  $H_a$  konjugiert.

Daraus folgt ohne besondere Schwierigkeiten der

**Isomorphiesatz.** Ist eine Gruppe  $G$  auf zwei Arten als freies Produkt von unzerlegbaren Komponenten dargestellt,

$$G = \prod_a H_a = \prod_\beta F_\beta,$$

so lassen sich die Komponenten dieser beiden Zerlegungen so einander ein-eindeutig zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind. Sind diese entsprechenden Faktoren keine unendlichen zyklischen Gruppen, so sind sie sogar in  $G$  konjugiert.

Der Beweis bleibt wörtlich derselbe, wie für den Satz 3 der unter 2) zitierten Arbeit des Verfassers. Um das Lesen dieses Beweises zu erleichtern, wollen wir nur einige Bemerkungen machen.

Die unkürzbaren Darstellungen und die Längen der Elemente  $g_1, g_2$  betrachtet man dort in bezug auf die erste Zerlegung. Da der erste Faktor der unkürzbaren Darstellung von  $g_2$  als nicht zur Komponente  $H_1$  gehörig vorausgesetzt werden kann, ist das Element  $h = g_2 g_1$  der letzte Faktor der unkürzbaren Darstellung von  $g_1$ , also können im Produkte  $g_1 g_2$  überhaupt keine Kürzungen vollzogen werden.

Aus dem Isomorphiesatz für freie Produkte folgen einige Isomorphiesätze für sogenannte freie Produkte mit vereinigten Untergruppen, welche wir hier nicht definieren wollen.

(Eingegangen am 22. 6. 1933).

## A machine for combining sets of linear congruences.

Von

D. H. Lehmer in Altadena (Cal., U. S. A.)

Many problems in the theory of numbers have been reduced to the combination of sets of linear congruences. In such problems we are looking for an unknown integer  $x$ , which with respect to a certain modulus is congruent to some one of a set of remainders. If this type of fact is known for a sufficient number of different moduli, the combination of all these meagre bits of information leads to the identification of the unknown from many thousands or even millions of possible integers.

This method is particularly powerful when we have for available moduli all (or nearly all) the small primes  $p$  or their powers<sup>1)</sup>, and when the number of remainders to which  $x$  is restricted modulo  $p_i$  is not much greater than  $p_i/2$ . These conditions are met with in a large number of problems of interest to the arithmetician including the representation of numbers by binary quadratic forms, the solutions of quadratic and higher congruences, the distribution of the values of the class number function, and more general problems, such as finding the common values of two or more non-linear polynomials with integer coefficients, or finding the least number having a prescribed quadratic (or higher) character with respect to each prime modulus less than some given limit.

Since this class of perpetually interesting problems may all be solved by the same method, attempts have been made to standardize and simplify the procedure of combining sets of linear congruences of this type. Theoretically the problem presents no difficulties. Finding the common solution of a set of linear congruences amounts to solving in integers equations of the type  $ax + by = c$ . This can be done non-tentatively by continued fractions. The number of such equations to be solved however may exceed  $10^{50}$  in dealing with some fairly simple problems. Hence this method is not practical.

If the unknown  $x$  is restricted to  $s_1$  values modulo  $p_1$ , and to  $s_2$  values modulo  $p_2$ , then the combined effect is to restrict  $x$  to  $s_1 s_2$  values

---

<sup>1)</sup> An important problem in which this is not the case is the quadratic residue method of factorization as described by Legendre.

modulo  $p_1 p_2$ . It thus appears that by combining the restrictions on  $x$  for all the moduli  $p_1, p_2, \dots, p_t$ ,  $x$  is restricted to  $s_1 = s_2 = \dots = s_t = S$  cases modulo  $p_1 p_2 \dots p_t = P$ . Now it often happens that  $s_i$  is approximately  $p_i/2$ , so that  $S 2^t = P$  approximately. Moreover the values of  $t$  must be 25 or 30 in some cases. For such a value of  $t$ , the numbers  $S$  and  $P$  are enormous. What is essential however is that  $P$  is several million times larger than  $S$ . We now make an assumption for which there is no theoretical justification. We assume that the  $S$  favorable values of  $x$  are more or less uniformly distributed among the  $P$  possible values of  $x$ . If the  $x$  for which we are looking is known to be less than  $L$ , than we may choose  $t$  so that  $2^{t-1} < L \leq 2^t$ . By our assumption then, the desired answer will be the smallest value of  $x$  satisfying the  $t$  sets of restrictions modulo  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ).

The problem now requires the examination of all the numbers  $1, 2, 3, \dots, L$  for the one number (or at most a few numbers) which satisfies the requirements of each of the moduli  $p_i$ . Obviously there are two ways of doing this. We may examine the numbers  $1, 2, 3, \dots, L$  one at a time and for each number find a modulus  $p$  by which it is excluded. Or we may take each modulus in turn and find which of the numbers  $1, 2, 3, \dots, L$  it excludes. This second method recommends itself to pencil and paper work, since it may be performed more or less graphically. In fact it is customary to use paper ruled in square cells. Each cell by virtue of its position represents one of the numbers  $1, 2, \dots, L$ . In this way much writing is saved. The undesirable entries modulo  $p_i$  occur periodically in the table and are crossed out with the aid of a "movable strip" of length  $p_i$ . By the time  $t$  such strips are applied to the table only a few cells survive. The corresponding values of  $x$  may now be tried as solutions of the problem<sup>3)</sup>.

However this method demands a great deal of attention on the part of the computer lest a mistake occur by a maladjustment of a strip.

The first method of trying the numbers  $1, 2, 3, \dots, L$  in turn seems, at first sight, to be very crude. It has one advantage over the second method, however. No mention need be made of the upper limit  $L$ . In fact it frequently occurs that  $x$  is very small compared with  $L$ , so that by this direct method of search  $x$  is found comparatively soon. Moreover in some distribution problems it is essential to leave  $L$  indefinite. This feature of the first method has been worth developing.

<sup>3)</sup> For a complete description of the method see Krattchik: "Théorie des Nombres", T. 1, 34-44. For a variation of this method compare F. W. Lawrence, Quarterly Journal of Math. 28 (1896), pp. 285-311.

The fact that a modulus is realized mechanically by a wheel has led computers, who have used the movable strip method, to imagine a machine which would do this work rapidly, without attention, and perform the exclusion of the numbers 1, 2, 3, ..., using all the moduli at once. The literature contains at least two descriptions of such machines which, though impractical in their design, are theoretically interesting. As far as the writer knows, the first successful machine of this type was constructed by him in 1927<sup>3</sup>). The wheel element of this machine is an endless chain. This machine considers the integers 1, 2, 3, ... with respect to 20 different moduli at once at the rate of 3000 numbers per minute. Higher speeds of operation are impractical on account of the instability of the chains and the unreliability of the electrical contacts which are essential parts of the apparatus.

The object of this paper is to give some account of a new machine constructed by the writer to deal with problems too large for the previous model. This new machine examines the natural numbers with respect to 30 moduli at once at the rate of 300 000 numbers per minute. We owe the achievement of this high rate of speed to modern physics, for the photoelectric cell and the thermionic valve are indispensable elements of the machine. A more detailed account of the apparatus follows.

To obtain high speeds the mechanical system has been made as simple as possible. There are only 31 moving parts and these are gears rotating about their centers of gravity. There are 30 driven gears, all driven at the same linear speed of about 1700 meters per minute by a single driving gear. The 30 driven gears correspond to 30 moduli and have for numbers of teeth convenient multiples of every prime  $< 127$ . The largest gear has 128 teeth and the smallest 67 teeth. At the base of each tooth on each driven gear, holes are drilled at a constant distance from the periphery of the gear, this distance being the same for all gears. These holes are about 2 millimeters in diameter and correspond to the numbers  $0, 1, 2, \dots, p-1$  modulo  $p$ . If  $x$  is to be restricted to a set of  $s$  numbers modulo  $p$  the holes corresponding to these numbers are left open, while the other holes are stopped up with wooden pins. The gears are mounted parallel to one another and have a common line of tangency so that if a beam of light from an incandescent lamp shines through a hole in any gear it is transmitted or blotted out by the next gear. If the driving gear is rotated (from some zero position)

---

<sup>3</sup>) For a complete description of this machine, the reader may consult *American Mathematical Monthly* 35 (1928), 114—121.

until  $x$  teeth have turned past and if  $x$  satisfies the conditions imposed by all the moduli, then there will be an alignment of open holes and the beam of light will traverse the system of gears. However, if  $x$  fails to satisfy the conditions imposed by a certain modulus, the corresponding gear will prevent the passage of light.

So much for the mechanical system. In order to observe and report the appearance of this tiny flash of light, a photo-electric cell is placed behind the last gear. Now, the amount of light which succeeds in getting through the 30 gears is very small and it lasts only a ten thousandth of a second. Moreover, the photo-electric cell is very inefficient. The energy produced by the cell must be sufficiently magnified to operate a circuit breaker to stop the electric motor driving the machine. This is done by means of a six stage amplifier. The amplifier magnifies the energy from the photoelectric cell by a factor of 700 000 000. This much energy is sufficient to operate a delicate thermionic relay, the first of a series of three relays which finally stops the machine.

After plugging up the appropriate holes in each gear, and starting the machine the operator needs to give it no further attention until, on one of his occasional visits to the laboratory he finds that the machine has stopped. He then substitutes the human eye for the photo-electric cell, and by reversing the machine very slowly, brings it back to the exact position where the light shines through. He then reads the number of teeth by means of a revolution counter. This number is then the smallest positive integer satisfying the conditions of the 30 moduli. If it is not an answer to our problem the machine is set in motion again.

To illustrate how the machine is used we give in some detail a very simple example, that of decomposing  $2^{93} + 1$  into its prime factors. The number  $2^{93} + 1$  has the divisors  $2 + 1$ ,  $2^3 + 1$  and  $2^{31} + 1$ , whose prime factors are well known. Our problem then is to factor

$$N = \frac{(2^{93} + 1)(2 + 1)}{(2^{31} + 1)(2^3 + 1)} = 1537\ 22867\ 20933\ 01419.$$

We cannot set the machine to search directly for a factor of  $N$ . Instead we seek to represent  $N$  by the form  $a^2 - b^2$ . The number  $N$  has been under investigation a number of times and it is known that its smallest factor exceeds 300 000. Hence

$$\sqrt{N} < a < \frac{1}{2}(300\ 000 + N/300\ 000),$$

That is

$$1\ 239\ 850\ 261 < a < 2\ 562\ 047\ 936\ 822.$$



Now it is well known that any factor of  $N$  is of the form  $93z + 1$ , and  $8z + 1, 3$ . From these facts we deduce at once that

$$a \equiv (N + 1)/2 \equiv 3070 \pmod{93^2}$$

$$a \equiv 6 \pmod{8}$$

that is

$$a \equiv 3070 \pmod{69192}.$$

It is therefore convenient to introduce the variable  $x$  by

$$a = 69192x + 1239854518.$$

The condition  $a^2 - N = b^2$  means that we are looking for a positive integer  $x$  such that

$$f(x) = 4787532864x^2 + 171576027618912x + 10553711710905$$

is a square. The inequality for  $a$  gives

$$0 < x < 37010176.$$

We now consider the quadratic expression  $f(x)$  with respect to the modulus  $p$  and impose the condition that  $f(x)$  be a quadratic residue of  $p$ . We have prepared special tables from which it is possible to read the values of  $x \pmod{p}$  for which  $ax^2 + bx + c$  is a quadratic residue modulo  $p$  for all primes and powers of primes  $< 127$ . Thus we find for example

$$x \equiv 0, 1, 2, 9, 10, 11 \pmod{13}$$

$$x \equiv 1, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16 \pmod{17}$$

$$x \equiv 0, 3, 6, 8, 10, 11, 14, 15, 17 \pmod{19}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x \equiv 0, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 33, \\ 35, 36, 38, 40, 42, 48, 50, 51, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 67, \\ 68, 70, 76, 78, 80, 82, 83, 85, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 99, 100, \\ 101, 104, 105 \pmod{107}.$$

By considering the moduli 9, 25, 49 and 121 instead of 3, 5, 7, and 11 a better set of restrictions is obtained. Thus for example

$$x \equiv 1, 3, 4, 7 \pmod{9}$$

$$x \equiv 1, 6, 7, 10, 11, 16, 21 \pmod{25}.$$

To present this problem to the machine we have only to stop up the holes in each gear which correspond to those values of  $x$  not listed above. This being done, the machine will find the value of  $x$  without attention in less than two hours. In this example the machine stopped in about



3 seconds at  $x = 6886$ . This value of  $x$  corresponds to the cases in bold type in the above table. In fact we find  $f(6886) = 1\,408\,493\,506\,557\,695\,481$ . According to the machine this number is a quadratic residue of all primes and powers of primes  $\leq 107$ . Actually taking the square root we find

$$\sqrt{f(6886)} = 1\,186\,799\,691$$

With  $x = 6886$  we have

$$a = 69\,192 \cdot 6886 + 1\,239\,854\,518 = 1\,716\,310\,630$$

Hence

$$N = 1\,716\,310\,630^2 - 1\,186\,799\,691^2 = 529\,510\,939 \cdot 2\,903\,110\,321.$$

This gives the complete factorization

$$2^{23} + 1 = 3^3 \cdot 529\,510\,939 \cdot 715\,827\,883 \cdot 2\,903\,110\,321.$$

If  $f(6886)$  had not been a square, we would have set the machine in motion again. Our sets of congruences impose a heavy restriction on  $x$  however. In fact the average density of solutions  $x$  is about 1 in 562 023 190 so that we can hardly expect two solutions to lie below 37 010 176. However, there is no *a priori* reason to expect that the solutions  $x$  are uniformly distributed. In fact extraneous solutions sometimes appear. For example in another problem the machine stopped to deliver the number

$$3\,644\,964\,042\,849\,448\,987\,514\,933\,241$$

which is a residue of every prime and power of prime  $< 137$ . It is not a square however. In fact it is a non-residue of 137 being congruent to 52.

These numbers which behave like squares with respect to all prime moduli  $\leq p$ , but in fact are non-squares are of particular interest, since their search constitutes a problem in which the solutions are not uniformly distributed. In fact if we restrict  $x$  modulo  $p$  to the set of quadratic residues of  $p$ , and seek to combine these sets of congruences, we will obtain a solution whenever  $x$  is a perfect square, prime to  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_r$ . These undesirable squares occur so frequently at first that it is impractical to use the new machine for  $x < 50\,000\,000$ . Fortunately the range under this limit has already been considered with the previous model.

The question naturally arises: How much faster is the machine than a skilled computer? This is impossible to answer in general. If the answer is small, the machine will find it at once. In the worst case, the machine must canvass a certain range of natural numbers so that a definite upper limit may be set on the required time. If the com-

puter used exactly the same method, it would be possible to estimate also the amount of time required. On this assumption the machine can do in 20 minutes what the computer can do in a year. However, the computer splits up his problem into a number of small problems by separating various cases and in this way is sometimes able to speed up his work by a factor of 100 or even more. Of course it is possible to do the same thing with the machine. Only in extreme cases is it worth while, however. A truer estimate of the value of the machine is obtained by considering the number of problems it can solve, that have thus far withstood the attacks of our best arithmeticians<sup>4</sup>).

---

<sup>4</sup>) The actual results obtained in the first month of the machine's activity are given in Bull. Amer. Math. Soc. 39.

(Eingegangen am 1. 9. 1933.)

# Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie.

Von

N. P. Romanoff in Tomsk (Sibirien).

In vorliegender Arbeit werden folgende zwei Sätze bewiesen:

**Satz I:** In jedem Intervall  $(0, x)$  liegen mehr als  $\alpha x$  Zahlen, welche als Summe von einer Primzahl und einer  $k$ -ten Potenz einer ganzen Zahl darstellbar sind, wo  $\alpha$  eine gewisse positive, nur von  $k$  abhängige Konstante bedeutet. Oder, anders ausgedrückt, die Folge aller in die Summe von einer Primzahl und einer  $k$ -ten Potenz zerlegbaren Zahlen ist eine Folge positiver Dichte <sup>1)</sup>.

**Satz II.** In jedem Intervall  $(0, x)$  liegen mehr als  $\beta x$  Zahlen, welche als Summe von einer Primzahl und einer Potenz von  $a$  darstellbar sind. Hier ist  $a$  eine gegebene ganze Zahl und  $\beta$  eine positive Konstante, welche nur von  $a$  abhängt.

Betrachten wir zunächst zwei beliebige Folgen positiver ganzer Zahlen,  $m_1, m_2, m_3, \dots$  und  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Bezeichnen wir durch  $M(x)$  und  $N(x)$  die Anzahl der  $m_i$  bzw.  $n_i$ , welche  $x$  nicht übertreffen, durch  $A_1(u, x)$ ,  $A_2(u, x)$  und  $\psi(u, x)$  die Lösungsanzahlen der Gleichungen

$$m_i - m_j = u, \quad n_i - n_j = u \quad \text{und} \quad m_i + n_j = u,$$

wobei  $m_i \leq x$ ,  $m_j \leq x$ ,  $n_i \leq x$ ,  $n_j \leq x$  ist. Bezeichnen wir außerdem durch  $\nu(2x)$  die Anzahl der Zahlen  $\leq 2x$ , welche sich in der Form  $n_i + m_j$  ( $n_i \leq x$ ,  $m_j \leq x$ ) darstellen lassen. Die oben definierten Größen befriedigen folgende Ungleichung:

$$(1) \quad \nu(2x) > \frac{M(x)^2 N(x)^2}{M(x)N(x) + \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x)}.$$

Diese Ungleichung können wir leicht aus der Identität

$$(2) \quad \sum_{u=0}^x \psi(u; x)^2 = M(x)N(x) + 2 \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x)$$

ableiten.

<sup>1)</sup> Eine Folge  $n_1, n_2, n_3, \dots$  heißt Folge positiver Dichte, wenn die Ungleichung  $\frac{N(x)}{x} > \alpha$  für alle genügend großen Werte von  $x$  erfüllt ist, wo  $N(x)$  die Anzahl aller  $n_i \leq x$  angibt und  $\alpha$  eine positive Konstante bezeichnet. Siehe Schnirelmans Arbeit: „Ob additivnych swoistwach tachisel“, Nowotscherkassk 1930; siehe auch Math. Annalen 107, S. 649–690.

Die Identität (2) bekommen wir, indem wir auf zwei verschiedene Weisen die Lösungsanzahl der Gleichung:

$$(3) \quad n_i - n_j - m_k + m_l = 0$$

mit  $n_i \leq x$ ,  $n_j \leq x$ ,  $m_k \leq x$ ,  $m_l \leq x$  bestimmen. Einerseits können wir (3) in der Form  $n_i - n_j = m_k - m_l$  schreiben und durch folgende  $2x + 1$  Gleichungssysteme ersetzen:

$$n_i - n_j = u, \quad m_k - m_l = u$$

( $u = -x, -(x-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, x$ ;  $n_i \leq x, n_j \leq x, m_k \leq x, m_l \leq x$ ).

Die Lösungsanzahl dieser Systeme ist offenbar

$$\begin{aligned} \sum_{u=-x}^x A_1(u, x) A_2(u, x) &= A_1(0, x) A_2(0, x) + 2 \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) \\ &= M(x) N(x) + 2 \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x). \end{aligned}$$

Aber die Gleichung (3) kann auch in der Form  $n_i + m_l = n_j + m_k$  geschrieben und durch Gleichungssysteme

$$n_i + m_l = u, \quad n_j + m_k = u$$

$$(u = 0, 1, 2, \dots, 2x, n_i \leq x, n_j \leq x, m_k \leq x, m_l \leq x)$$

ersetzt werden. Die Lösungsanzahl dieser letzteren ist  $\sum_{u=0}^{2x} \psi(u, x)^2$ . Aber das ist ja gerade die linke Seite der Identität (2), welche somit bewiesen ist. Es ist klar, daß  $\nu(2x)$  gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Zahlen der Reihe

$$\psi(0, x), \psi(1, x), \psi(2, x), \dots, \psi(2x, x)$$

ist. Setzen wir  $\varepsilon_i = 1$ , wenn  $\psi(i, x) > 0$ , und  $\varepsilon_i = 0$ , wenn  $\psi(i, x) = 0$ , dann bekommen wir nach der Schwarzischen Ungleichung:

$$\sum_{i=0}^{2x} \varepsilon_i^2 \sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x)^2 > \left( \sum_{i=0}^{2x} \varepsilon_i \psi(i, x) \right)^2 = \left( \sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x) \right)^2$$

oder

$$(4) \quad \nu(2x) = \sum_{i=1}^{2x} \varepsilon_i^2 > \frac{\left( \sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x) \right)^2}{\sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x)^2}.$$

Wegen (2) und der evidenten Gleichung  $\sum_{i=0}^{2x} \psi(i, x) = M(x) N(x)$  erhalten wir jetzt aus (4) die Ungleichung (1).

Wir wollen als Folgen  $m_i$  und  $n_i$  die Folge aller Primzahlen und die Folge der  $k$ -ten Potenzen aller natürlichen Zahlen nehmen und unsere Ungleichung (1) für diesen Fall näher untersuchen. Es ist hier, wie Schnirelman, Viggo Bruns Ergebnisse verallgemeinernd, bewiesen hat:

$$(5) \quad A_1(u; x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{q|u} \left(1 + \frac{1}{q}\right),$$

wobei  $A_1(u, x)$  definitionsgemäß die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $P_i - P_j = u$  in positiven,  $x$  nicht übertreffenden Primzahlen bedeutet und  $q$  alle Primfaktoren von  $u$  durchläuft.  $A_2(u; x)$  ist hier gleich der Lösungsanzahl der Gleichung

$$(6) \quad z_1^k - z_2^k = u \quad (z_1^k \leq x, z_2^k \leq x)$$

in positiven ganzen  $z$ . Hier ist weiter  $N(x) = [\sqrt{x}]$  und  $M(x) = \pi(x)^2$ , folglich nach den bekannten Tschebyscheffschen Ungleichungen

$$(7) \quad c_2 \frac{x}{\log x} < M(x) < c_3 \frac{x}{\log x}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$f(u) = \sum_{d|u} \frac{\mu(d)^2}{d} = \prod_{q|u} \left(1 + \frac{1}{q}\right),$$

wo  $\mu$  die bekannte Möbiussche Funktion bedeutet, so können wir nach (5) schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) &< c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^x A_2(u, x) f(u) \\ &= c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^x A_2(u, x) \sum_{d|u} \frac{\mu(d)^2}{d} = c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{s=1}^x \frac{\mu(s)^2}{s} \sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us, x), \\ (8) \quad \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) &< c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{s=1}^x \frac{\mu(s)^2}{s} \sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us, x). \end{aligned}$$

Die Summe  $\sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(us, x)$  ist offenbar gleich der Anzahl der Lösungen der Kongruenz  $z_1^k - z_2^k \equiv 0 \pmod{s}$ ,  $z_1^k \leq x$ ,  $z_2^k \leq x$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Für jeden der  $[\sqrt[k]{x}]$  Werte, welche  $z_2$  annehmen kann, nimmt  $z_1$  höchstens  $[\frac{\sqrt[k]{x}}{s}] \phi(s)$

<sup>2)</sup>  $\pi(x)$  ist die bekannte zahlentheoretische Funktion, welche die Anzahl der Primzahlen bis  $x$  angibt.

Werte an, wo  $\Phi(s)$  die Anzahl der Residuen  $r$  modulo  $s$  bedeutet, welche der Kongruenz  $r^k - z_s^k \equiv 0 \pmod{s}$  genügen. Nach den bekannten Sätzen über höhere Kongruenzen<sup>3)</sup> (siehe Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 1, S. 34) haben wir  $\Phi(k) = \prod_{i=1}^v \Phi(P_i)$ , wo  $P_i$  alle Primfaktoren von  $s$  durchläuft, und  $\Phi(P) \leq k$  für jede Primzahl  $P$ , folglich  $\Phi(s) \leq k^{v(s)}$ , wo  $v(s)$  die Anzahl der Primfaktoren von  $s$  bedeutet. Aber nach der bekannten Abschätzung

$$(9) \quad v(s) < c_4 \frac{\log s}{\log \log s}$$

für jedes quadratfreie  $s$  folgt

$$\Phi(s) \leq k^{v(s)} < k^{c_4 \frac{\log s}{\log \log s}} = e^{c_4 \frac{\log k}{\log \log s}} < c_5 s^{\epsilon}.$$

Alle diese Ergebnisse zusammenstellend, bekommen wir

$$\sum_{u=1}^{[x/s]} A_2(u, x) \leq [\sqrt{x}] \left[ \frac{x}{s} \right] \Phi(s) < c_5 \frac{x^{3/4}}{s^{1-\epsilon}}$$

und nach (8)

$$\sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_1 \cdot c_5 \frac{x^{1+\frac{3}{k}}}{\log^3 x} \sum_{s=1}^x \frac{\mu(s)^2}{s^{3-\epsilon}} < c_1 \cdot c_5 \frac{x^{1+\frac{3}{k}}}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)^2}{s^{3-\epsilon}}$$

oder

$$(10) \quad \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_6 \frac{x^{1+\frac{3}{k}}}{\log^2 x}.$$

Wenn wir jetzt (7), (10) in die Ungleichung (1) einsetzen und dabei  $N(x) = [x^{1/k}]$  beachten, so bekommen wir

$$v(2x) > \frac{c_2^{\frac{2}{k}} \frac{x^{2+\frac{3}{k}}}{\log^2 x}}{\frac{c_3 x^{1+\frac{1}{k}}}{\log x} + 2 c_5 \frac{x^{1+\frac{3}{k}}}{\log^2 x}} > 2 \alpha x,$$

oder endlich  $v(x) > \alpha x$ . Der Satz I ist somit bewiesen.

Um den Satz II zu beweisen, müssen wir die Ungleichung (1) auf den Fall anwenden, in welchem  $m_1, m_2, m_3, \dots$  und  $n_1, n_2, n_3, \dots$  die Folge aller

<sup>3)</sup> Wir beschränken uns auf den Fall eines quadratfreien  $s$ , da für die anderen  $s$   $\mu(s)^2 = 0$  ist.

Primzahlen und die Folge aller Potenzen einer gegebenen ganzen Zahl  $a$  bedeuten. Hier ist, wie oben:

$$(5) \quad A_1(u, x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{q|u} \left(1 + \frac{1}{q}\right) = c_1 \frac{x}{\log^2 x} f(u),$$

$$(7) \quad c_2 \frac{x}{\log^2 x} < M(x) < c_3 \frac{x}{\log^2 x}.$$

Außerdem:

$$(11) \quad N(x) = [\log_a^2 x] = \left[ \frac{\log x}{\log a} \right].$$

Was  $A_2(u, x)$  anbetrifft, so kann es nur die zwei Werte 0 und 1 annehmen, da die Gleichung nicht mehr als eine Lösung besitzen kann, wenn  $u \neq 0$  ist. In der Tat, aus der Gleichung

$$a^{i_1} - a^{j_1} = a^{i_2} - a^{j_2}$$

oder

$$a^{j_1} (a^{i_1-j_1} - 1) = a^{j_2} (a^{i_2-j_2} - 1)$$

mit  $i_1 \neq j_1$  folgt  $i_1 = i_2$  und  $j_1 = j_2$ , weil  $a^m$  und  $a^m - 1$  mit  $m > 0$  und  $n > 0$  immer relativ prim sind.

Wir wollen jetzt die Summe

$$\sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x)$$

abschätzen. Wir haben wegen (5):

$$\sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^x A_2(u, x) f(u),$$

oder, da  $A_2(u, x) = 1$  für alle  $u$  von der Form

$$a^i - a^j \quad (i \leq \log_a^2 x, \quad j \leq \log_a^2 x)$$

und  $A_2(u, x) = 0$  für alle anderen ist:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) &< c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\log_a^2 x > i > j \geq 1} f(a^i - a^j) \\ &\leq c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\log_a^2 x \geq i > j > 0} f(a^{i-j} - 1) f(a^j) \\ &= c_1 \frac{x f(a)}{\log^2 x} \sum_{\log_a^2 x \geq i > j > 0} f(a^{i-j} - 1), \end{aligned}$$



weil für beliebige  $v_1, v_2$  und  $j$   $f(v_1)f(v_2) \geq f(v_1 v_2)$  und  $f(a^j) = f(a)$  ist. Wir bekommen folglich:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) &< c_7 \frac{x}{\log x} \sum_{s=1}^{\log_a^2 x} f(a^s - 1) \\ &= c_7 \frac{x}{\log x} \sum_{s=1}^{\log_a^2 x} \sum_{d|a^s-1} \frac{\mu(d)^2}{d} = c_7 \frac{x}{\log x} \sum_{k=1}^x \frac{\mu(k)^2}{k} \sum_{\substack{s \leq \log_a^2 x \\ a^s - 1 \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \\ &= c_7 \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{1 \leq k \leq x \\ (k, a) = 1}} \frac{\mu(k)^2}{k} \left[ \frac{\log_a^2 x}{l(k)} \right]. \end{aligned}$$

Hier soll  $l(k)$  die Länge der Periode sein, welche die Potenzen  $a^0, a^1, a^2, \dots$  modulo  $k$  bilden. Anders ausgedrückt,  $l(k)$  ist der Exponent, zu welchem  $a$  modulo  $k$  gehört. Aus der letzten Ungleichung ergibt sich:

$$\sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_8 x \sum_{\substack{k=1 \\ (k, a) = 1}}^x \frac{\mu(k)^2}{k l(k)}$$

oder, da die Reihe  $\sum_{\substack{k=1 \\ (k, a) = 1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k l(k)}$ , wie unten gezeigt werden soll, konvergiert,

$$\sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_8 x \sum_{\substack{k=1 \\ (k, a) = 1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k l(k)},$$

folglich

$$(12) \quad \sum_{u=1}^x A_1(u, x) A_2(u, x) < c_8 x.$$

Wir erhalten jetzt, indem wir (7), (11) und (12) in (1) eintragen:

$$\nu(2x) > \frac{c_2^2 \frac{x^2}{\log^2 x} [\log_a^2 x]}{c_2 \frac{x}{\log x} [\log_a^2 x] + 2c_9 x} > 2\beta x,$$

oder

$$\nu(x) > \beta x.$$

Die letzte Ungleichung stellt gerade den Inhalt des Satzes II dar.

Es bleibt uns noch übrig, die Konvergenz der Reihe  $\sum_{\substack{k=1 \\ (k, a) = 1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k l(k)}$  zu be-

weisen. Zu diesem Zweck formen wir sie folgendermaßen um:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k, a) = 1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k l(k)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{l(k)=l} \frac{\mu(k)^2}{k} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{d|a^l-1} \frac{\mu(d)^2}{d},$$

wobei der Strich bei dem Summationszeichen bedeutet, daß die Summe  $\sum'_{d|a^l-1} \frac{\mu(d)^2}{d}$  nur über primitive Teiler von  $a^l - 1$  erstreckt ist; das heißt nur über solche Teiler, welche keine Teiler von  $a^m - 1$  mit  $m < l$  sind. Es ist klar, daß

$$\sum'_{d|a^l-1} \frac{\mu(d)^2}{d} \leq \sum'_{\substack{d|a^l-1 \\ \varphi(d) \equiv 0 \pmod{l}}} \frac{\mu(d)^2}{d},$$

da für jedes  $d$

$$\varphi(d) \equiv 0 \pmod{l(d)^4}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sigma(l) = \sum'_{\substack{d|a^l-1 \\ \varphi(d) \equiv 0 \pmod{l}}} \frac{\mu(d)^2}{d}.$$

Es reicht hin, die Konvergenz der Reihe  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l}$  zu beweisen. Jede ganze Zahl  $l$  läßt sich immer und nur auf eine Weise in der Gestalt  $l_1 l_2^2$  darstellen, wo  $l_1$  das Produkt aller verschiedenen Primzahlen bezeichnet, welche in  $l$  in ungerader Vielfachheit aufgehen. Zerlegen wir  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l}$  in zwei Teile:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l} = \sum_{l_2 \equiv l_1} \frac{\sigma(l)}{l} + \sum_{l_2 < l_1} \frac{\sigma(l)}{l}.$$

Betrachten wir zunächst den ersten Teil:

$$\begin{aligned} \sum_{l_2 \equiv l_1} \frac{\sigma(l)}{l} &< c_{10} \sum_{l_2 \equiv l_1} \frac{\log l}{l} < c_{11} \sum_{l_2 \equiv l_1} \frac{1}{l^{1-\varepsilon}} < c_{11} \sum_{l_2 \equiv l_1} \frac{1}{(l_1 l_2^2)^{1-\varepsilon}} \\ &< c_{11} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{1}{l_1^{1-\varepsilon}} \sum_{l_2=l_1}^{\infty} \frac{1}{l_2^{2-2\varepsilon}} < \frac{c_{11}}{1-2\varepsilon} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{1}{l_1^{2-3\varepsilon}} < c_{12}. \end{aligned}$$

Hier wurde von der Ungleichung  $\sigma(l) < c_{10} \log l$  Gebrauch gemacht. Beweisen wir diese letztere. Wir haben:

$$\sigma(l) < \sum_{d|a^l-1} \frac{\mu(d)^2}{d} = f(a^l - 1).$$

Aber

$$f(u) = \prod_{q|u} \left(1 + \frac{1}{q}\right) < \prod_{q|u} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{u}{\varphi(u)},$$

<sup>4)</sup>  $\varphi(d)$  ist die bekannte zahlentheoretische Funktion von Euler.

oder, nach den bekannten Abschätzungen für die Eulersche Funktion  $\varphi(u)$ :

$$(13) \quad f(u) < c_{13} \log \log u,$$

$$(14) \quad \sigma(l) < f(a^l - 1) < c_{10} \log l.$$

Die Konvergenz des ersten Teiles ist somit bewiesen. Dem Beweis der Konvergenz des zweiten Teiles der Reihe  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l}$  schicken wir zwei Hilfssätze voraus:

Hilfssatz I. Es sei  $\pi(x, k)$  die Anzahl aller Primzahlen  $P_i^{(k)}$  von der Form  $kz + 1$ , welche  $\leq x$  sind. Es sei  $\pi(x, k) \geq 2$ . Dann ist

$$(A) \quad \pi(x, k) < b_1 \frac{x}{k^{1/2} \log x},$$

wo  $b_1$  eine absolute positive Konstante bedeutet. Die Anzahl der verschiedenen Paare  $P_i^{(k)}, P_j^{(k)}$  mit  $i \neq j$ , welche aus diesen Primzahlen gebildet werden können, ist  $\pi(x, k)^2 - \pi(x, k)$ . Aber diese Anzahl ist offenbar nicht größer als die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$(B) \quad P_i - P_j \equiv 0 \pmod{k} \quad (P_i \neq P_j)$$

in allen positiven Primzahlen  $P_i \leq x, P_j \leq x$ , weil ja jedes der oben betrachteten Paare diese Kongruenz befriedigt. Aber die Lösungsanzahl der Kongruenz (B) ist

$$\sum_{u=1}^{[x/k]} A_1(uk, x) + \sum_{u=-1}^{-[x/k]} A_1(uk, x) = 2 \sum_{u=1}^{[x/k]} A_1(uk, x).$$

Unter Heranziehung der Ungleichung (5) bekommen wir jetzt:

$$\begin{aligned} \pi(x, k)^2 - \pi(x, k) &\leq 2 \sum_{u=1}^{[x/k]} A_1(uk, x) < 2c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{[x/k]} f(ku) \\ &\leq 2c_1 \frac{x f(k)}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{[x/k]} f(u), \end{aligned}$$

da immer  $f(v_1)f(v_2) \geq f(v_1 v_2)$  ist. Folglich:

$$\begin{aligned} \pi(x, k)^2 - \pi(x, k) &< 2c_1 \frac{x f(k)}{\log^2 x} \sum_{u=1}^{[x/k]} \sum_{d|u} \frac{\mu(d)^2}{d} \\ &= 2c_1 \frac{x f(k)}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{[x/k]} \frac{\mu(s)^2}{s} \sum_{d \leq [x/k] \atop d \equiv 0 \pmod{s}} 1 \\ &= 2c_1 \frac{x f(k)}{\log^2 x} \sum_{s=1}^{[x/k]} \frac{\mu(s)^2}{s} \left[ \frac{x}{ks} \right] < 2c_1 \frac{x^2 f(k)}{k \log^2 x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)^2}{s^3}, \end{aligned}$$

oder wegen (13)

$$\pi(x, k)^2 - \pi(x, k) < 2c_1 c_{13} \frac{x^2 \log \log k}{k \log^2 x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)^2}{s^3} < \frac{1}{2} b_1^2 \frac{x^2}{k^{2/3} \log^2 x},$$

oder endlich, da aus  $\pi(x, k) \geq 2$   $\pi(x, k)^2 - \pi(x, k) > \frac{1}{2} \pi(x, k)^2$  folgt:

$$\pi(x, k)^2 < b_1^2 \frac{x^2}{k^{2/3} \log^2 x},$$

$$(A) \quad \pi(x, k) < b_1 \frac{x}{k^{1/3} \log x},$$

w. z. b. w.

Hilfssatz II. Es sei  $P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)}, \dots$  die wachsend geordnete Folge aller Primzahlen von der Form  $kz + 1$ . Dann ist für jedes  $y \geq 3$ :

$$(C) \quad \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k)}} < b_2 \frac{\log \log y}{k^{1/3}},$$

wo  $b_2$  eine absolute positive Konstante bedeutet.

Beweis. Wir haben hier wegen (A):

$$i = \pi(P_i^{(k)}, k) < b_1 \frac{P_i^{(k)}}{\log P_i^{(k)} \cdot k^{1/3}} < b_1 \frac{P_i^{(k)}}{\log i \cdot k^{1/3}}; \quad \frac{1}{P_i^{(k)}} < \frac{b_1}{k^{1/3} i \log i}$$

$$\sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k)}} < \frac{b_1}{k^{1/3}} \sum_{i=2}^y \frac{1}{i \log i} + \frac{1}{P_1^{(k)}} < \frac{b_2 \log \log y}{k^{1/3}},$$

w. z. b. w.

Wir können jetzt  $\sigma(l)$  mit  $l = l_1 l_2^2, l_1 > l_2$  abschätzen. Bezeichnen wir durch  $N$  das Produkt aller verschiedenen Primfaktoren von  $a^l - 1$ . Die Summe  $\sigma(l)$  kann man auch in der Form

$$\sum_{\varphi(P_{i_1}) \varphi(P_{i_2}) \dots \varphi(P_{i_k}) \equiv 0 \pmod{l}} \frac{1}{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}}$$

schreiben. Hier erstreckt sich die Summe über alle solche Kombinationen der Primfaktoren von  $N$ , für welche die Bedingung

$$(P_{i_1} - 1)(P_{i_2} - 1) \dots (P_{i_k} - 1) \equiv 0 \pmod{l}$$

erfüllt ist. Diese Summe nimmt nicht ab, wenn wir diese Bedingungen durch  $(P_{i_1} - 1)(P_{i_2} - 1) \dots (P_{i_k} - 1) \equiv 0 \pmod{l_1}$  ersetzen. Aus

$$(P_{i_1} - 1)(P_{i_2} - 1)(P_{i_3} - 1) \dots (P_{i_k} - 1) \equiv 0 \pmod{l_1}$$

folgt, daß entweder zwischen den Primzahlen  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$  sich wenigstens eine Primzahl  $P_{i_1} \equiv 1 \pmod{l_1}$  befindet, oder wenigstens zwei Primzahlen

$$P_{j_1} \equiv 1 \pmod{k_1}, \quad P_{j_2} \equiv 1 \pmod{k_2}, \quad l_1 = k_1 k_2$$

oder wenigstens drei Primzahlen

$$P_{j_1} \equiv 1 \pmod{k_1}, \quad P_{j_2} \equiv 0 \pmod{k_2}, \quad P_{j_3} \equiv 1 \pmod{k_3}, \quad k_1 k_2 k_3 = l_1,$$

und so weiter. Wir haben daher:

$$\begin{aligned} \sigma(l) &\leq \sum_{(P_{i_1}-1) \dots (P_{i_k}-1) \equiv 0 \pmod{l_1}} \frac{1}{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}} \leq \sum_{P_j \equiv 1 \pmod{l_1}} \frac{1}{P_j} \sum_{\frac{d|N}{P_j}} \frac{\mu(d)^2}{d} \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{l_1 = k_1 k_2} \sum_{P_{j_1} \equiv 1 \pmod{k_1}} \frac{1}{P_{j_1}} \sum_{P_{j_2} \equiv 1 \pmod{k_2}} \frac{1}{P_{j_2}} \sum_{\frac{d|N}{P_{j_1} P_{j_2}}} \frac{\mu(d)^2}{d} + \dots \\ &+ \frac{1}{v!} \sum_{l_1 = k_1 k_2 \dots k_v} \sum_{P_{j_1} \equiv 1 \pmod{k_1}} \frac{1}{P_{j_1}} \sum_{P_{j_2} \equiv 1 \pmod{k_2}} \frac{1}{P_{j_2}} \dots \sum_{P_{j_v} \equiv 1 \pmod{k_v}} \frac{1}{P_{j_v}} \sum_{\frac{d|N}{P_{j_1} P_{j_2} \dots P_{j_v}}} \frac{\mu(d)^2}{d}. \end{aligned}$$

Die Summe bricht beim  $v$ -ten Gliede ab, wo  $v$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $l_1$  bedeutet, denn  $l_1$  kann nicht in mehr als  $v$  Faktoren  $k_i > 1$  zerlegt werden, da  $l_1$  quadratfrei ist. Alle Summen sind durch Fakultäten geteilt, da wir nur die wesentlich verschiedenen Kombinationen zu beachten brauchen, weil es auf die Permutationen derselben Primfaktoren natürlich nicht ankommt. Bezeichnen wir durch  $y$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $a^l - 1$ , so bekommen wir aus der letzten Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sigma(l) &< f(N) \left( \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(l_1)}} + \frac{1}{2!} \sum_{l_1 = k_1 k_2} \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k_1)}} \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k_2)}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{v!} \sum_{l_1 = k_1 k_2 \dots k_v} \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k_1)}} \dots \sum_{i=1}^y \frac{1}{P_i^{(k_v)}} \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten jetzt, indem wir (14) und (C) in die letzte Ungleichung eintragen:

$$\begin{aligned} \sigma(l) &< c_{10} \log l \left( \frac{(b_1 \log \log y)}{l_1^{1/2}} + \frac{(b_1 \log \log y)^2}{2!} \sum_{l_1 = k_1 k_2} \frac{1}{k_1^{1/2} k_2^{1/2}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b_1 \log \log y)^v}{v!} \sum_{l_1 = k_1 k_2 \dots k_v} \frac{1}{k_1^{1/2} k_2^{1/2} \dots k_v^{1/2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(l) &< c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/2}} \sum_{i=1}^v \frac{(b_1 \log \log y)^i}{i!} \Theta_i(l_1) < c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/2}} (b_1 \log \log y)^v \sum_{i=1}^v \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} \\ &= c_{10} \frac{\log l}{l_1^{1/2}} (b_1 \log \log y)^v \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!}, \end{aligned}$$

wo  $\Theta_i(l_i)$  die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $l_i = k_1 k_2 \dots k_i$  in positiven ganzzahligen  $k > 1$  bedeutet. Aber es ist nach den bekannten Abschätzungen für die Anzahl der Primfaktoren  $\nu(x)$ , welche in  $x$  aufgehen:

$$\nu(x) < c_4 \frac{\log x}{\log \log x},$$

$$y = \nu(a^l - 1) < c_4 \frac{\log(a^l - 1)}{\log \log(a^l - 1)} < b_2 \frac{l}{\log l},$$

$$\nu = \nu(l_1) < c_4 \frac{\log l_1}{\log \log l_1} < c_4 \frac{\log l}{\log \log l}.$$

Folglich

$$\begin{aligned} (b_1 \log \log b_2 \frac{l}{\log l})^{c_4 \frac{\log l}{\log \log l}} &< (b_4 \log \log l)^{c_4 \frac{\log l}{\log \log l}} \\ &= e^{c_4 \frac{\log l}{\log \log l} \log(b_4 \log \log l)} = l^{c_4 \frac{\log(b_4 \log \log l)}{\log \log l}} < b_3 l^2, \end{aligned}$$

also

$$\sigma(l) < b_3 \frac{l^{21}}{l_1^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!}.$$

Wir bekommen jetzt, indem wir  $l_1 > l_2$ ,  $l_1^2 > l$ ,  $l_1 l_2^2 = l$ ,  $l_1 > l^{1/3}$  beachten:

$$\begin{aligned} \sigma(l) &< b_3 \frac{l^{21}}{l_1^{1/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} < b_3 \frac{1}{l_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} = \frac{b_3}{l_1^{1/2} l_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} (\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \varepsilon_1) \\ \sum_{\substack{i=1 \\ l_1 > l_2}}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l} &< b_3 \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{1}{l_2^2 + 2\varepsilon_2} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{1}{l_1^{1+\varepsilon_2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)}{i!} \\ &= b_3 \zeta(2 + 2\varepsilon_2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{\Theta_i(l_1)'}{l_1^{1+\varepsilon_2}} < b_3 \zeta(2 + 2\varepsilon_2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \zeta(1 + \varepsilon_2)^i \\ &= b_3 \zeta(2 + 2\varepsilon_2) e^{\zeta(1 + \varepsilon_2)}, \end{aligned}$$

d. h. es konvergiert auch der zweite Teil der Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma(l)}{l}$ , womit die Konvergenz der letzteren völlig bewiesen ist.

(Eingegangen am 22. 5. 1933.)

# Noch eine Bemerkung zu der Arbeit „Zur Arithmetik der Polynome“ von U. Wegner in Math. Ann. 105, S. 628–631.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Herr Hasse hat in Math. Ann. 106, S. 455 durch ein Beispiel gezeigt, daß die Sätze II und II', die den hauptsächlichsten Inhalt der oben genannten Arbeit des Herrn Wegner bilden, nicht allgemein richtig sind. Herr Wegner hat (Math. Ann. 106, S. 456) die Sätze richtigzustellen versucht, indem er zu den Voraussetzungen noch die weitere hinzufügt:  $f(x)$  sei im Bereich der rationalen Zahlen in höchstens zwei und nicht mehr irreduzible Bestandteile zerlegbar. Das folgende Beispiel soll zeigen, daß auch mit dieser Einschränkung die Sätze falsch sind.

Satz II' ist eine Verallgemeinerung von Satz II, der so heißt:  
Spaltet das ganzzahlige Polynom

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ohne mehrfache Nullstellen für fast alle Primzahlmoduln mindestens einen ganzzahligen Linearfaktor ab, so besitzt  $f(x)$  im Bereich der rationalen Zahlen mindestens einen ganzzahligen Linearfaktor.

Gegenbeispiel:  $a$  sei eine ganze Zahl, kein Kubus, und

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - a).$$

Für  $p \equiv 1 \pmod{3}$  gibt es eine primitive dritte Einheitswurzel  $(\text{mod } p)$ , also ist  $x^3 + x + 1$  reduzibel  $(\text{mod } p)$ . Für  $p \not\equiv 1 \pmod{3}$  ist jede Zahl  $a$  Kubikrest  $(\text{mod } p)$ , also hat  $x^3 - a$  einen Linearfaktor  $(\text{mod } p)$ . Somit spaltet  $f(x)$  für jeden Primzahlmodul einen Linearfaktor ab, trotzdem  $f(x)$  keinen rationalen Linearfaktor besitzt.

Das obige Beispiel scheint mir an sich bemerkenswert. Ein allgemeineres Beispiel derselben Art ist

$$f(x) = (x^2 - D)(x^3 + ax + b), \quad D = -4a^3 - 27b^2,$$

wobei der zweite Faktor als irreduzibel vorausgesetzt wird. Für den Beweis siehe weiter unten.

Zusatz (Januar 1934). Man kann die obigen Beispiele, wie mir Herr Wegner mitteilt, folgendermaßen verallgemeinern:



$g(x) = 0$  sei eine in  $k(1)$  irreduzible, auflösbare Gleichung vom ungeraden Primzahlgrad  $l$ , deren Diskriminante  $D$  kein vollständiges Quadrat ist. Dann spaltet das Produkt

$$f(x) = (x^2 - D)g(x)$$

modulo jeder Primzahl mindestens einen Linearfaktor ab.

Beweis: Die Wurzeln von  $x^2 - D$  seien  $x_1, x_2$ , die von  $g(x)$  seien  $x_3, \dots, x_{l+2}$ . Die Gruppe der Gleichung  $g(x) = 0$  enthält bekanntlich die Potenzen einer zyklischen Vertauschung  $(x_3, x_4 \dots x_{l+2})$  und sonst lauter Permutationen, welche eine Wurzel fest lassen. Die Gruppe von  $f(x) = 0$  besteht aus denselben Permutationen der Wurzeln  $x_3, \dots, x_{l+2}$ , multipliziert mit Permutationen von  $x_1$  und  $x_2$ . Diejenigen Permutationen, welche das Differenzenprodukt  $\sqrt{D}$  der  $x_3, \dots, x_{l+2}$  fest lassen, vertauschen  $x_3, \dots, x_{l+2}$  nach einer geraden Permutation und vertauschen  $x_1$  und  $x_2$  nicht. Diejenigen aber, welche  $\sqrt{D}$  in  $-\sqrt{D}$  überführen, vertauschen  $x_3, \dots, x_{l+2}$  nach einer ungeraden Permutation und vertauschen  $x_1$  mit  $x_2$ . Beide Arten von Permutationen lassen mindestens eine der Wurzeln  $x_1, \dots, x_n$  fest. Daraus folgt nach einem bekannten Satz von Dedekind, daß  $f(x)$  modulo jeder nicht in  $2D$  aufgehenden Primzahl einen Linearfaktor abspaltet. Dasselbe gilt aber trivialerweise für die in  $2D$  aufgehenden Primzahlmoduln.

Inwieweit man den obigen Satz umkehren, d. h. aus dem Abspalten eines Linearfaktors von  $(x^2 - D)g(x)$  modulo jeder Primzahl auf die Auflösbarkeit von  $g(x)$  schließen kann, will Herr Wegner in einer späteren Veröffentlichung untersuchen.

(Eingegangen am 10. 8. 1933.)

# Die einseitige Lagerung orientierbarer Flächen.

Von

Albert Noack in Schleswig.

Die Frage, ob eine Fläche ein- oder zweiseitig ist, kann nicht allein durch Untersuchung der Flächenindikatrix entschieden werden, da diese eine innere Eigenschaft der Fläche ist, während die Seite Fläche und umgebenden Raum zueinander bezieht. Steinitz berücksichtigt sowohl Flächen- als auch Raumindikatrix und findet für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension den grundlegenden Satz [Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 7 (1907), S. 36]: „Wenn beim Durchlaufen der Linie 1 sowohl die Indikatrix von  $\mathcal{M}^{(n-1)}$  als auch die Indikatrix von  $\mathcal{M}^{(n)}$  erhalten bleibt, so führt 1 auf die Ausgangsseite zurück. Dasselbe tritt ein, wenn beide Indikatrizen sich umkehren. Wenn dagegen eine von beiden Indikatrizen erhalten bleibt, die andere sich umkehrt, so gelangt man nach Durchlaufen von 1 auf die entgegengesetzte Seite der  $\mathcal{M}^{(n-1)}$ .“ Dabei ist vorausgesetzt, daß 1 in der  $\mathcal{M}^{(n-1)}$  und die  $\mathcal{M}^{(n-1)}$  in der  $\mathcal{M}^{(n)}$  liegt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß orientierbare Flächen einseitig erscheinen können, wenn sie in geeignete dreidimensionale Mannigfaltigkeiten eingebettet sind. Die Flächen und Räume werden durch Identifikation der Randpunkte berandeter Flächen und Raumstücke geschlossen. Sind die Punkte zweier gleich langer Strecken kongruent identifiziert, so nennen wir die Strecken identifiziert; dabei werden nur entsprechende Endpunkte der Strecken angegeben.

Eine geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht  $p \geq 1$  kann durch ein regelmäßiges  $4p$ -Eck dargestellt werden, bei dem man in bekannter Weise je zwei Kanten, die durch eine Kante getrennt sind, entgegengesetzt durchlaufen identifiziert hat. Über dem  $4p$ -Eck werden zu beiden Seiten zwei gleich hohe, senkrechte Pyramiden errichtet, deren Spitzen  $S'$  und  $S''$  symmetrisch zum  $4p$ -Eck auf dessen Mittelachse liegen (Fig. 1 stellt die Konstruktion für  $p = 2$  dar). Sind  $P'$  und  $P''$  identifizierte Randpunkte des  $4p$ -Ecks, so sind alle vier Strecken  $P'S'$ ,  $P'S''$ ,  $P''S'$ ,  $P''S''$  gleich lang. Identifiziert man  $P'S'$  mit  $P''S''$  sowie  $P'S''$  mit  $P''S'$ , so ist die Doppelpyramide zu einem Raum geschlossen, in dem die geschlossene

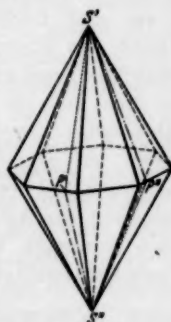


Fig. 1

Fläche vom Geschlecht  $p$  einseitig eingebettet ist. An jeder Stelle des  $4p$ -Ecks kann man nämlich zwei Seiten unterscheiden, die Seite  $S'$  und die Seite  $S''$ . Bewegt sich ein kleines Lot von einer Stelle des  $4p$ -Ecks auf der Seite  $S'$  längs eines geschlossenen Weges, der über den Rand des  $4p$ -Ecks führt, zum Ausgangspunkt zurück, so befindet sich dieses Lot hinterher auf der Seite  $S''$ . Außerdem ergibt sich der Seitenwechsel durch Untersuchung der Flächen- und Raumindikatrix aus dem Steinitz'schen Satz, der oben genannt ist.

Wird eine  $n$ -dimensionale Kugel durch Identifikation der Randpunkte teilweise oder ganz geschlossen, so errichtet man im Mittelpunkt der Kugel zwei gleich lange Lote mit den Enden  $S'$  und  $S''$  nach beiden Seiten auf dem Kugelraum im  $R_{n+1}$  und verbindet ihre Enden mit allen Randpunkten der Kugel, die vereinigt worden sind. Sind  $P'$  und  $P''$  identifizierte Randpunkte, so liefern die Vereinigungen  $P'S'$  mit  $P''S'$  und  $P'S''$  mit  $P''S''$  eine zweiseitige Einbettung, die Vereinigungen  $P'S'$  mit  $P''S''$  und  $P'S''$  mit  $P''S'$  eine einseitige Einbettung der geschlossenen Kugelmannigfaltigkeit.

Für die geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht 1, nämlich für den Torus, soll noch eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit im  $R_4$  analytisch aufgezeigt werden, innerhalb deren diese Fläche einseitig eingebettet ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir im Raume  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  einen Kreis vom Radius  $r$ , dessen Mittelpunkt  $M$  im Abstände  $R$  vom Nullpunkt auf der Achse  $x_1$  liegt und dessen Punkte in der Ebene  $(x_1, x_2)$  liegen. Sei  $S$  ein beliebiger Punkt dieses Kreises; wir verlängern den Radius  $MS$  über  $S$  hinaus um sich selbst, tragen auf dieser Strecke von  $S$  aus nach beiden Seiten eine Strecke der Länge  $a < r$  ab (dies geschieht, um Singularitäten zu vermeiden) und nennen diese Strecke den verkürzten Doppelradius. Der Raum, der zunächst durch  $x_3 = 0$  festgelegt ist, dreht sich um die Ebene  $(x_2, x_4)$  als Achse im Raume  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , dabei sollen alle verkürzten Doppelradien des Kreises in der Ebene, die jeweils auf dem Kreise senkrecht steht, mit halb so großer Winkelgeschwindigkeit rotieren. Bei dieser Bewegung beschreibt der Kreis einen Torus mit der Achse  $x_1$ , und die verkürzten Doppelradien überstreichen einen Torusraum, innerhalb dessen der Torus einseitig gebettet ist. Die Parameterdarstellung dieses Torusraumes heißt:

$$x_1 = \left[ R + r \cdot \cos \varphi + (\varrho - r) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right] \cdot \cos \varphi,$$

$$x_2 = \left[ R + r \cdot \cos \varphi + (\varrho - r) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right] \cdot \sin \varphi,$$

$$x_3 = (\varrho - r) \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$x_4 = r \cdot \sin \varphi + (\varrho - r) \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \varphi$$

mit den Bedingungen  $r - a \leq \varrho \leq r + a$ ,  $2r < R$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  beliebig. Fig. 2 stellt den Schnitt des Torusraumes mit dem Raume  $x_3 = 0$  dar

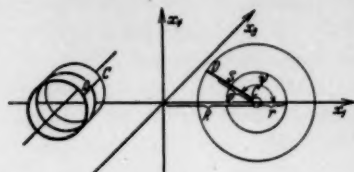


Fig. 2.

und kennzeichnet seine Erzeugung. Für  $\varrho = r$  erhält man den im Torusraum gelegenen Torus

$$x_1 = [R + r \cdot \cos \psi] \cdot \cos \varphi,$$

$$x_2 = [R + r \cdot \cos \psi] \cdot \sin \varphi,$$

$$x_3 = 0,$$

$$x_4 = r \cdot \sin \psi,$$

der zugleich Schnittfläche des Torusraumes mit dem Raume  $x_3 = 0$  ist. In jedem Punkte  $P$  des Torus steht auf diesem eine Ebene im  $R_4$  senkrecht in dem Sinne, daß diese Ebene mit der Tangentialebene des Torus in  $P$  nur den Punkt  $P$  gemeinsam hat und alle Geraden dieser Normalenebene, die durch  $P$  gehen, auf der Tangentialebene senkrecht stehen. Von diesen Geraden liegt genau eine zum Teil in dem Torusraum, und zwar fällt sie mit dem zu  $P$  gehörigen verkürzten Doppelradius zusammen, wie man aus der Tatsache erkennt, daß der Doppelradius sowohl auf der Kreistangente in  $P$  wie auf der augenblicklichen Bewegungsrichtung von  $P$  senkrecht steht (durch diese beiden Strahlen ist die Tangentialebene festgelegt). Das Lot auf dem Torus, das im Torusraum liegt, ist also der verkürzte Doppelradius durch  $P$ ; und die Unterscheidung der beiden Seiten des Torus an der Stelle  $P$  fällt mit der Unterscheidung der beiden Teile des verkürzten Doppelradius zusammen, in die dieser durch  $P$  zerfällt. Bewegt sich demnach ein Lot im Torusraum längs eines Breitenkreises auf dem Torus, so befindet sich das Lot nach einem Umlauf auf der anderen Seite des Torus an der Stelle  $P$ , wie aus der Erzeugung des Torusraumes hervorgeht. Der Torus ist also einseitig gebettet. Werden für den Torusraum alle Punkte für  $\varphi = 0$ ,  $\varrho = 2r$  und  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varrho = 2r$  identifiziert (hier handelt es sich also um die Identifikation unendlich vieler Punkte), so ist dieser neue Torusraum der vorhergenannten geschlossenen Doppelpyramide homöomorph.

Auch diese Konstruktion läßt sich für den  $n$ -dimensionalen Torus erweitern. Bewegt sich eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel um eine Achse, die die Kugel nicht schneidet, so ist der dadurch erzeugte  $n$ -dimensionale Torus einseitig in der  $(n+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit gebettet, die von den verkürzten Doppelradien überstrichen wird, wenn sich diese wieder mit halb so großer Winkelgeschwindigkeit drehen. Für  $n=1$  ist die zweidimensionale Einbettungsmannigfaltigkeit eines Kreises ein Möbiussches Band, innerhalb dessen der „Mittelkreis“ einseitig liegt.

(Eingegangen am 4. 11. 1933.)

# Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren.

Zweiter Teil <sup>1)</sup>.

Von

Kurt Friedrichs in Braunschweig.

## 1. Spektraltheorie von Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

In diesem zweiten Teil soll die Theorie der halbbeschränkten Operatoren auf lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung angewandt werden, um ihre Spektralzerlegung zu gewinnen. Ich habe mich dabei auf einige typische Fälle beschränkt, bei deren Behandlung die Allgemeinheit der Methode wohl schon genügend zum Ausdruck kommt.

Der Operator sei der „Potentialoperator“

$$G = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + v(x_1, \dots, x_n);$$

die Elemente, auf die er anzuwenden ist, sind Funktionen  $f$  der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . Die behandelten Fälle unterscheiden sich einmal durch andere Wahl des Gebietes der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und durch verschiedene Randbedingungen; um zu zeigen, daß sich auch quantentheoretische Energieoperatoren in Schrödingers Darstellung einordnen lassen, habe ich zugleich den Fall behandelt, daß das „Zusatzpotential“  $v$  eine Singularität in einem Punkte besitzt. Ferner ist  $v$  — wenn nötig, durch Addition einer Konstanten — so groß gewählt, daß  $G$  positiv halbbeschränkt wird.

So werde unterschieden:

### (1) Fall des unendlichen Gebietes mit regulärem $v$ .

Hier ist das Gebiet  $\Gamma$  der gesamte  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raum. Eine besondere Randbedingung ist nicht zu stellen.

### (2) Fall des unendlichen Gebietes mit singulärem $v$ . $n > 1$ \*).

Hier kann  $v$  bei Annäherung an den Punkt  $x_1 = \dots = x_n = 0$  in noch anzugebender Weise unendlich werden.

<sup>1)</sup> Teil I dieser Arbeit ist erschienen in Math. Annalen 109, S. 465—487.

\*) Die allgemeine Theorie halbbeschränkter Differentialoperatoren mit Singularitäten bei einer Veränderlichen,  $n = 1$ , soll an anderer Stelle dargestellt werden.

**(3)** Fall des endlichen Kugelgebietes mit regulärem  $v$  bei der Randbedingung

$$f = 0.$$

**(4)** Fall des endlichen Kugelgebietes mit regulärem  $v$  bei der Randbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0.$$

Wir haben uns damit begnügt, als endliches Gebiet die Kugel bzw. Kreis, Strecke anzusetzen, da zur Überwindung der von der Natur des Gebietes herrührenden Schwierigkeiten unsere Theorie keine neuen Gesichtspunkte bietet; dasselbe gilt für die Wahl der Randbedingungen, die übrigens noch etwas abgeschwächt werden. Vollständig durchgeführt haben wir nur die Fälle der Dimensionszahlen  $n = 1, 2, 3$ .

Für die Dimension  $n = 1$  kann die ganze Theorie auch erheblich einfacher dargestellt werden; die Fälle endlichen Gebietes sind auch den bisherigen Methoden (z. B. der Variationsrechnung) ohne weiteres zugänglich. Trotzdem haben wir diese Fälle mitgeführt, um ihre Einordnung unter die allgemeine Theorie klarzustellen.

## 2. Bezeichnungen.

Ein Punkt des Variablenraumes werde auch mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  bezeichnet. Wir setzen

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Das zugrunde gelegte Gebiet  $\Gamma$  sei im Falle

- (1)** der gesamte  $x$ -Raum,
- (2)** der gesamte  $x$ -Raum ohne  $x = 0$ ,
- (3) (4)** die „Kugel“  $r < R$ .

Wir bezeichnen (für  $\varrho \leq R$ ) abkürzend mit

$$\Omega_\varrho \text{ die Kugel\textbf{fläche} } r = \varrho,$$

$$K_\varrho \text{ die Kugel } r < \varrho,$$

$$K_{\varrho, r} \text{ die Kugelschale } \varrho \leq r < R.$$

Wir verstehen ferner (für  $\sigma > 0$ ) unter  $\Gamma_\sigma$  im Falle

$$\textbf{(1)} \quad \Gamma_\sigma = K_{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\textbf{(2)} \quad \Gamma_\sigma = K_{\sigma, \frac{1}{\sigma}},$$

$$\textbf{(3) (4)} \quad \Gamma_\sigma = K_{R-\sigma},$$

so daß für  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_\sigma$  ganz  $\Gamma$  ausschöpft.



Als „Quadrat“ um  $x = \xi$  mit der Seite  $2\delta$  bezeichnen wir das Gebiet  $|x_1 - \xi_1| < \delta, \dots, |x_n - \xi_n| < \delta$ , kurz  $[x - \xi] < \delta$ .

Die Integration über den Variablenraum werde mit

$$\int \dots dx = \iint r^{n-1} \dots dr d\omega$$

bezeichnet. Das uneigentliche Integral über den Gesamttraum  $\int \dots dx$  sei als Grenzwert von  $\int_{\Gamma_\sigma} \dots dx$  für  $\sigma \rightarrow 0$  verstanden.

### 3. Funktionenräume und Operator.

Zunächst ist der Hilbertsche Raum  $\mathfrak{H}$ , der Raum  $\mathfrak{G}$  der Form  $G$  und der Raum  $\mathfrak{F}$  des Operators  $G$  festzulegen. Zu dem Zweck werden dichte Teilräume, die „Funktionenräume“, angegeben, die von Funktionen mit einfachen Differenzierbarkeitseigenschaften gebildet werden; diese werden dann zu Räumen idealer Elemente abgeschlossen.

Um den Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  zu bilden, werden zuerst Teilräume  $\mathfrak{H}'$  und  $\mathfrak{H}''$  angegeben.  $\mathfrak{H}''$  bzw.  $\mathfrak{H}'$  besitzen als Elemente  $h$  alle in  $\Gamma$  stetigen bzw. stückweise<sup>2)</sup> stetigen Funktionen  $h(x)$  der Veränderlichen

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$

für welche

$$h H h = \int h^2(x) dx$$

existiert.  $H$  werde zur Maßform gewählt.  $\mathfrak{H}'$  ist bekanntlich<sup>3)</sup> separabel, aber nicht abgeschlossen. Nach Satz 2 (Teil I) kann  $\mathfrak{H}'$  eindeutig zu einem abgeschlossenen Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  fortgesetzt werden; und zwar durch Adjunktion idealer Elemente  $h$ , für die auch die Maßform  $h H h$  erklärt ist, so daß  $\mathfrak{H}'$  dicht liegt in  $\mathfrak{H}$ . Wohl lassen sich diese idealen Elemente durch quadratisch  $\mathfrak{L}$ -integrierbare Funktionen realisieren;

<sup>2)</sup> Eine Funktion  $h(x)$  heiße *stückweise stetig*, wenn sie nicht definiert ist auf einer endlichen Anzahl von Ebenen  $x_i = \xi_i = \text{const}$ , Kugelflächen  $r = \varrho = \text{const}$ , in einer endlichen Anzahl von Punkten  $x = \xi$  und sonst stetig ist. Die Integrale  $\int h^2 dx$  seien verstanden als Grenzwerte für  $\varepsilon \rightarrow 0$  der Integrale über die Gebiete, die aus  $\Gamma$  durch Ausschluß der  $|x_i - \xi_i| \leq \varepsilon$ ,  $|r - \varrho| \leq \varepsilon$ ,  $|x - \xi| \leq \varepsilon$  entstehen. Existieren  $\int h_1^2 dx$ ,  $\int h_2^2 dx$ , so auch  $\int h_1 h_2 dx$ .

<sup>3)</sup> Die Linearkombinationen der Elemente  $e_{\xi, \delta}$  von  $\mathfrak{H}'$

$$e_{\xi, \delta} = \frac{1}{(2\delta)^n} \quad \text{in } [x - \xi] < \delta, \quad e_{\xi, \delta} = 0 \quad \text{außerhalb}$$

liegen bekanntlich  $H$ -dicht in  $\mathfrak{H}'$ .

doch scheint es im Falle  $n > 1$  keine Vorteile zu bieten, davon Gebrauch zu machen.

Wir verwenden auch für die idealen Elemente die Schreibung

$$h H h = \int_{\Gamma} h^2 dx;$$

wenn die Elemente  $h$  Funktionen  $h(x)$  sind, werden wir die Variable  $x$  stets sichtbar machen.

Als Teilräume von  $\mathfrak{H}''$  seien die Räume  $\mathfrak{G}''$  und  $\mathfrak{G}'$  erklärt.  $\mathfrak{G}''$  bzw.  $\mathfrak{G}'$  bestehe aus allen solchen Funktionen  $g(x)$  von  $\mathfrak{H}''$ , die in  $\Gamma$  stetige bzw. stückweise stetige erste Ableitungen besitzen und für die die Formen

$$g D g = \int_{\Gamma} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 dx \quad \left[ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g \right)^2 \right],$$

$$g V g = \int_{\Gamma} v(x) g^2(x) dx$$

und also — mit  $G = D + V$  —

$$g G g = \int_{\Gamma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 + v(x) g^2(x) \right\} dx$$

existieren.

Im Falle **(3)** bei endlichem Gebiet  $\Gamma = K_R$  ist schon den Funktionen  $g(x)$  von  $\mathfrak{G}'$  die Randbedingung des Verschwindens auf  $\Omega_R$  zu stellen. Wir ersetzen sie durch die abgeschwächte Bedingung:

$$(1) \quad \int_{\Omega_R - \sigma} g^2(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathfrak{G}' \quad \sigma \rightarrow 0.$$

Im Falle **(4)** wie in den Fällen **(1)**, **(2)** ist keine Randbedingung für  $\mathfrak{G}'$  anzusetzen.

Dem Zusatzpotential  $v(x)$  seien nun folgende Bedingungen gestellt:

Fall **(1)**, **(3)**, **(4)**.

$v(x)$  sei in  $\Gamma$  stetig<sup>4)</sup> und nach unten beschränkt durch

$$(2) \quad v(x) \geq 1.$$

Fall **(2)**.  $n > 1$ .

Es sei mit irgendeinem  $P > 0$

1. für  $n \geq 3$

$$\varphi(r) = \frac{n-2}{2} \frac{1}{r} \quad 0 < r \leq P,$$

<sup>4)</sup> Im Falle  $n = 1$  genügt stückweise Stetigkeit; im nicht behandelten Falle  $n > 3$  wird von  $v$  noch mehr zu verlangen sein.

2. für  $n = 2$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \frac{A}{r}} \quad 0 < r \leq P$$

für irgendein  $A > P$ .

Dann sei  $v(x)$  stetig in  $\Gamma$  und es gebe ein  $v$ , ein  $P$  und eine Zahl  $\Theta$  aus  $0 \leq \Theta < 1$ , so daß mit  $\varphi(r) = 0$  für  $r > P$

$$(2)_\Theta \quad v(x) \geq \underline{v} - \Theta \varphi^2(r)$$

gilt. Von der Konstanten  $\underline{v}$  fordern wir noch, daß sie genügend groß ist, nämlich

$$v \geq 1 + \Theta k,$$

wo die Konstante  $k > 0$  nach Anhang (2.2) zu bestimmen ist <sup>4a)</sup>.

Wir bezeichnen noch den Fall **(2)** bei  $\Theta = 0$  mit **(2)<sub>0</sub>**, bei  $\Theta \neq 0$  mit **(2)<sub>Θ</sub>**.

Mit der in  $\mathfrak{G}'$  erklärten Form  $G = D + V$  besteht die Abschätzung

$$(3)_\Theta \quad g G g \geq (1 - \Theta) g D g + (g H g),$$

so daß also die Form  $G$  positiv halbbeschränkt ist. Diese Tatsache folgt in den Fällen **(1)**, **(2)<sub>0</sub>**, **(3)**, **(4)** mit  $\Theta = 0$  unmittelbar aus  $\underline{v} \geq 1$ . Im Falle **(2)<sub>Θ</sub>** berufen wir uns darauf, daß nach Anhang (2.2) und (2.3) die Abschätzung

$$\int_{K_P} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 - \varphi^2(r) g^2(x) \right\} dx + k \int_{K_P} g^2(x) dx \geq 0$$

gilt und also

$$(4) \quad \int_{K_P} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 + v(x) g^2 \right\} dx \geq (1 - \Theta) \int_{K_P} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx + \int_{K_P} g^2 dx^5.$$

Der Raum  $\mathfrak{G}'$  läßt sich nun mit  $G$  als Maßform zu einem Hilbertschen Raum  $\mathfrak{G}$  von Elementen  $g$  aus  $\mathfrak{H}$  abschließen. Das folgt nach Satz 3 (Teil I) aus der sogleich zu beweisenden Tatsache, daß die Form  $G$  in einem  $G$ -dichten Teilraum  $\mathfrak{F}'$  von  $\mathfrak{G}''$  zu einem Operator  $G$  führt. Für die idealen Elemente aus  $\mathfrak{G}$  seien  $D$ ,  $V$  und  $G$  wiederum symbolisch durch die entsprechenden Integrale dargestellt. Die Ungleichung **(3)<sub>Θ</sub>** gilt dann auch in  $\mathfrak{G}$ .

<sup>4a)</sup> Um das Schrödingersche Problem einzuordnen, wird man  $v(x) = -\frac{c}{r} + \text{const}$  setzen.

<sup>5)</sup> Zugleich mit **(3)<sub>Θ</sub>** folgt, was für spätere Verwendung angemerkt sei, aus **(4)**

$$g G g \geq \int_{\Gamma - K_P} v g^2 dx.$$

Die Räume  $\mathfrak{F}''$  und  $\mathfrak{F}'$  bestehen<sup>6)</sup> aus allen Funktionen  $f(x)$  aus  $\mathfrak{G}''$ , die stetige bzw. stückweise stetige zweite Ableitungen in  $\Gamma$  besitzen und für welche die Funktion  $-\Delta f(x) + v(x)f(x)$  — zur Abkürzung ist

$\Delta = \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}$  gesetzt — in  $\mathfrak{F}''$  bzw.  $\mathfrak{F}$  liegt. In  $\mathfrak{F}'$  ist der Operator  $G$  erklärt durch

$$G = -\Delta + v.$$

Im Falle (4) bei endlichem Gebiet  $\Gamma = K_P$  ist noch die Randbedingung  $\frac{\partial}{\partial r} f(x) = 0$  auf  $\Omega_R$  zu fordern. Wir stellen sie in der abgeschwächten Form: Mit jeder Funktion  $g(x)$  von  $\mathfrak{G}''$  gelte für  $f(x)$  aus  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$  im Falle (4)

$$(5) \quad \int_{\Omega_P} g(x) \frac{\partial}{\partial r} f(x) d\omega \rightarrow 0 \quad \text{für } \varrho \rightarrow R.$$

Tatsächlich liegt  $\mathfrak{F}'$   $G$ -dicht in  $\mathfrak{G}''$ <sup>7)</sup> und es gehört der Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  zur Form  $G$ ; denn es gilt für jedes  $f$  aus  $\mathfrak{F}'$  und jedes  $g$  aus  $\mathfrak{G}'$  die „Greensche Umformung“

$$(6) \quad f G g = G f H g;$$

ihren Beweis holen wir im Anhang 3 nach.

Der Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  kann nach Satz 4 (Teil I) eindeutig zu einem abgeschlossenen Operator  $G$  in einem Raum  $\mathfrak{F}$  von Elementen  $f$  fortgesetzt werden. Es liegt  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{G}$  [Bemerkung zu Satz 3 und 4 (Teil I)] und (6) bleibt in  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{G}$  bestehen.

#### 4. Spektralzerlegung. Sätze.

Man kann natürlich nicht erwarten, daß der ursprünglich erklärte Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  eine Spektralzerlegung besitzt, da er nicht abgeschlossen ist; man wird das jedoch verlangen von dem eindeutig zugeordneten abgeschlossenen Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}$ . Darüber hinaus gilt aber immerhin, daß die Eigenelemente endlicher Intervalle<sup>8)</sup> schon im Raum  $\mathfrak{F}''$  liegen, insbesondere also zweimal stetig differenzierbar sind und die Anwendung von  $G$  beliebig oft hintereinander gestatten.

<sup>6)</sup> Im Falle (1) genügt es, an Stelle der Zugehörigkeit zu  $\mathfrak{G}''$  die Existenz stetiger erster Ableitungen zu fordern; die Existenz des Integrals  $G$  folgt. Vgl. Anhang 3., Zusatz.

<sup>7)</sup> Durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen aus  $\mathfrak{G}'$  (vgl. Nr. 5. 2) kann man zunächst jede Funktion aus  $\mathfrak{F}''$   $G$ -approximieren.  $\mathfrak{G}'$  liegt  $G$ -dicht in  $\mathfrak{G}'$ .

<sup>8)</sup> Das heißt die Eigenelemente der zu endlichen Intervallen  $\Delta$  gehörenden Differenzprojektionsoperatoren  $R_{\Delta}$ , der Spektralschar  $R_\gamma$  von  $G$ .

Die Spektralzerlegbarkeit des Operators  $G$  in  $\mathfrak{F}$  beruht auf seiner Selbstadjungiertheit. Zu beweisen, daß  $G$  in  $\mathfrak{F}$  selbstadjungiert ist, ist überhaupt unsere Hauptaufgabe. Wir gehen zu dem Zweck davon aus, daß der Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}'$ , der zu  $G$  in  $\mathfrak{F}$  abgeschlossen wurde, auf andere Weise zu einem selbstadjungierten Operator fortgesetzt werden kann. Nämlich: Man bilde die zu  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  gehörige Form  $G$  in  $\mathfrak{F}'$ , schließe sie ab zu  $G$  in  $\mathfrak{G}$  nach Satz 3 (I), bilde nach Satz 7 (I) den zu  $G$  in  $\mathfrak{G}$  gehörigen selbstadjungierten Operator  $G$ , in  $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{G}$  erklärt<sup>22</sup>). Es ist dann  $G$  in  $\mathfrak{F}_1$  Fortsetzung von  $G$  in  $\mathfrak{F}'$  und also auch von  $G$  in  $\mathfrak{F}$  (Zusatz zu 7(I)).

Es genügt also,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$  zu zeigen. Hierzu berufen wir uns auf die früher, Satz 10 (I), aufgestellten Kriterien.  $(\mathfrak{F}_n) : \mathfrak{F}_n$  liegt in  $\mathfrak{F}$  oder  $(\mathfrak{G}_n) : \mathfrak{G}_n$  liegt in  $\mathfrak{F}$ . Dabei bildeten die Elemente  $f$  aus  $\mathfrak{F}_1$ , für welche  $Gf$  in

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$$

liegt, die iterierten Räume

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{F}_3, \dots$$

Der erste unserer Sätze werde je nach der Anzahl der Variablen verschieden formuliert.

A. Eine Variable.  $n = 1$ .

Satz 1 A.

1.  $\mathfrak{G}$  liegt in  $\mathfrak{F}''$ ,
2.  $\mathfrak{F}_1$  liegt in  $\mathfrak{G}''$ ,
3.  $\mathfrak{G}_1$  liegt in  $\mathfrak{F}''$ .

B. Zwei und drei Variablen.  $n = 2, 3$ .

Satz 1 B.

1.  $\mathfrak{F}_1$  liegt in  $\mathfrak{F}''$ ,
2.  $\mathfrak{G}_1$  liegt in  $\mathfrak{G}''$ ,
3.  $\mathfrak{F}_2$  liegt in  $\mathfrak{F}''$ .

Aus dem Satz 1 folgt dann

Satz 2.

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1,$$

d. h. der Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}$  ist selbstadjungiert.

In der Tat ist im Falle A Kriterium  $(\mathfrak{G}_1)$ , im Falle B Kriterium  $(\mathfrak{F}_2)$  erfüllt.

Weiter folgt aus Satz 1 und 2 unmittelbar

Satz 3. Ist auf  $f$  aus  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$  der Operator  $G$  beliebig oft anwendbar, so liegt  $f, Gf, G^2f, \dots, G^n f, \dots$  in  $\mathfrak{F}''$ .

Satz 4. 1. Es existiert zur Form  $G$  in  $\mathfrak{G}$  und zum Operator  $G$  in  $\mathfrak{F}$  eine Spektralschar  $R_\lambda$  im Sinne von Satz 12 (I).

<sup>22</sup>) Es gilt (6) auch für  $g$  in  $\mathfrak{G}$ ,  $f$  in  $\mathfrak{F}_1$ .

2. Die Eigenelemente der Differenzoperatoren  $R_{J\gamma}$  endlicher Intervalle  $\Delta\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  sind Funktionen  $f_{J\gamma}(x)$  aus  $\mathfrak{F}''$ . Mit ihnen gelten die Eigenwertungleichungen

$$\gamma_1 \int_{\Gamma} f_{J\gamma}^2(x) dx \leq \int_{\Gamma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f_{J\gamma}(x) \right)^2 + v(x) f_{J\gamma}^2(x) \right\} dx \leq \gamma_2 \int_{\Gamma} f_{J\gamma}^2(x) dx.$$

Beweis. Satz 4.1 folgt nach Satz 2 aus Satz 12 (I). Satz 4.2 folgt dann nach Zusatz 12.3 (I) aus Satz 3.

### 5. Vorbereitungen zum Beweis von Satz 1.

5.1. Die Mittelwerte. Ein Haupthilfsmittel werden die Mittelwerte von Elementen  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  über Quadrate  $[x - \xi] < \delta$  aus  $\Gamma$  sein. Zu dem Zweck führen wir die Elemente  $e_{\xi, \delta}$  aus  $\mathfrak{H}'$  ein, die durch

$$e_{\xi, \delta}(x) = \frac{1}{(2\delta)^n} \quad \text{in} \quad [x - \xi] < \delta,$$

$$e_{\xi, \delta}(x) = 0 \quad \text{außer} \quad [x - \xi] < \delta$$

definiert sind. Die Mittelwerte von  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  sind dann durch

$$e_{\xi, \delta} H h = \int_{\Gamma} e_{\xi, \delta} h dx$$

erklärt, wofür wir auch die Schreibung

$$\frac{1}{(2\delta)^n} \int_{[x-\xi] < \delta} h dx$$

verwenden.

Die Grenzwerte der Mittelwerte beim Zusammenziehen des Quadrates auf den Mittelpunkt bezeichnen wir — so weit sie existieren — mit  $h_{\xi}$ :

$$\frac{1}{(2\delta)^n} \int_{[x-\xi] < \delta} h dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} h_{\xi}$$

### 5.2. Räume $\dot{\mathfrak{H}}', \dots, \dot{\mathfrak{H}}''$ .

Oft werden Funktionen der Räume  $\mathfrak{H}', \dots, \mathfrak{H}''$  auftreten, die außerhalb irgend eines Gebietes  $\Gamma_0$  verschwinden; die von ihnen gebildeten, offenbar in  $\mathfrak{H}$  dicht liegenden Teilräume bezeichnen wir beziehungsweise mit

$$\dot{\mathfrak{H}}', \dots, \dot{\mathfrak{H}}''.$$

Für die Funktionen  $h(x)$  aus  $\dot{\mathfrak{H}}'$  ist der Operator  $V$  durch

$$Vh = v(x) h(x)$$

erklärt. Für Elemente  $f$  aus  $\dot{\mathfrak{H}}'$  ist der Operator

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x)$$

erklärt und es gilt für  $f$  aus  $\mathfrak{F}'$

$$(7) \quad \int_F \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial}{\partial x} f \right) dx = - \int_F g \Delta f dx$$

ohne weiteres, wenn  $g$  zu  $\mathfrak{G}'$  gehört; diese Umformung überträgt sich auf alle  $g$  aus  $\mathfrak{G}$ , da die Form  $\int_F \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx$  in  $\mathfrak{G}$  beschränkt erklärt ist.

5.3. Der Operator  $S_\sigma$ . Ein weiteres Hilfsmittel wird eine Operation sein, die aus jedem Element ein solches erzeugt, das in genügender Ferne und in Umgebung der singulären Stelle verschwindet. Zu dem Zweck wählen wir eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $s_\sigma(x)$  mit folgenden Eigenschaften

$$(8) \quad \begin{aligned} s_\sigma(x) &= 1 && \text{in } \Gamma_\sigma, \\ 0 < s_\sigma(x) &\leq 1 && \text{in } \Gamma_{\sigma/2} - \Gamma_\sigma, \\ s_\sigma(x) &= 0 && \text{außer } \Gamma_{\sigma/2}. \end{aligned}$$

Wir erklären den Operator  $S_\sigma$  in  $\mathfrak{H}'$  durch

$$S_\sigma h = s_\sigma(x) h(x);$$

wegen seiner Beschränktheit ist er auf ganz  $\mathfrak{H}$  fortzusetzen. Offenbar erzeugt  $S_\sigma$  aus Elementen von  $\mathfrak{G}'$  und  $\mathfrak{G}''$  wieder solche. Wir zeigen:  $S_\sigma$  ist in  $\mathfrak{G}$  mit  $G$  als Maßform beschränkt. Zu dem Zweck genügt es offenbar, die Beschränktheit in  $\mathfrak{G}'$  nachzuweisen, d. h. — beachte <sup>9)</sup>, daß  $S_\sigma$  in bezug auf  $G$  nicht symmetrisch ist — daß für zwei Elemente  $g$  und  $g_1$  von  $\mathfrak{G}'$

$$|S_\sigma g G g_1|^2 \leq C (g G g) (g_1 G g_1)$$

gilt. Ist  $\left| \frac{\partial s_\sigma}{\partial x} \right| \leq c_1$ ,  $|v(x)| \leq c_2$  in  $\Gamma_{\sigma/2}$ , so gilt

$$\begin{aligned} |S_\sigma g D g_1| &= \left| \int_F s_\sigma(x) \sum \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) dx \right. \\ &+ \left. \int \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} s_\sigma(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \right) g(x) dx \right| \leq \sqrt{g D g} \sqrt{g_1 D g_1} + c_1 \sqrt{g H g} \sqrt{g_1 D g_1}, \\ |S_\sigma g V g_1| &\leq c_2 \sqrt{g H g} \sqrt{g_1 H g_1}. \end{aligned}$$

Beachten wir noch Ungleichung (3)<sub>σ</sub>, so ergibt sich mit geeigneter Konstanten  $C$  in der Tat  $|S_\sigma g G g_1| \leq C \sqrt{g G g} \sqrt{g_1 G g_1}$ .

<sup>9)</sup> Vgl. Fußnoten <sup>7)</sup> und <sup>11)</sup> (Teil I).



## 6. Drei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Wenn für das Element  $h$  aus  $\mathfrak{S}$  der Grenzwert  $h_{\xi}$  stetig in  $\xi$  existiert, derart, daß  $\int_F e_{\xi, \delta} h dx \rightarrow h_{\xi_0}$  strebt für  $\xi = \xi_\delta \rightarrow \xi_0$ , dann

1. existiert

$$\int_F h_x^2 dx,$$

2. ist  $h$  eine Funktion  $h(x)$  aus  $\mathfrak{S}''$  mit  $h(x) = h_x$ .

Beweis. Zunächst bemerken wir die für stetiges  $h_x$  gültige Relation

$$(9) \quad \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{[x-\xi] < \delta} h_x dx = \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{[x-\xi] < \delta} h dx,$$

wobei die Integration der linken Seite im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist. In der Tat sei andernfalls  $[x-\xi_1] < \delta_1$  ein Quadrat, für welches

$$\frac{1}{(2\delta_1)^n} \left| \int_{[x-\xi_1] < \delta_1} h_x dx - \int_{[x-\xi_1] < \delta_1} h dx \right| = \alpha > 0$$

gilt. Dann zerlegen wir  $[x-\xi_1] < \delta_1$  in  $2^n$  Teilgebiete der Seite  $2\delta_1 = \delta_1$ . Für eines von ihnen,

$$[x-\xi_2] < \delta_2 = \frac{\delta_1}{2},$$

muß dann auch gelten

$$\frac{1}{(2\delta_2)^n} \left| \int_{[x-\xi_2] < \delta_2} h_x dx - \int_{[x-\xi_2] < \delta_2} h dx \right| \geq \alpha.$$

So fortschließend entsteht eine Schachtelfolge von Gebieten

$$[x-\xi_v] < \delta_v = \frac{\delta_1}{2^v},$$

die gegen einen Grenzpunkt  $\xi_0$  konvergieren. Wegen der Stetigkeit von  $h_{\xi}$  gilt aber für  $v \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{(2\delta_v)^n} \int_{[x-\xi_v] < \delta_v} h_x dx \rightarrow h_{\xi_0}, \quad \text{neben} \quad \frac{1}{(2\delta_v)^n} \int_{[x-\xi_v] < \delta_v} h dx \rightarrow h_{\xi_0},$$

woraus der Widerspruch  $|h_{\xi_0} - h_{\xi_0}| \geq \alpha$  entspringt.

Wir bemerken nun, daß die Funktion  $s_\sigma(x) h_x$  ein Element

$$h_\sigma^* = s_\sigma(x) h_x$$

aus  $\mathfrak{S}''$  ist. Die obige Gleichung (9) ist dann für alle Quadrate  $[x-\xi] < \delta$  aus  $F$ , gleichwertig mit

$$\int_F (h_\sigma^* - h) e_{\xi, \delta} dx = 0.$$

Ist nun  $k = k(x)$  ein Element aus  $\mathfrak{H}''$ , so läßt sich sicher die Funktion  $S_\sigma k = s_\sigma(x) k(x)$  durch Linearkombinationen derjenigen  $e_{\xi, \sigma}$  approximieren, für die  $[x - \xi] < \delta$  in  $\Gamma_\tau$  liegt mit  $\tau = \frac{\sigma}{3}$ , so daß also gilt:

$$\int_{\Gamma} (h_\tau^* - h) S_\sigma k \, dx = 0.$$

Beachtet man noch  $S_\sigma h_\tau^* = h_\sigma^*$ , so folgt

$$\int_{\Gamma} (h_\sigma^* - S_\sigma h) k \, dx = 0.$$

Es ist also

$$S_\sigma h = h_\sigma^* = s_\sigma(x) h_x.$$

Nun gilt für jedes Element  $h$  aus  $\mathfrak{H}$  die Ungleichung

$$\int_{\Gamma} (S_\sigma h)^2 \, dx \leq \int_{\Gamma} h^2 \, dx,$$

weil sie für die  $h$  aus  $\mathfrak{H}'$  gilt. Insbesondere ist also

$$\int_{\Gamma_\sigma} h_x^2 \, dx = \int_{\Gamma_\sigma} h_\sigma^{*2}(x) \, dx \leq \int_{\Gamma} h_\sigma^{*2}(x) \, dx = \int_{\Gamma} (S_\sigma h)^2 \, dx \leq \int_{\Gamma} h^2 \, dx.$$

Daraus folgt der erste Teil der Behauptung: die Existenz des Integrals  $\int_{\Gamma} h_x^2 \, dx$ . Überdies ist damit sichergestellt, daß  $h_x$  eine Funktion  $h^*(x)$  aus  $\mathfrak{H}''$  ist, für die  $S_\sigma h^* = s_\sigma(x) h_x = S_\sigma h$  und also

$$\int_{\Gamma} S_\sigma k (h^* - h) \, dx = 0$$

gilt; da aber die  $S_\sigma k$  dicht liegen in  $\mathfrak{H}$ , folgt

$$h^* = h.$$

Darin liegt der zweite Teil der Behauptung.

Ferner gilt der

Hilfssatz 2. Ein Element  $g$  aus  $\mathfrak{G}$  sei eine Funktion  $g(x)$  aus  $\mathfrak{H}''$  und  $g(x)$  sei stetig differenzierbar.

Dann

1. existiert

$$\int_{\Gamma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 \right\} dx \text{ und } \int_{\Gamma} v(x) g^2(x) \, dx,$$

2. liegt  $g$  in  $\mathfrak{G}''$ .

Zum Beweise ziehen wir die Form  $G_\sigma$  heran, die in  $\mathfrak{G}'$  durch

$$g G_\sigma g = \int_{\Gamma_\sigma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 + v(x) g^2(x) \right\} dx - \Theta \, \psi(\sigma) \int_{\Omega_\sigma} g^2(x) \, d\omega$$

erklärt sei mit  $\psi(r) = \varphi(r) r^{n-1}$  und  $\Theta = 0$  außer im Falle (2)<sub>o</sub>.

Es ist

$$g G_\sigma g = (1 - \Theta) \int_{\Gamma_\sigma} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx + \int_{\Gamma_\sigma} \{v + \Theta \varphi^2(r)\} g^2 dx \\ + \Theta \left[ \int_{\Gamma_\sigma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 - \varphi^2(r) g^2 \right\} dx - \psi(\sigma) \int_{\Omega_\sigma} g^2 d\omega \right].$$

Aus den Eigenschaften von  $v(x)$  — und im Falle **(2)**<sub>o</sub> nach Anhang (2. 1), (2. 3) — erkennen wir:  $g G_\sigma g$  nimmt bei  $\sigma \rightarrow 0$  nicht ab und strebt gegen  $g G g$ . Insbesondere ist

$$g G_\sigma g \leq g G g.$$

Es ist somit die Form  $G_\sigma$  in  $\mathfrak{G}'$  beschränkt und kann also auf ganz  $\mathfrak{G}$  fortgesetzt werden, wobei diese Ungleichung bestehen bleibt.

Da der Operator  $S_\sigma$  in  $\mathfrak{G}'$  mit  $G$  als Maßform beschränkt ist, ist die in  $\mathfrak{G}'$  gültige Identität

$$S_\sigma g G_\sigma S_\sigma g = g G_\sigma g$$

auch in  $\mathfrak{G}$  gültig.

Liegt nun die stetig differenzierbare Funktion  $g(x)$  in  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}''$ , so liegt sicher  $S_\sigma g = s_\sigma(x) g(x)$  in  $\mathfrak{G}''$  und es ist für  $\sigma < \sigma_0$  — im Falle **(2)**<sub>o</sub> nach Anhang (2. 0) —

$$(1 - \Theta) \int_{\Gamma_\sigma} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx + \int_{\Gamma_\sigma} (v + \Theta \varphi^2(r)) g^2 dx \\ \leq \int_{\Gamma_\sigma} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 + v(x) g^2(x) \right\} dx - \Theta \psi(\sigma) \int_{\Omega_\sigma} g^2(x) d\omega \\ = S_\sigma g G S_\sigma g = g G_\sigma g \leq g G g.$$

Die linke Seite bleibt also mit wachsendem  $\sigma$  beschränkt. Daraus folgt zunächst die Existenz des Integrals

$$\int \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^2 dx$$

und — im Falle **(2)**<sub>o</sub> nach Hilfssatz (2. 3) — die Existenz von

$$\int_{\Gamma} v(x) g^2(x) dx.$$

Damit ist die erste Behauptung des Hilfssatzes 2 bewiesen. Der zweite Teil:  $g$  liegt in  $\mathfrak{G}''$  folgt unmittelbar für die Fälle **(1)**, **(2)**, **(4)** nach der Erklärung von  $\mathfrak{G}''$ .

Im Falle **(3)** muß noch nachgewiesen werden, daß  $g(x)$  auch die Randbedingung

$$(1) \quad \int_{\Omega_{R-\sigma}} g^2(x) dx \rightarrow 0 \quad \sigma \rightarrow 0$$

erfüllt. Wir zeigen zu dem Zweck, daß diese Randbedingung gleichwertig ist mit der folgenden:

Es gibt eine Konstante  $C > 0$ , so daß für  $\varrho > \varrho_0 > 0$  gilt:

$$(1^*) \quad \int_{\Omega_\varrho} g^2 d\omega \leq 2C(R - \varrho) \int_{K_{\varrho,R}} \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx.$$

In der Tat: Aus  $(1^*)$  folgt unmittelbar die Gültigkeit von (1). Umgekehrt: Ist (1) erfüllt, so ziehe man Ungleichung

$$\int_{\Omega_\varrho} g^2 d\omega \leq 2 \int_{\Omega_\tau} g^2 d\omega + 2C(R - \varrho) \int_{K_{\varrho,R}} \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx, \quad \varrho < \tau < R$$

heran, die aus (1.1) (Anhang) mit  $C = \varrho_0^{1-\alpha}$  folgt; läßt man

$$\tau = R - \sigma \rightarrow R$$

streben, so ergibt sich  $(1^*)$ .

Ungleichung  $(1^*)$  erweist sich unmittelbar als gleichwertig mit der folgenden Bedingung:

Es gibt eine Konstante  $C$ , so daß für alle  $\varrho_1, \varrho_2$  aus

$$\varrho_0 \leq \varrho_1 < \varrho_2 < R$$

gilt:

$$(1^{**}) \quad \int_{K_{\varrho_1, \varrho_2}} g^2 dx \leq 2C(R - \varrho_1) \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} r^{n-1} dr \int_{K_{\varrho_1, R}} \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx.$$

Denn aus ihr folgt für  $\varrho_2 \rightarrow \varrho_1 = \varrho$  Ungleichung  $(1^*)$ . Umgekehrt folgert man aus dieser das Bestehen von  $(1^{**})$ , wenn man beachtet, daß es einen Zwischenwert  $\varrho$  gibt, so daß gilt

$$\int_{K_{\varrho_1, \varrho_2}} g^2 dx = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} r^{n-1} dr \int_{\Omega_\varrho} g^2 d\omega.$$

Beide Seiten von  $(1^{**})$  stellen in  $\mathfrak{G}'$  beschränkte Formen dar, die auf  $\mathfrak{G}$  fortzusetzen sind. Es gilt  $(1^{**})$  also auch für die Funktion  $g(x)$  aus  $\mathfrak{H}''$  und  $\mathfrak{G}$ , für die soeben die Existenz des Integrals  $\int_{\mathfrak{G}} \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx$

bewiesen wurde; für  $g(x)$  werden diese fortgesetzten Formen aber auch durch die Integrale dargestellt. Also ist für diese Funktionen  $g(x)$  auch die Bedingung (1) erfüllt; sie liegen also in  $\mathfrak{G}''$ .

Hilfssatz 3. Ein Element  $f$  aus  $\mathfrak{F}_1$  sei eine Funktion aus  $\mathfrak{G}''$ ,  $Gf = h(x)$  liege in  $\mathfrak{H}''$  und  $f(x)$  besitze stetige zweite Ableitungen. Dann gilt

$$1. \quad Gf = -\Delta f(x) + v(x)f(x),$$

$$2. \quad f \text{ liegt in } \mathfrak{F}''.$$

Beweis. Es sei  $g(x)$  ein Element aus  $\mathfrak{G}'$ ; dann gilt, da  $g$  in  $\mathfrak{G}$ ,  $f$  in  $\mathfrak{F}_1$  liegt, die Formel (6). Da  $g$  und  $f$  in  $\mathfrak{G}'$ ,  $Gf$  in  $\mathfrak{H}'$  liegen, geht sie über in

$$\int_{\Gamma} g(x) h(x) dx = \int_{\Gamma} \left\{ \sum \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + v(x) g(x) f(x) \right\} dx$$

oder, indem man partiell integriert,

$$\int_{\Gamma} g(x) h(x) dx = \int_{\Gamma} g(x) \{-\Delta f(x) + v(x) f(x)\} dx.$$

Da  $\mathfrak{G}'$  dicht liegt in  $\mathfrak{H}$ , folgt

$$Gf = h(x) = -\Delta f(x) + v(x) f(x)$$

und:  $h(x)$  liegt in  $\mathfrak{H}'$  geht über in:  $f$  liegt in  $\mathfrak{F}'$  nach der Erklärung dieses Raumes.

Nur im Falle (4) ist noch zu zeigen, daß  $f(x)$  die Randbedingung (5) erfüllt. Die Relation

$$\int_{\Gamma} \left\{ g(x) Gf(x) - \sum \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) - v(x) g(x) f(x) \right\} dx = 0,$$

die für alle Elemente  $g(x)$  aus  $\mathfrak{G}'$  gilt, besagt aber, daß dieses Integral über  $K_{R-\sigma}$  erstreckt, für  $\sigma \rightarrow 0$  verschwindet. Nach bekannter Umformung entsteht daraus

$$(5) \quad \int_{\Omega_{R-\sigma}} g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) dx \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

für alle Funktionen  $g(x)$  aus  $\mathfrak{G}'$ .

## 7. Beweis von Satz 1 A.

Die Weiterführung unseres Beweises soll je nach der Anzahl  $n$  der unabhängigen Veränderlichen gesondert durchgeführt werden.

A. Eine unabhängige Veränderliche,  $n = 1$ .

Wir ziehen die Grundlösung

$$K(x - \xi) = -\frac{1}{2} |x - \xi|$$

des Operators  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$  heran und bilden

$$k_t = k_s(x) = -\frac{1}{2} s_\sigma(x) |x - \xi|,$$

wobei  $s_\sigma(x)$  nach 5.3 gewählt sei.  $k_t(x)$  ist als Funktion von  $x$  ein Element von  $\mathfrak{G}'$ , aber nicht von  $\mathfrak{F}'$ , da die erste Ableitung  $\frac{d}{dx} k_t(x)$

bei  $x = \xi$  unstetig ist. Die zweite Ableitung  $\frac{d^2}{dx^2} k_\xi(x) = \Delta k_\xi(x)$  ist aber wieder ein Element von  $\mathfrak{H}''$  und verschwindet in  $\Gamma_\sigma$  und außer  $\Gamma_{\sigma/2}$ .

Hilfssatz 4A. Es ist für alle  $g$  aus  $\mathfrak{G}$  bzw.  $h$  aus  $\mathfrak{H}$

$$\int_I k_\xi h dx \quad \text{stetig differenzierbar,}$$

$$\int_I \Delta k_\xi h dx \quad \text{stetig,}$$

$$\int_I \frac{d}{dx} k_\xi \frac{d}{dx} g dx^{10)} \quad \text{stetig}$$

in  $\xi$ , wenn  $\xi$  in  $\Gamma_\sigma$  liegt.

Beweis. Diese Eigenschaften dürfen als bekannt angesehen werden, vorausgesetzt, daß die Elemente  $h, g$  stetige bzw. stetig differenzierbare Funktionen sind. Dann folgen sie aber allgemein, wenn noch gezeigt wird, daß für die drei Funktionen

$$h_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (k_{\xi+\varepsilon} - k_\xi), \quad h_\varepsilon = \frac{d}{d\xi} k_{\xi+\varepsilon}, \quad h_\varepsilon = \Delta k_{\xi+\varepsilon}$$

und für  $g_\varepsilon = k_{\xi+\varepsilon}$  die Formen

$$\int_I h_\varepsilon^2 dx \quad \text{und} \quad \int_I \left( \frac{d}{dx} g_\varepsilon \right)^2 dx$$

in  $\varepsilon$  beschränkt bleiben. Diese Beschränktheiten sind nach der Definition von  $k_\xi(x)$  unmittelbar festzustellen.

Für die Funktionen  $k_\xi(x)$  bilden wir sodann die  $\xi$ -Integrale

$$k_{\xi, \delta} = \frac{1}{2\delta} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} k_\eta d\eta.$$

Dabei sei stets vorausgesetzt, daß  $|x - \xi| < \delta$  in  $\Gamma_\sigma$  liege. Dann gilt

Hilfssatz 5A. Die Funktionen  $k_{\xi, \delta}(x)$  sind stetig einmal, stückweise stetig zweimal differenzierbar und es ist

$$-\frac{d^2}{dx^2} k_{\xi, \delta}(x) = -\Delta k_{\xi, \delta}(x) = e_{\xi, \delta}(x) \quad \text{in } \Gamma_\sigma.$$

Es liegt also

$$k_{\xi, \delta}(x) \quad \text{in } \mathfrak{H}'.$$

Beweis. Man errechnet

$$\begin{aligned} k_{\xi, \delta} &= -\frac{1}{4\delta} \{ (x - \xi)^2 + \delta^2 \} \quad \text{in } |x - \xi| < \delta \\ &= -\frac{1}{2} |x - \xi|, \quad \text{wenn } x \text{ sonst in } \Gamma_\sigma \text{ liegt;} \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Vgl. Nr. 5. 2.

außer  $\Gamma_\sigma$  ist  $k_{\xi, \delta}$  nach  $x$  beliebig oft stetig differenzierbar und außer  $\Gamma_{\sigma_1}$  ist  $k_{\xi, \delta} = 0$ . Daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 6 A. Es streben bei  $\delta \rightarrow 0$  und  $\xi = \xi_\delta \rightarrow \xi_0$  für jedes  $g$  aus  $\mathfrak{G}$

$$\int_{\Gamma'} \frac{d}{dx} k_{\xi, \delta} \frac{d}{dx} g dx \rightarrow \int_{\Gamma'} \frac{d}{dx} k_{\xi_0} \frac{d}{dx} g dx$$

$$\int_{\Gamma'} (\Delta k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta}) g dx \rightarrow \int_{\Gamma'} \Delta k_{\xi} g dx.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der in  $x$  gleichmäßigen Konvergenz

$$\frac{d}{dx} k_{\xi, \delta} \rightarrow \frac{d}{dx} k_{\xi_0}$$

außer in einer Umgebung  $|x - \xi_0| < \varepsilon$  von  $x = \xi_0$ . Es ist aber

$$\int_{|x - \xi_0| < \varepsilon} \left( \frac{d}{dx} k_{\xi_0, \delta} \right)^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 0.$$

Die zweite folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz

$$\Delta k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta} = \Delta k_{\xi, \delta} \rightarrow \Delta k_{\xi} \text{ außer } \Gamma_\sigma,$$

$$\Delta k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta} = 0 = \Delta k_{\xi} \text{ in } \Gamma_\sigma.$$

Nunmehr sind wir in der Lage

Satz 1.1 A:

$\mathfrak{G}$  liegt in  $\mathfrak{H}''$

zu beweisen. Es sei  $g$  irgendein Element aus  $\mathfrak{G}$ . Dann ist nach Hilfssatz 5 A und, da  $k_{\xi, \delta}$  in  $\mathfrak{H}'$  liegt, nach Nr. 5.2

$$\frac{1}{2\delta} \int_{|x - \xi| < \delta} g dx = \int_{\Gamma'} \{e_{\xi, \delta} + \Delta k_{\xi, \delta}\} g dx + \int_{\Gamma'} \frac{d}{dx} k_{\xi, \delta} \frac{d}{dx} g dx;$$

nach Hilfssatz 6 A existiert also für  $\delta \rightarrow 0$  und  $\xi = \xi_\delta \rightarrow \xi_0$  der Grenzwert  $g_{\xi_0}$  und es ist

$$(11 A) \quad g_{\xi} = \int_{\Gamma'} \Delta k_{\xi} g dx + \int_{\Gamma'} \frac{d}{dx} k_{\xi} \frac{d}{dx} g dx.$$

Nach Hilfssatz 4 A ist  $g_{\xi}$  stetig in  $\Gamma_\sigma$  und da  $\sigma$  willkürlich war, auch in  $\Gamma$ ; nach Hilfssatz 1 liegt dann  $g$  in  $\mathfrak{H}''$  mit  $g(x) = g_{\xi}$ .

Satz 1.2 A:

$\mathfrak{H}_1$  liegt in  $\mathfrak{G}''$ .

Beweis. Sei  $f$  ein Element von  $\mathfrak{H}_1 < \mathfrak{G}$ ;  $Gf = h$  liege in  $\mathfrak{H}$ . Nach Satz 1.1 liegt  $f = f(x)$  in  $\mathfrak{H}''$  und es gilt nach (11 A)

$$f(\xi) = \int_{\Gamma'} \Delta k_{\xi}(x) f(x) dx - \int_{\Gamma'} v(x) k_{\xi}(x) f(x) dx + \int_{\Gamma'} \left\{ \frac{d}{dx} k_{\xi} \frac{d}{dx} f + v k_{\xi} f \right\} dx;$$



ferner, da  $k_\xi$  in  $\mathfrak{G}$  liegt, nach (6)

$$(12A) \quad f(\xi) = \int_{\Gamma} \Delta k_\xi(x) f(x) dx - \int_{\Gamma} v(x) k_\xi(x) f(x) dx + \int_{\Gamma} k_\xi h dx.$$

Die ersten beiden Integrale sind, da  $v$  und  $f$  stetig sind, nach  $\xi$  stetig differenzierbar, ebenso das letzte Integral nach Hilfssatz 4 A.

Also ist  $f(\xi)$  stetig nach  $\xi$  differenzierbar und nach Hilfssatz 2 liegt  $f$  in  $\mathfrak{G}''$ .

Satz 1.3 A:

$\mathfrak{G}_1$  liegt in  $\mathfrak{G}''$ .

Beweis. Sei  $f$  ein Element aus  $\mathfrak{F}_1$ , so daß  $Gf$  in  $\mathfrak{G}$  liegt. Dann liegt nach Satz 1.1  $Gf = h$  in  $\mathfrak{G}''$  und es geht die Darstellung (12 A) über in

$$(13A) \quad f(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (x - \xi) \{h(x) - v(x)f(x)\} dx \\ + \int_{\Gamma_{0/3} - \Gamma_0} \{k_\xi(x) \{h(x) - v(x)f(x)\} + \Delta k_\xi(x) f(x)\} dx.$$

Da nunmehr auch  $h$  stetig ist, entsteht durch zweimaliges Differenzieren die stetige Funktion

$$\frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi) = -h(\xi) + v(\xi)f(\xi) \\ + \int_{\Gamma_{0/3} - \Gamma_0} \left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} k_\xi(x) \{h(x) - v(x)f(x)\} + \frac{d^2}{d\xi^2} \Delta k_\xi(x) f(x) \right\} dx.$$

Nach Hilfssatz 3 liegt dann  $f$  in  $\mathfrak{G}''$ .

### 8. Beweis von Satz 1 B.

B. Zwei und drei unabhängige Veränderliche,  $n = 2; 3$ . An Stelle der Grundlösungen mit  $|x - \xi| = \sqrt{\sum_{v=1}^n (x_v - \xi_v)^2}$

$$K(x - \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - \xi| \quad \text{für } n = 2,$$

$$K(x - \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \xi|} \quad \text{für } n = 3$$

betrachten wir die iterierten Grundlösungen

$$K^2(x - \xi) = -\frac{1}{8\pi} |x - \xi|^2 \{ \ln |x - \xi| - 1 \} \quad \text{für } n = 2,$$

$$K^2(x - \xi) = \frac{1}{8\pi} |x - \xi| \quad \text{für } n = 3,$$

die so gewählt sind, daß

$$\Delta K^2 = K$$

ist. Alsdann setzen wir

$$k_t = k_t(x) = s_\sigma(x) K^2(x - \xi).$$

Es ist  $k_t(x)$  außer bei  $x = \xi$  stetig zweimal differenzierbar; es existiert

aber  $\int_F \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} k_t(x) \right)^2 dx$  und  $\int_F (\Delta k_t(x))^2 dx$ ;  $\Delta k_t(x)$  ist außer bei  $x = \xi$

zweimal stetig differenzierbar und  $\Delta^2 k_t(x)$  ist stetig; mehr noch  $\Delta^2 k_t(x) = 0$  in  $\Gamma_\sigma$ .

Also liegt  $k_t$  in  $\mathfrak{G}'$ ,  $\Delta k_t$  in  $\mathfrak{H}'$ ,  $\Delta^2 k_t$  in  $\mathfrak{H}''$ ; mit  $v \Delta k_t$  sei die in  $\mathfrak{H}'$  liegende Funktion  $v(x) \Delta k_t(x)$  bezeichnet.

Hilfssatz 4B. Es ist für alle  $h$  aus  $\mathfrak{H}$ ,  $g$  aus  $\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned} \int_F \Delta^2 k_t h dx, & \quad \text{stetig,} \\ \int_F \Delta k_t h dx, & \quad \text{stetig,} \\ \int_F v \Delta k_t h dx, & \quad \text{stetig,} \\ \int_F k_t h dx, & \quad \text{stetig zweimal differenzierbar,} \\ \int_F \sum \frac{\partial}{\partial x} k_t \frac{\partial}{\partial x} g dx & \quad \text{stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

in  $\xi$  aus  $\Gamma_\sigma$ .

Die Behauptungen dürfen wieder als bekannt angenommen werden für zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $h$  und  $g$ . Da diese dicht liegen in  $\mathfrak{H}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  mit  $H$  bzw.  $G$  als Maß, genügt es, mit  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  zu zeigen:

$$1. \Delta^2 k_{t+\varepsilon}, \Delta k_{t+\varepsilon}, v \Delta k_{t+\varepsilon}, \frac{\partial^2}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu} k_{t+\varepsilon}, \frac{1}{|\varepsilon|} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} k_{t+\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} k_t \right)$$

sind Elemente  $h_\varepsilon$ , für die  $\int_F h_\varepsilon^2 dx$  in  $|\varepsilon|$  beschränkt bleibt;

$$2. \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} k_{t+\varepsilon}, \frac{1}{|\varepsilon|} (k_{t+\varepsilon} - k_t) \text{ sind Elemente } g_\varepsilon, \text{ für die } \int_F \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g_\varepsilon \right)^2 dx$$

in  $|\varepsilon|$  beschränkt bleibt. Diese Beschränktheiten sind aus den Eigenschaften von  $k_t$  unmittelbar zu entnehmen.

Wieder bilden wir die Mittelwerte

$$\frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|\eta - \xi| < \delta} k_\eta d\eta = k_{\xi, \delta}.$$

<sup>11)</sup> Es liegt bei  $n = 2$   $k_t$  in  $\mathfrak{H}'$ , bei  $n = 3$  in  $\mathfrak{H}$ .

Dann gilt

Hilfssatz 5B. Die Funktion  $k_{\xi, \delta}(x)$  ist stetig dreimal und  $\Delta k_{\xi, \delta}$  außer bei  $x = \xi$  zweimal differenzierbar; es ist

$$-\Delta k_{\xi, \delta}(x) = e_{\xi, \delta}(x) \quad \text{in } \Gamma_\sigma.$$

Es liegt also  $\Delta k_{\xi, \delta}$  in  $\mathfrak{F}'$ .

Beweis. Liegt  $x$  außer  $\Gamma_\sigma$ , so ist  $k_{\xi, \delta}$  beliebig oft stetig differenzierbar; in  $\Gamma_\sigma$  aber ist

$$k_{\xi, \delta} = \int_{|\eta - \xi| < \delta} K^2(x - \eta) d\eta$$

und von diesem Integral sind die geforderten Eigenschaften bekannt.

Hilfssatz 6B.

Es streben bei  $\delta \rightarrow 0$  und  $\xi = \xi_\delta \rightarrow \xi_0$  für jedes  $h$  aus  $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \int_f \Delta k_{\xi, \delta} h dx &\rightarrow \int_f \Delta k_{\xi_0} h dx, \\ \int_f v \Delta k_{\xi, \delta} h dx &\rightarrow \int_f v \Delta k_{\xi_0} h dx, \\ \int_f (\Delta^2 k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta}) h dx &\rightarrow \int_f \Delta^2 k_{\xi_0} h dx. \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen folgen daraus, daß gleichmäßig in  $x$

$$\Delta k_{\xi, \delta}(x) \rightarrow \Delta k_{\xi_0}(x)$$

strebt außer in einer Umgebung  $|x - \xi_0| < \varepsilon$ , und daß dort

$$\begin{aligned} \int_{|x - \xi_0| < \varepsilon} (\Delta k_{\xi, \delta})^2 dx &= \int_{|x - \xi_0| < \varepsilon} \left( \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|\eta - \xi| < \delta} K(\eta - x) d\eta \right)^2 dx \\ &\leq \int_{|x - \xi_0| < \varepsilon} \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|\eta - \xi| < \delta} (K(\eta - x))^2 d\eta dx \\ &\leq \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|x - \xi_0| < \varepsilon} \int_{|\eta - x| < \varepsilon + 2\delta + |\xi - \xi_0|} (K(\eta - x))^2 dx d\eta \\ &\leq \int_{|x'| < \varepsilon + 2\delta + |\xi - \xi_0|} (K(x'))^2 dx' \end{aligned}$$

zugleich mit  $\varepsilon$  und  $\delta$  gegen Null strebt.

Die dritte Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz

$$\Delta^2 k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta} = \Delta^2 k_{\xi, \delta} \rightarrow \Delta^2 k_{\xi_0} \quad \text{außer } \Gamma_\sigma,$$

$$\Delta^2 k_{\xi, \delta} + e_{\xi, \delta} = 0 = \Delta^2 k_{\xi_0} \quad \text{in } \Gamma_\sigma.$$

Nunmehr können sofort die drei Sätze 1 bewiesen werden.  
Satz 1.1 B

$\mathfrak{F}_1$  liegt in  $\mathfrak{H}''$ .

Beweis. Für  $f_1$  aus  $\mathfrak{F}_1$ ,  $Gf_1 = h$  aus  $\mathfrak{H}$  gilt — beachte Nr. 5.2 und daß  $\Delta k_{\xi, \delta}$  in  $\mathfrak{F}'$ ,  $f_1$  in  $\mathfrak{G}$  liegt —

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\delta)^n} \int_{|x-\xi|<\delta} f_1 dx &= \int_{\Gamma} (e_{\xi, \delta} + \Delta^2 k_{\xi, \delta}) f_1 dx + \int_{\Gamma} \sum \frac{\partial}{\partial x} \Delta k_{\xi, \delta} \frac{\partial}{\partial x} f_1 dx \\ &= \int_{\Gamma} (e_{\xi, \delta} + \Delta^2 k_{\xi, \delta}) f_1 dx - \int_{\Gamma} v \Delta k_{\xi, \delta} f_1 dx + \int_{\Gamma} \Delta k_{\xi, \delta} h dx, \end{aligned}$$

da  $f_1$  in  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\Delta k_{\xi, \delta}$  in  $\mathfrak{F}'$  liegt und demnach (6) gilt.

Nach Hilfssatz 6 B existiert also für  $\delta \rightarrow 0$  und  $\xi = \xi_\delta \rightarrow \xi_0$  der Grenzwert  $f_{1\xi}$  und es ist in  $\Gamma_0$

$$(11 B) \quad f_{1\xi} = \int_{\Gamma} \Delta^2 k_{\xi} f_1 dx - \int_{\Gamma} v \Delta k_{\xi} f_1 dx + \int_{\Gamma} \Delta k_{\xi} h dx.$$

Nach Hilfssatz 4 B ist  $f_{1\xi}$  stetig in  $\Gamma_0$  und also in  $\Gamma$ , und nach Hilfssatz 1 liegt  $f_1$  in  $\mathfrak{H}''$  mit  $f_1(x) = f_{1x}$ .

Satz 1.2 B

$\mathfrak{G}_1$  liegt in  $\mathfrak{G}''$ .

Beweis. Liege  $g_1$  in  $\mathfrak{G}_1$ , also in  $\mathfrak{F}_1$ , und  $Gg_1 = g$  in  $\mathfrak{G}$ .

Nach Satz 1.1 B liegt  $g_1 = g_1(x)$  in  $\mathfrak{H}''$  und es gilt, da  $k_{\xi, \delta}$  in  $\mathfrak{F}'$  liegt, nach Nr. 5.2

$$(12 B) \quad g_1(\xi) = \int_{\Gamma} \{ \Delta^2 k_{\xi}(x) - v(x) \Delta k_{\xi}(x) \} g_1(x) dx \\ - \int_{\Gamma} \sum \frac{\partial}{\partial x} k_{\xi} \frac{\partial}{\partial x} g dx.$$

Das erste Integral ist nach  $\xi$  stetig in  $\Gamma_0$  differenzierbar; ebenso das letzte Glied nach Hilfssatz 4 B; also ist  $g_1(\xi)$  in  $\Gamma$  stetig differenzierbar. Nach Hilfssatz 2 liegt dann  $g_1(x)$  in  $\mathfrak{G}''$ .

Satz 1.3 B.

$\mathfrak{F}_2$  liegt in  $\mathfrak{F}'$ .

Beweis. Es liege  $f_2$  in  $\mathfrak{F}_2$  und

$$Gf_2 = f_1 \text{ in } \mathfrak{F}_1, \quad G^2 f_2 = h \text{ in } \mathfrak{H}.$$

Nach Satz 1.1 B, 1.2 B liegt  $f_1 = f_1(x)$  in  $\mathfrak{S}''$ ,  $f_2 = f_2(x)$  in  $\mathfrak{S}''$ . Die Darstellung (12 B) nimmt — wegen  $k_i$  in  $\mathfrak{G}$ ,  $f_1$  in  $\mathfrak{F}_1$  gilt (6) — die Form an

$$(13 B) \quad \begin{aligned} f_2(\xi) = & \int \{ \Delta^2 k_i(x) - v(x) \Delta k_i(x) \} f_1(x) dx \\ & + \int v(x) k_i(x) f_1(x) dx \\ & - \int k_i h dx. \end{aligned}$$

Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der ersten beiden Integrale folgt in bekannter Weise unter Benutzung der stetigen Differenzierbarkeit von  $f_1(x)$ ; nach Hilfssatz 4 B folgt zweimalige stetige Differenzierbarkeit des letzten Gliedes. Nach Hilfssatz 3 B liegt also  $f_2(x)$  in  $\mathfrak{F}''$ .

### 9. Diskussion des Spektrums.

Wir geben einfache Bedingungen für das Verhalten des Zusatzpotentials  $v$  dafür an, daß das Spektrum überhaupt oder unterhalb einer Schranke ein *diskretes* gewöhnliches Punktspektrum ist. Sie entsprechen ganz den Bedingungen von Weyl [12.2]. In der Methode haben wir uns von der Note von Fr. Rellich [8] leiten lassen. Wir verwenden wesentlich die Sätze aus Teil I, Nr. 7, die an den Begriff der *Vollstetigkeit* anschließen.

Satz 5.

Im Falle (3), (4) des endlichen Gebietes  $\Gamma = K_R$ . Das Spektrum von  $G = -\Delta + v$  ist diskret; es gibt eine unendlich anwachsende Folge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit.

Satz 6. Im Falle (1), (2) des unendlichen Gebietes. Es wachse das Zusatzpotential  $v(x)$  gleichmäßig ins Unendliche für  $r = |x| \rightarrow \infty$ .

Dann ist das Spektrum von  $G = -\Delta + v$  diskret; es gibt eine unendlich anwachsende Folge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit.

Satz 7<sup>12)</sup>. Im Falle (1), (2) des unendlichen Gebietes. Es sei

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = v_\infty \text{ für } |x| \rightarrow \infty.$$

Dann ist das Spektrum von  $G = -\Delta + v$  unterhalb  $v_\infty$  diskret.

Als wesentliches Hilfsmittel verwenden wir die *Ungleichung von Poincaré* (vgl. [4.2]) für Gebiete  $[x - \xi] < \delta$  aus  $\Gamma$  (die im Fall (2) auch  $x = 0$  als Ecke besitzen dürfen): Es gibt ein  $c > 0$ , so daß für alle Funktionen  $g$  aus  $\mathfrak{G}$  gilt

$$(14) \quad \int_{[x-\xi]<\delta} g^2 dx \leq \frac{1}{(2\delta)^n} \left\{ \int_{[x-\xi]<\delta} g dx \right\}^2 + \delta^n c \int_{[x-\xi]<\delta} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx.$$

<sup>12)</sup> Für Schrödingers Wasserstoffproblem vgl. Courant-Hilbert [2.7].

Beweis. Der für Gebiete  $[x - \xi] < \delta$  einfache Beweis sei angemerkt: Es genügt  $g$  in  $\mathfrak{G}'$  anzunehmen. Sei  $[x^1 - \xi] < \delta$ ,  $[x^2 - \xi] < \delta$ , so ist

$$\begin{aligned} |g(x^1) - g(x^2)| &\leq \int_{|x_1 - \xi_1| < \delta} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2^1, \dots, x_n^1) \right| dx_1 \\ &+ \int_{|x_2 - \xi_2| < \delta} \left| \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2, x_2, x_3^2, \dots, x_n^2) \right| dx_2 \\ &+ \dots \\ &+ \int_{|x_n - \xi_n| < \delta} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} (x_1^2, \dots, x_{n-1}^2, x_n) \right| dx_n. \end{aligned}$$

Durch Integration nach  $x^1$  und  $x^2$  entsteht

$$\int_{|x^1 - \xi| < \delta} \int_{|x^2 - \xi| < \delta} |g(x^1) - g(x^2)|^2 dx^1 dx^2 \leq (2\delta)^{n+2n} \int_{|x - \xi| < \delta} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx.$$

Die linke Seite ist aber nichts anderes als

$$2(2\delta)^n \int_{|x - \xi| < \delta} g^2 dx - 2 \left\{ \int_{|x - \xi| < \delta} g dx \right\}^2.$$

So entsteht (14) mit  $c = 2n$ .

Diese Ungleichung führt uns dann zu dem

Hilfssatz. Die Formen

$$\int_{K_\varrho} g^2 dx, \quad \int_{K_\varrho} w(x) g^2 dx \quad \varrho < R$$

mit in  $\Gamma$  stückweise stetiger und beschränkter Funktion  $w(x)$ , die zunächst in  $\mathfrak{G}'$  erklärt und dann auf  $\mathfrak{G}$  fortgesetzt sind, sind in  $\mathfrak{G}$  vollstetig in bezug auf  $G$ .

Beweis. Das Gebiet  $K_\varrho$  kann man durch eine endliche Summe  $\sum$  von fremden Quadraten  $[x - \xi] < \delta$  mit beliebig kleinem  $\delta$  überdecken. Durch Summation der Poincaréschen Ungleichung entsteht

$$\int_{K_\varrho} g^2 dx \leq (2\delta)^n \sum_i \left| \int_{|x - \xi| < \delta} g dx \right|^2 + 2\delta^{2n} \int_{\Gamma} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx.$$

Das besagt unter Beachtung von (3)<sub>0</sub> nach der Definition von Teil I gerade die Vollstetigkeit von  $\int_{K_\varrho} g^2 dx$  in bezug auf  $G$ . Die Vollstetigkeit von

$$\int_{K_\varrho} w g^2 dx \text{ ergibt sich dann unmittelbar daraus, daß mit } |w(x)| \leq \bar{w}$$

$$\left| \int_{K_\varrho} w g^2 dx \right| \leq \bar{w} \int_{K_\varrho} g^2 dx$$

abzuschätzen ist, wo die rechte Seite schon als vollstetig erkannt ist.

Zum *Beweis von Satz 5* berufen wir uns auf Zusatz 18 von Teil I. Es genügt also die Vollstetigkeit von  $\int_I g^2 dx$  in bezug auf  $G$  zu beweisen.

Wir zerlegen

$$\int_I g^2 dx = \int_{K_{R-\sigma}} g^2 dx + \int_{K_{R-\sigma}, R} g^2 dx$$

und verwenden die Ungleichung (1, 1) (Anhang) mit  $u = g$ .

Nachdem wir dort über  $\varrho$  von  $R - \sigma$  bis  $R$  und über  $\tau$  von  $R - \sigma$  bis  $R - \frac{\sigma}{2}$  mitteln, wobei  $R - \sigma > \frac{R}{2}$  sei, entsteht aus naheliegenden Abschätzungen

$$\int_{K_{R-\sigma}, R} g^2 dx \leq c_1 \int_{K_{R-\sigma/2}, R-\sigma} g^2 dx + \sigma^2 c_2 \int_{K_R} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx$$

z. B. mit  $c_1 = 2^{n+1}$ ,  $c_2 = 2 R^{n-1} C$ .

Durch Einsetzen gewinnen wir

$$\int_I g^2 dx \leq \int_{K_{R-\sigma}} g^2 dx + c_1 \int_{K_{R-\sigma/2}, R-\sigma} g^2 dx + \sigma^2 c_2 \int_{K_R} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx$$

und damit, da die ersten beiden Terme der rechten Seite nach dem Hilfssatz vollstetig sind, die Behauptung.

Zum *Beweis von Satz 6* genügt es nach Zusatz 18 Teil I zu zeigen, daß  $\int_I g^2 dx$   $G$ -vollstetig ist. Sei

$$m(\varrho) = \text{Min } v(x)$$

für  $x \geq \varrho$ ; dann besagt die Voraussetzung von Satz 6

$$m(\varrho) \rightarrow \infty \text{ für } \varrho \rightarrow \infty.$$

Nun gilt offenbar

$$\int_I g^2 dx \leq \int_{K_\varrho} g^2 dx + \frac{1}{m(\varrho)} \int_{I-K_\varrho} v g^2 dx$$

und ferner, vgl. <sup>5)</sup>, S. 689

$$\int_{I-K_\varrho} v g^2 dx \leq g G g.$$

Darin liegt aber die Behauptung.

Zum *Beweis von Satz 7* zerlegen wir  $v(x)$  in

$$v(x) = v^+(x) - w(x),$$

wo  $v^+(x)$  und  $w(x)$  in  $\Gamma$  stetige Funktionen sind, so gewählt, daß

$$v^+(x) \geq v_\infty, \quad 0 \leq w(x) \leq v_\infty$$



wird, und zwar derart, daß gilt

$$w(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Im Falle **(2)**, soll dieser Ansatz nur für  $|x| \geq P$  bestehen; für  $0 < |x| \leq P$  dagegen

$$v^+(x) = v(x) + v_\infty, \quad w(x) = v_\infty,$$

was durch geeignete Wahl möglich ist, ohne die Stetigkeit bei  $|x| = P$  zu verletzen.

Nach diesen Festsetzungen ist die Form

$$g W g = \int_F w(x) g^2 dx$$

in  $\mathfrak{G}$  beschränkt und es gilt für die in  $\mathfrak{G}$  definierte Form

$$g G^+ g = \int_F \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 + v^+ g^2 \right\} dx$$

$$(*) \quad g G^+ g \geq v_\infty \int_F g^2 dx,$$

wobei man sich im Falle **(2)**, noch auf die Abschätzung (4) zu berufen hat. Da ferner offenbar

$$(\dagger) \quad v_\infty (g G g) \geq g G^+ g \geq g G g$$

gilt, ist  $G^+$  in  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen.

Da nun  $v^+$  genau die Bedingungen eines Zusatzpotentials erfüllt, ist auf die Form  $G^+$  die Spektralzerlegung anwendbar. Da ihre untere Schranke offenbar  $v_\infty$  ist, besitzt sie unterhalb von  $v_\infty$  kein Spektrum. Satz 7: Das Spektrum des Operators  $G$  oder der Form  $G = G^+ + W$  ist diskret unterhalb  $v_\infty$ , folgt alsdann unmittelbar aus Satz 17 (I), wenn gezeigt ist, daß  $W$  vollstetig ist in bezug auf  $G^+$  in  $\mathfrak{G}$  oder — was wegen  $(\dagger)$  gleichwertig ist — in bezug auf  $G$ .

Ist nun

$$m(\varrho) = \text{Max } w(x) \quad \text{für} \quad |x| \geq \varrho,$$

so folgt aus  $w(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$

$$m(\varrho) \rightarrow 0, \quad \text{für} \quad \varrho \rightarrow \infty.$$

Nun gilt

$$0 \leq \int_F w g^2 dx \leq v_\infty \int_{K_\varrho} g^2 dx + m(\varrho) \int_{F-K_\varrho} g^2 dx.$$

Wegen  $\int_F g^2 dx \leq g G g$  liegt darin nach der Definition von Teil I die Vollstetigkeit von  $W$ .

## 10. Anhang.

## 1. Integralungleichungen.

Sei  $u(x)$  eine in  $0 < r < R$  stückweise stetig differenzierbare Funktion von  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Dann besteht die Ungleichung

$$(1.0) \quad \left| \sqrt{\int_{\Omega_\varrho} u^2 d\omega} - \sqrt{\int_{\Omega_\tau} u^2 d\omega} \right| \leq \sqrt{C|\varrho - \tau|} \sqrt{\int_{K_{\tau, \varrho}} \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx}$$

für

$$C \geq \frac{1}{\varrho - \tau} \int_{\tau}^{\varrho} \frac{dr}{r^{n-1}}$$

mit  $0 < \varrho < P$ ,  $0 < \tau < P$ ,  $\tau < \varrho$

Beweis. Es sei  $x = \xi$  mit  $|\xi| = 1$  ein Punkt auf  $\Omega_1$ ; dann ist

$$u(\varrho \xi) - u(\tau \xi) = \int_{\tau}^{\varrho} \frac{\partial}{\partial r} u(r \xi) dr,$$

$$u^2(\varrho \xi) - 2u(\varrho \xi)u(\tau \xi) + u^2(\tau \xi) \leq \int_{\tau}^{\varrho} \frac{dr}{r^{n-1}} \int_{\tau}^{\varrho} r^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial r} u(r \xi) \right)^2 dr.$$

Durch Integration über  $\Omega_1$  und Anwendung der Schwarz-Ungleichung auf die linke Seite entsteht

$$\left| \sqrt{\int_{\Omega_\varrho} u^2 d\omega} - \sqrt{\int_{\Omega_\tau} u^2 d\omega} \right| \leq \int_{\tau}^{\varrho} \frac{dr}{r^{n-1}} \int_{K_{\tau, \varrho}} \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

und daraus Ungleichung (1.0)

Aus der Ungleichung (1.0) erhält man

$$(1.1) \quad \int_{\Omega_\varrho} u^2 d\omega \leq 2 \int_{\Omega_\tau} u^2 d\omega + 2C|\varrho - \tau| \int_{K_{\tau, \varrho}} \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

mit  $K_{\varrho, \tau}$  statt  $K_{\tau, \varrho}$  für  $\tau > \varrho$ .

## 2. Singularität des Zusatzpotentials.

Es sei  $u(x)$  stückweise stetig differenzierbar für  $0 < r \leq P$ ,

$$x = x_1, \dots, x_n; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Dann besteht für  $0 < \sigma < \rho \leq P$  die Ungleichung

$$(2.0) \quad T_{\sigma, \rho} = \int_{K_{\sigma, \rho}} \left\{ \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \varphi^2(r) u^2 \right\} dx - \varphi(\sigma) \sigma^{n-1} \int_{\Omega_\sigma} u^2 d\omega \\ \geq -\varphi(\rho) \rho^{n-1} \int_{\Omega_\rho} u^2 d\omega$$

mit

$$\varphi(r) = \frac{n-2}{2} \frac{1}{r} \quad \text{für } n = 3, 4, \dots$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \frac{A}{r}} \frac{1}{r} \quad \text{für } n = 2 \quad \text{mit } A > P.$$

Beweis. Es ist

$$T_{\sigma, \rho} = \int_{K_{\sigma, \rho}} \frac{1}{\varphi(r) r^{n-1}} \sum \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\varphi(r)} u \right) \right]^2 dx - \varphi(\rho) \rho^{n-1} \int_{\Omega_\rho} u^2 d\omega$$

Hilfssätze.

(2.1). Es nimmt

$$T_{\sigma, \rho}$$

nicht ab für  $\sigma \rightarrow 0$ .

Der Beweis folgt unmittelbar aus der obigen Darstellung von  $T_{\sigma, \rho}$ .

(2.2). Es gibt eine positive Konstante,  $k$ , so daß für genügend kleines  $\sigma$  ( $\sigma \leq \sigma_0$ ) gilt

$$T_{\sigma, P} \geq -k \int_{K_{\sigma, P}} u^2 dx.$$

Beweis: Es sei  $\sigma_1$  eine solche Zahl zwischen  $\sigma_0$  und  $P$ , daß

$$\sigma_1^{n-1} \int_{\Omega_{\sigma_1}} u^2 d\omega = \frac{1}{P - \sigma_0} \int_{K_{\sigma_0, P}} u^2 dx$$

wird; dann ist für  $\sigma \leq \sigma_0$  wegen  $T_{\sigma, P} \geq T_{\sigma_1, P}$

$$T_{\sigma, P} \geq -\frac{\varphi(\sigma_1)}{P - \sigma_0} \int_{K_{\sigma_0, P}} u^2 dx - \int_{K_{\sigma_1, P}} \varphi^2(r) u^2 dx.$$

Ist nun  $k = \text{Max} \left[ \frac{\varphi(\sigma_1)}{P - \sigma_0} + \varphi^2(r) \right]$  in  $\sigma_0 \leq r \leq P$ , so folgt

$$T_{\sigma, P} \geq -k \int_{K_{\sigma_0, P}} u^2 dx$$

und damit die Behauptung.

(2.3). Wenn  $\int_{K_P} \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$  existiert, so strebt für  $n \geq 2$

$$\varphi(\sigma) \sigma^{n-1} \int_{\Omega_\sigma} u^2 d\omega \rightarrow 0 \quad \sigma \rightarrow 0$$

und es existiert

$$\int_{K_p} \varphi^2(r) u^2 dx.$$

Beweis. Es folgt aus (2.0) wegen  $\varphi(r) > 0$  unmittelbar die Beschränktheit von  $\int_{K_{\alpha, \varrho}} \varphi^2(r) u^2 dx$  in  $\sigma$  und damit die Existenz von

$$\int_{K_p} \varphi^2(r) u^2 dx = \int_0^p \varphi(r) \left[ \varphi(r) r^{n-1} \int_{\Omega_r} u^2 d\omega \right] dr.$$

Aus der Existenz dieses Integrals und der Nichtexistenz von

$$\int_0^p \varphi(r) dr$$

folgt, daß es eine spezielle Folge  $\varrho \rightarrow 0$  gibt, für die

$$\varphi(\varrho) \varrho^{n-1} \int_{\Omega_\varrho} u^2 d\omega \rightarrow 0$$

strebt. Aus (2.0) entnimmt man dann, daß das für jede Folge  $\sigma \rightarrow 0$  gilt.

### 3. Beweis der Greenschen Umformung.

Zum Beweis von

$$(6) \quad \int_r \left\{ \sum \frac{\partial}{\partial x} f \frac{\partial}{\partial x} g + v f g \right\} dx - \int_r \{ \Delta f g + v f g \} dx = 0$$

für  $f$  in  $\mathfrak{F}'$ ,  $g$  in  $\mathfrak{G}'$  integrieren wir zunächst nur über  $K_{\alpha, \varrho}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{K_{\alpha, \varrho}} \left\{ \sum \frac{\partial}{\partial x} f \frac{\partial}{\partial x} g + v f g + \Delta f g - v f g \right\} dx \\ &= \varrho^{n-1} \int_{\Omega_\varrho} g \frac{\partial}{\partial r} f d\omega - \sigma^{n-1} \int_{\Omega_\sigma} g \frac{\partial}{\partial r} f d\omega, \end{aligned}$$

wo nur im Falle (2)  $\sigma \neq 0$  zu wählen ist. Es ist dann zu zeigen, daß es spezielle Folgen  $\varrho \rightarrow \infty$  bzw.  $\varrho \rightarrow R$  und  $\sigma \rightarrow 0$  gibt, für die die rechten Seiten verschwinden.

Fall (1). Aus der Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Omega_r} \left| g \frac{\partial f}{\partial r} \right| d\omega dr \leq \sqrt{\int_r \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right)^2 dx \int_r g^2 dx}$$

folgt die Existenz einer Folge  $\varrho \rightarrow \infty$ , für die

$$\varrho^n \int_{\Omega_\varrho} g \frac{\partial f}{\partial r} d\omega \rightarrow 0$$

strebt.

Fall (2). Die Folge  $\varrho \rightarrow \infty$  wähle wie im Falle (1).

Aus der Existenz von  $\int_{K_P} \varphi^2(r) g^2 dx$  und aus der Existenz von

$$\int_{K_P} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right)^2 dx$$

ergibt sich die Existenz von

$$\int_{K_P} \varphi(r) \left| g \frac{\partial f}{\partial r} \right| dx = \int_0^P \varphi(r) \left[ r^{n-1} \int_{\omega_r} \left| g \frac{\partial f}{\partial r} \right| d\omega \right] dr.$$

Aus dieser Existenz und der Nichtexistenz von  $\int_0^P \varphi(r) dr$  entnimmt man, daß es eine Folge  $\sigma \rightarrow 0$  gibt, für die

$$\sigma^{n-1} \int_{\omega_\sigma} \left| g \frac{\partial f}{\partial r} \right| d\omega \rightarrow 0$$

strebt wie gewünscht.

Fall (3). Vgl. hierzu Courant [2.5]. Aus der Existenz des Integrals

$$\int_0^R r^{n-1} \int_{\omega} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right)^2 d\omega dr$$

folgt die Existenz einer Folge  $\varrho \rightarrow R$ , so daß

$$(R - \varrho) \int_{\omega_\varrho} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right)^2 d\omega \rightarrow 0.$$

Aus der Randbedingung (1\*) S. 697

$$(1^*) \quad \int_{\omega_\varrho} g^2 d\omega \leq 2C(R - \varrho) \int_{K_{\varrho, R}} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} g \right)^2 dx$$

andererseits folgt, daß  $\frac{1}{R - \varrho} \int_{\omega_\varrho} g^2 d\omega \rightarrow 0$  strebt.

Infolgedessen strebt

$$\int_{\omega_\varrho} \left| g \frac{\partial f}{\partial r} \right| d\omega \leq \sqrt{\int_{\omega_\varrho} \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\omega} \sqrt{\int_{\omega_\varrho} g^2 d\omega} \xrightarrow{\varrho \rightarrow R} 0.$$

Fall (4). Hier besagt schon die Randbedingung die geforderte Konvergenz

$$(5) \quad \varrho^{n-1} \int_{\omega_\varrho} g \frac{\partial f}{\partial r} d\omega \rightarrow 0.$$

**Zusatz.** Im Falle **(1)** folgt für stückweise stetig zweimal differenzierbare Funktionen  $f(x)$  aus  $\mathfrak{S}''$ , für die  $-\Delta f(x) + v(x)f(x)$  eine Funktion aus  $\mathfrak{S}'$  ist, schon, daß

$$\int_I \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right)^2 + v(x) f^2(x) \right\} dx$$

existiert; so daß also  $f$  in  $\mathfrak{F}'$  liegt.

Denn es ist

$$\begin{aligned} & \int_{K_\varrho} \left\{ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right)^2 + v(x) f^2(x) \right\} dx \\ &= \int_{K_\varrho} f(x) (-\Delta f(x) + v(x)f(x)) dx + \varrho^{n-1} \int_{\Omega_\varrho} f \frac{\partial}{\partial r} f d\omega. \end{aligned}$$

Wegen der Existenz von  $\int_0^\infty r^{n-1} \int_{\Omega_r} f^2 d\omega dr$  muß es eine Folge  $\varrho \rightarrow \infty$  geben, in deren Umgebung  $\int_{\Omega_r} f^2 d\omega$  abnimmt, so daß dort also

$$\frac{d}{dr} \int_{\Omega_r} f^2 d\omega = 2 \int_{\Omega_r} f \frac{\partial}{\partial r} f d\omega$$

negativ wird. Für diese Folge bleibt also die linke Seite beschränkt und da der Integrand positiv ist, existiert das Integral über  $K_\infty = \Gamma$  erstreckt.

Es erweist sich hierin, daß bei **(1)** der Grenzpunktfall im Sinne von Weyl vorliegt.

(Eingegangen am 14. 7. 1933.)

# Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen.

Von

Franz Rellich in Göttingen.

## Einleitung.

Ebenso wie bei einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen beruht auch bei einem System solcher Differentialgleichungen die allgemeine Behandlung, insbesondere die Untersuchung der Fragen nach Existenz, eindeutiger Bestimmtheit und Abhängigkeitsbereich der Lösungen in entscheidender Weise auf dem Begriff der charakteristischen Kurven. Es zeigt sich aber, daß es wichtige Fälle gibt, in welchen zunächst die ursprüngliche Definition der Charakteristiken gegenstandslos wird, weil jede willkürliche auf einer Integralfäche gezogene Kurve der Charakteristikenbedingung genügt. Der bekannteste dieser „ausgearteten Fälle“ ist das der Theorie der Flächenverbiegung zugrundeliegende System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} A^1 &\equiv x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 - e(\alpha, \beta) = 0, \\ (1) \quad A^2 &\equiv x_\beta^2 + y_\beta^2 + z_\beta^2 - g(\alpha, \beta) = 0, \\ A^3 &\equiv x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta - f(\alpha, \beta) = 0 \end{aligned}$$

mit den gesuchten Funktionen  $x, y, z$  und den unabhängigen Veränderlichen  $\alpha, \beta$ . Dieses System von partiellen Differentialgleichungen zeigt, wie wir sogleich noch näher dartun werden, die oben gekennzeichnete Ausartung und erlaubt daher scheinbar nicht von vornherein die Anwendung des Charakteristikenbegriffs.

Bereits Hadamard<sup>1)</sup> hat in diesem Zusammenhang auf dieses System hingewiesen und gezeigt, wie man in solchen Fällen zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung gelangen kann. Dieselbe Frage ist dann von Janet<sup>2)</sup> allgemeiner gestellt worden, wobei insbesondere das Cauchysche

<sup>1)</sup> J. Hadamard, Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles, Bull. de la soc. math. de France 34 (1906), S. 48–52.

<sup>2)</sup> M. Janet, Les systèmes comprenant autant d'équations aux dérivées partielles que de fonctions inconnues. Caractéristiques ordinaires des systèmes anormaux. J. de math. pures et appliquées (9) 8 (1929), S. 339–352.

Dort wird auch weitere Literatur angegeben.



Anfangswertproblem behandelt wurde. Schließlich sind hier die zahlreichen Untersuchungen zu nennen, die im Anschluß an Riquier angestellt worden sind. — Alle diese Untersuchungen machen wesentlich von der Potenzreihenmethode Gebrauch und setzen also den analytischen Charakter sämtlicher vorkommenden Funktionen voraus. Schon hierin liegt ein keineswegs nur oberflächlicher Unterschied gegenüber der vorliegenden Untersuchung, in der nur so viele Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gemacht werden, als es die Natur der Problemstellung fordert. Wesentlicher aber scheint es mir, daß die hier angegebene Reduktion auch feinere Fragen, wie z. B. die Frage nach dem Abhängigkeitsgebiet im hyperbolischen Fall, oder dem analytischen Charakter der Lösungen im elliptischen Fall, den üblichen Methoden zugänglich macht, was bei den genannten Untersuchungen nicht geleistet zu werden scheint; im Einzelnen wird hier allerdings nur der hyperbolische Fall (Anfangswertproblem) ausgeführt.

Die Ergebnisse sind in der Hauptsache die folgenden:

Es sei

$$(2) \quad \begin{aligned} A^1(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) &= 0, \\ A^2(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) &= 0, \\ A^3(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

ein System von Differentialgleichungen mit den gesuchten Funktionen  $x, y, z$  und den unabhängigen Veränderlichen  $\alpha, \beta$  von der Art, daß die in  $\varphi_\alpha : \varphi_\beta$  kubische Gleichung<sup>3)</sup>:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A^1_{x_\alpha} \varphi_\alpha + A^1_{x_\beta} \varphi_\beta & A^1_{y_\alpha} \varphi_\alpha + A^1_{y_\beta} \varphi_\beta & A^1_{z_\alpha} \varphi_\alpha + A^1_{z_\beta} \varphi_\beta \\ A^2_{x_\alpha} \varphi_\alpha + A^2_{x_\beta} \varphi_\beta & A^2_{y_\alpha} \varphi_\alpha + A^2_{y_\beta} \varphi_\beta & A^2_{z_\alpha} \varphi_\alpha + A^2_{z_\beta} \varphi_\beta \\ A^3_{x_\alpha} \varphi_\alpha + A^3_{x_\beta} \varphi_\beta & A^3_{y_\alpha} \varphi_\alpha + A^3_{y_\beta} \varphi_\beta & A^3_{z_\alpha} \varphi_\alpha + A^3_{z_\beta} \varphi_\beta \end{vmatrix} = 0$$

identisch in allen Argumenten  $x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta, \varphi_\alpha : \varphi_\beta$  erfüllt ist.

1. Im quasi-linearen Fall<sup>4)</sup> läßt sich aus den Gleichungen (2) ein neues System von drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit denselben gesuchten Funktionen ableiten. Jede dieser Gleichungen ist in den zweiten Ableitungen linear und enthält die zweiten Ableitungen jeweils von nur einer der drei gesuchten Funktionen. Das neue System

<sup>3)</sup> Im gewöhnlichen, nichtausgearteten Fall ist (3) gerade die charakteristische Gleichung des Systems (2); zu ihrer Herleitung vgl. § 1, 2. Bezeichnung  $A^i_{x_\alpha} = \frac{\partial A^i}{\partial x_\alpha}$ .

<sup>4)</sup> d. h. die linken Seiten von (2) sind lineare Funktionen von  $x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta$  mit Koeffizienten, die nur von  $x, y, z, \alpha, \beta$  abhängen.

ist mit dem alten in dem Sinne äquivalent, daß jedes Lösungssystem von (2) auch Lösungssystem des neuen Systems ist und auch das Umgekehrte gilt, wenn für die Lösung des neuen Systems gewisse Gleichungen bestehen, deren Erfülltsein überdies nur etwa längs einer Anfangskurve gefordert zu werden braucht. Dieses neue System besitzt im allgemeinen eine *zweiparametrische Schar* von charakteristischen Kurven, die gleichzeitig als charakteristische Kurven des ursprünglichen Systems anzusehen sind. Ihre charakteristische Gleichung, die an Stelle der versagenden Gleichung (3) tritt, wird als die *charakteristische Gleichung von (2)* bezeichnet; sie wird explizit angegeben. Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich dadurch, daß die so definierten charakteristischen Kurven tatsächlich die Eigenschaften besitzen, die den auf die übliche Art definierten Charakteristiken bei nichtausgearteten Systemen zukommen. Je nachdem ob die Wurzeln dieser charakteristischen Gleichung reell oder komplex sind, heißt (2) — für ein vorgelegtes Lösungssystem — *hyperbolisch* oder *elliptisch* und zeigt dementsprechenden Lösungstyp.

Im Gegensatz zum nichtausgearteten Fall sind längs einer Anfangskurve in der  $\alpha, \beta$ -Ebene die Werte von  $x, y, z$  nicht mehr willkürlich wählbar. Sie müssen vielmehr längs der Anfangskurve einer bestimmten (explizit angegebenen) Beziehung der Form  $h(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, s) = 0$  genügen<sup>5)</sup>. Gibt man  $x, y, z$  in dieser eingeschränkten Weise vor, so ist das Cauchysche Anfangswertproblem eindeutig lösbar. Das Abhängigkeitsgebiet wird durch die eben definierten charakteristischen Linien bestimmt.

2. Im *allgemeinen* Fall liegen die Verhältnisse im wesentlichen so wie im linearen Fall. Mit einer Ausnahme: die drei Differentialgleichungen des abgeleiteten Systems, die wieder zweiter Ordnung sind und die Ableitungen zweiter Ordnung jeweils von nur einer der drei gesuchten Funktionen enthalten, sind in diesen nicht linear; die Differentialgleichungen sind vielmehr vom Monge-Ampèreschen Typus in dem Sinne, daß etwa die Differentialgleichung, die die zweiten Ableitungen von  $x$  enthält, in den vier Größen  $x_{\alpha\alpha}x_{\beta\beta} - x_{\alpha\beta}^2, x_{\alpha\alpha}, x_{\alpha\beta}, x_{\beta\beta}$  linear ist mit Koeffizienten, die von den Argumenten  $x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta$  abhängen können. — Im übrigen gibt es wieder nur zwei Scharen von Charakteristiken und es sind, wenn man sich das Anfangswertproblem stellt, die Funktionen  $x, y, z$  längs der Anfangskurve an eine Relation der Form

$$h(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, s) = 0^5)$$

gebunden.

<sup>5)</sup>  $\dot{x}$  usw. bedeutet die Ableitung von  $x$  usw. nach der Bogenlänge  $s$  der Anfangskurve.

Als Anwendung dieser allgemeinen Überlegungen ergibt sich (§ 12) unmittelbar die Erledigung der Aufgabe, *alle* Einbettungen einer zweidimensionalen Fläche mit dem (vorgegebenen) Linienelement

$$ds^2 = e d\alpha^2 + 2f d\alpha d\beta + g d\beta^2$$

in einen dreidimensionalen Riemannschen Raum  $V_3$  mit der (vorgegebenen) Maßbestimmung

$$dS^2 = \sum_{i,k=1}^3 G_{ik} dx_i dx_k$$

zu finden<sup>5a)</sup>. Es wird gezeigt: Gibt man längs einer (beliebigen) Kurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  der  $\alpha, \beta$ -Ebene drei Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  irgendwie so vor, daß die Beziehung

$$\sum_{i,k=1}^3 G_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = e \dot{\alpha}^2 + 2f \dot{\alpha} \dot{\beta} + g \dot{\beta}^2 \quad (5)$$

erfüllt wird und daß die in  $V_3$  gelegene Kurve  $K: x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$  nirgends asymptotisch gerichtet ist, so gibt es in  $V_3$  genau zwei reelle Flächen mit dem Linienelement  $ds^2 = e d\alpha^2 + 2f d\alpha d\beta + g d\beta^2$ , die durch die Kurve  $C$  gehen, falls<sup>6)</sup> der Betrag der absoluten Krümmung von  $C$  kleiner ist als der Betrag ihrer relativen Krümmung. — Ist die relative Krümmung des Linienelementes  $ds^2 = e d\alpha^2 + 2f d\alpha d\beta + g d\beta^2$  negativ, so liegen die Verhältnisse vor, die man im hyperbolischen Fall gewöhnt ist: Verbiegt man die Anfangskurve  $C$  so, daß ein Stück von  $C$  starr bleibt, so bleibt ein ganzes Stück der Fläche starr, das begrenzt wird von dem festgebliebenen Stück von  $C$  und zwei Asymptotenlinien der Fläche. Ist die Relativkrümmung positiv, so ist das übliche Anfangswertproblem nur sinnvoll, wenn Linienelemente und Anfangskurve von vornherein analytisch vorausgesetzt werden; dann ist notwendig auch die eingebettete Fläche analytisch. — Diese Sätze sind offenbar genaue Analoga zu den bekannten Darboux'schen Sätzen über die Einbettung eines Linienelementes in den dreidimensionalen euklidischen Raum.

In § 13 wird die Verallgemeinerung auf ausgeartete Systeme von  $n$  Differentialgleichungen mit  $n$  gesuchten Funktionen skizziert.

In § 14 wird ein spezieller Fall eines Systems mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen behandelt.

<sup>5a)</sup> Vgl. C. Burstin: Ein Beitrag zum Problem der Einbettung der Riemannschen Räume in euklidischen Räumen. Rec. math. Soc. math. Moscou 38 (1931), Nr. 344, S. 74—85.

<sup>6)</sup> Diese letzte Bedingung ist eine Realitätsbedingung, die nur wegen des speziellen (quadratischen) Charakters der zugrunde liegenden Differentialgleichungen explizit formuliert werden kann.

## § 1.

## Vorbemerkungen.

## 1. Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit der vorkommenden Funktionen.

In der ganzen Arbeit wird stillschweigend vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Funktionen so oft stetig differenzierbar sind, als es die vorgenommenen Prozesse erfordern. Hingegen ist *nirgends analytischer Charakter* vorausgesetzt, wenn diese Voraussetzung nicht eigens formuliert wird.

## 2. Die übliche Ableitung der charakteristischen Gleichung.

Zur charakteristischen Gleichung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} A^1 &= A^1(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \\ (4) \quad A^2 &= A^2(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \\ A^3 &= A^3(x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta, x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \end{aligned}$$

mit den gesuchten Funktionen  $x, y, z$  und den Veränderlichen  $\alpha, \beta$  kann man bekanntlich so gelangen: Man denkt sich auf einer Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  mit der Bogenlänge  $s$  die Funktionen  $x, y, z, x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta$  derart vorgegeben, daß längs der Anfangskurve

$$\begin{aligned} (5) \quad x_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + x_\beta \frac{d\beta}{ds} &= \frac{dx}{ds}, \\ y_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + y_\beta \frac{d\beta}{ds} &= \frac{dy}{ds}, \\ z_\alpha \frac{d\alpha}{ds} + z_\beta \frac{d\beta}{ds} &= \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die sechs Gleichungen (4) und (5) kann man dazu benutzen, um die sechs Ableitungen  $x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta$  als Funktionen der Bogenlänge  $s$  zu berechnen. Dabei wird der Fall eine besondere Rolle spielen, daß die Funktionaldeterminante dieser sechs Gleichungen nach  $x_\alpha, x_\beta, y_\alpha, y_\beta, z_\alpha, z_\beta$  verschwindet. Denkt man sich die Anfangskurve in der Form  $\varphi(\alpha, \beta) = 0$  (also  $\varphi_\alpha : \varphi_\beta = -\frac{d\beta}{ds} : \frac{d\alpha}{ds}$ ) geschrieben, so ist dies, wie leicht zu sehen, dann der Fall, wenn die folgende dreireihige Determinante verschwindet:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A_{x_\alpha}^1 \varphi_\alpha + A_{x_\beta}^1 \varphi_\beta, & A_{y_\alpha}^1 \varphi_\alpha + A_{y_\beta}^1 \varphi_\beta, & A_{z_\alpha}^1 \varphi_\alpha + A_{z_\beta}^1 \varphi_\beta, \\ A_{x_\alpha}^2 \varphi_\alpha + A_{x_\beta}^2 \varphi_\beta, & A_{y_\alpha}^2 \varphi_\alpha + A_{y_\beta}^2 \varphi_\beta, & A_{z_\alpha}^2 \varphi_\alpha + A_{z_\beta}^2 \varphi_\beta, \\ A_{x_\alpha}^3 \varphi_\alpha + A_{x_\beta}^3 \varphi_\beta, & A_{y_\alpha}^3 \varphi_\alpha + A_{y_\beta}^3 \varphi_\beta, & A_{z_\alpha}^3 \varphi_\alpha + A_{z_\beta}^3 \varphi_\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Diese algebraische Gleichung dritten Grades für  $\varphi_\alpha: \varphi_\beta$  pflegt man als charakteristische Gleichung des Systems (4) zu bezeichnen<sup>7)</sup>. Gerade bei der in dieser Arbeit behandelten Ausartung *versagt* diese übliche Definition der charakteristischen Gleichung, weil alle Koeffizienten dieser algebraischen Gleichung identisch verschwinden.

### 3. Ein algebraischer Hilfssatz.

Voraussetzung.  $\alpha)$  Die dreireihige Determinante

$$Q(\xi, \eta) = \|X_i^k \xi + Y_i^k \eta\|,$$

in der  $X_i^k, Y_i^k$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) feste Zahlen,  $\xi, \eta$  Veränderliche bedeuten, verschwinde für jeden Wert von  $\xi: \eta$ .

$\beta)$  Für einen bestimmten Spaltenindex, etwa für  $i = 3$  seien die drei algebraischen Unterdeterminanten  $Q_s^k(\xi, \eta)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) von  $Q(\xi, \eta)$  linear unabhängig (hinsichtlich konstanter Koeffizienten).

Behauptung: Die zwölf Gleichungen<sup>8)</sup>

$$(7) \quad X_i^k \bar{\lambda}_k = 0, \quad Y_i^k \bar{\lambda}_k + X_i^k \bar{\mu}_k = 0, \quad Y_i^k \bar{\mu}_k + X_i^k \bar{v}_k = 0, \quad Y_i^k \bar{v}_k = 0 \\ i = 1, 2, 3$$

besitzen ein bis auf einen Proportionalitätsfaktor *eindeutig* bestimmtes, nicht identisch verschwindendes Lösungssystem  $\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k, \bar{v}_k$ ; für jedes nicht identisch verschwindende Lösungssystem  $\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k, \bar{v}_k$  ist die Determinante  $(\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k, \bar{v}_k)$  von Null verschieden.

Beweis: Setzt man

$$(8) \quad Q_s^k = \lambda_k \xi^3 + \mu_k \xi \eta + \nu_k \eta^3,$$

so ist offenbar

$$(9) \quad (X_i^k \xi + Y_i^k \eta) (\lambda_k \xi^3 + \mu_k \xi \eta + \nu_k \eta^3) = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

für jeden Wert von  $\xi: \eta$ . Daraus folgt, daß  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  ein Lösungssystem von (7) ist; wegen der linearen Unabhängigkeit der drei Formen  $Q_s^1, Q_s^2, Q_s^3$  ist die Determinante  $(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$  von Null verschieden.

Bleibt zu zeigen, daß jedes Lösungssystem  $\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k, \bar{v}_k$  von (7) die Form

$$\bar{\lambda}_k = \varrho_k \lambda_k, \quad \bar{\mu}_k = \varrho_k \mu_k, \quad \bar{v}_k = \varrho_k \nu_k$$

besitzt. Die Formen  $Q_s^k$  haben keinen gemeinsamen Linearfaktor; aus  $Q_s^k = (a \xi + b \eta) (c_k \xi + d_k \eta)$  würde nämlich im Widerspruch zur Voraus-

<sup>7)</sup> Siehe z. B. T. Levi-Civita, „Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa“. Bologna, N. Zanichelli, 1931.

<sup>8)</sup> Über doppelt auftretende lateinische Indizes, wie hier über  $k$ , ist von 1 bis 3 zu summieren.

setzung  $\beta$  die lineare Abhängigkeit der  $Q_s^k$  folgen. Daher ist der Rang von  $Q(\xi, \eta)$  für jedes von 0,0 verschiedene Wertepaar  $\xi, \eta$  gleich 2. Bildet man mit einem beliebigen Lösungssystem  $\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k, \bar{\nu}_k$  von (7) die Formen  $\bar{Q}_k \equiv \bar{\lambda}_k \xi^2 + \bar{\mu}_k \xi \eta + \bar{\nu}_k \eta^2$ , so ist  $(X_1^k \xi + Y_1^k \eta) \bar{Q}_k = 0$ , also  $\bar{Q}_k = P \cdot Q_s^k$ , wo der Proportionalitätsfaktor  $P$  zunächst noch von  $\xi, \eta$  abhängig sein könnte. Da (für  $\xi, \eta \neq 0, 0$ )  $P = \frac{\bar{Q}_1}{Q_1^1}$  ist für alle Werte von  $\xi, \eta$ , für die  $Q_s^1$  nicht verschwindet, und  $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1$  keinen gemeinsamen Faktor besitzen, muß  $Q_s^1$  in  $\bar{Q}_1$  aufgehen, d. h. es muß  $P = \varrho$  eine von  $\xi, \eta$  unabhängige Konstante sein.

**Zusatz.** Die Voraussetzung  $\beta$  kann ersetzt werden durch die Voraussetzung, daß der Rang der Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \lambda_k Y_1^k & \lambda_k Y_2^k & \lambda_k Y_3^k \\ \nu_k X_1^k & \nu_k X_2^k & \nu_k X_3^k \end{pmatrix}$$

gleich 2 ist; dabei sind die  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  den Koeffizienten der algebraischen Unterdeterminanten  $Q_s^k$  (oder  $Q_2^k$  oder  $Q_1^k$ ) proportional. In der Tat ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^1 Y_1^1 X_2^1 Y_2^1 X_3^1 Y_3^1 \\ X_1^2 Y_1^2 X_2^2 Y_2^2 X_3^2 Y_3^2 \\ X_1^3 Y_1^3 X_2^3 Y_2^3 X_3^3 Y_3^3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0, & \lambda_k Y_1^k, & 0, & \lambda_k Y_2^k, & 0, & \lambda_k Y_3^k \\ -\lambda_k Y_1^k, & -\nu_k X_1^k, & -\lambda_k Y_2^k, & -\nu_k X_2^k, & -\lambda_k Y_3^k, & -\nu_k X_3^k \\ \nu_k X_1^k, & 0, & \nu_k X_2^k, & 0, & \nu_k X_3^k, & 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Rang der Matrix rechts ersichtlich 3 ist, wenn der Rang von  $\mathfrak{M}$  gleich 2 ist, so kann die Determinante  $(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$  nicht verschwinden. Das ist aber gerade die Behauptung.

## I. Der quasilineare Fall.

### § 2.

#### Eine Normalform.

In diesem Abschnitt (§ 2–6) wird vorausgesetzt, daß die betrachteten Differentialgleichungen in den ersten Ableitungen linear sind. Setzt man zur Abkürzung  $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ , so handelt es sich also um ein System der Form<sup>a)</sup>

$$\begin{aligned} A^k &\equiv m_i^k(x, \beta, x^1, x^2, x^3) x_\alpha^i + n_i^k(x, \beta, x^1, x^2, x^3) x_\beta^i \\ &\quad + l^k(x, \beta, x^1, x^2, x^3) = 0 \\ (4a) \quad & k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

wobei die Determinante  $Q(\xi, \eta) = \|m_i^k \xi + n_i^k \eta\|$  für alle Werte von  $\xi: \eta, \alpha, \beta, x^1, x^2, x^3$  verschwindet.

Setzt man voraus: für einen bestimmten Spaltenindex, etwa für  $i = 3$ , seien die drei algebraischen Unterdeterminanten  $Q_i^k(\xi, \eta)$  von  $Q(\xi, \eta)$  linear unabhängig, so gibt es nach § 1, 3. neun Größen  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), deren Determinante  $(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$  nicht verschwindet, und für die

$$m_i^k \lambda_k = 0, \quad \lambda_k n_i^k + \mu_k m_i^k = 0, \quad \nu_k m_i^k + \mu_k n_i^k = 0, \quad n_i^k \nu_k = 0 \\ i = 1, 2, 3$$

ist. Die  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt. Da man für sie speziell die Koeffizienten der Form  $Q_i^k(\xi, \eta)$  wählen kann, darf angenommen werden, daß  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  nur von  $\alpha, \beta, x^1, x^2, x^3$  abhängen. Setzt man zur Abkürzung

$$\lambda_k n_i^k = b_i, \quad \nu_k m_i^k = a_i, \quad \lambda_k l^k = f, \quad \nu_k l^k = e, \\ -\mu_k l^k = g, \quad \nu_k A^k = A, \quad \lambda_k A^k = B, \quad -\mu_k A^k = C,$$

so erhält man aus (4 a)

$$(4 \text{ b}) \quad \begin{aligned} A &\equiv a_i x_\alpha^i + e = 0, \\ B &\equiv b_i x_\beta^i + f = 0, \\ C &\equiv b_i x_\alpha^i + a_i x_\beta^i + g = 0, \end{aligned}$$

wo  $e, f, g, a_i, b_i$  Funktionen von  $\alpha, \beta, x^i$  allein sind.

Jedes Lösungssystem  $x^i$  von (4 a) genügt den Gleichungen (4 b). Wegen  $(\lambda_k, \mu_k, \nu_k) \neq 0$  ist auch das Umgekehrte richtig.

Wir beschränken uns daher in diesem Abschnitt auf Systeme der Form (4 b).

Bemerkung. Nach dem Zusatz in § 1, 3. kann die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der  $Q_i^k$  ersetzt werden durch die Voraussetzung: Rang von  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$  gleich 2, wobei die zur Bildung von  $a_i, b_i$  benutzten  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  den Koeffizienten von  $Q_i^k$  (bzw.  $Q_i^2$  bzw.  $Q_i^1$ ) proportional sind. Es wird jedoch auch diese Voraussetzung später durch eine sinnmäßigere ersetzt werden.

### § 3.

#### Zurückführung auf ein nicht ausgeartetes System.

Behauptung. Jedes Lösungssystem  $x^i$  von (4 b) genügt einem System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form:

$$(10) \quad F^i \equiv N x_{\alpha\alpha}^i + M x_{\alpha\beta}^i + L x_{\beta\beta}^i + \dots = 0, \\ i = 1, 2, 3;$$



dabei bedeutet

$$(11) \quad L = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^1}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^2}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^3} \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad N \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^1}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^2}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$M \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^1}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^2}, & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^3} \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$F \equiv \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^3 A}{d\beta^3} - \frac{d^3 B}{d\alpha^3}.$$

Die  $L, M, N$  hängen vom Index  $i$  nicht ab und sind Funktionen der Argumente  $\alpha, \beta, x^k, x_\alpha^k, x_\beta^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Die Punkte in (10) stehen an Stelle von Ausdrücken, die ebenfalls nur von  $\alpha, \beta, x^k, x_\alpha^k, x_\beta^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) abhängen.

Beweis: Aus (4b) folgt, daß die linke Seite von

$$(12) \quad F \equiv \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^3 A}{d\beta^3} - \frac{d^3 B}{d\alpha^3} = 0$$

ein Differentialausdruck ist, der keine dritten Ableitungen und die zweiten Ableitungen nur linear enthält. Weiter erhält man aus (4b) die sechs Differentialgleichungen

$$(12a) \quad \begin{aligned} P_2 &\equiv \frac{dA}{d\alpha} && \equiv a_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \alpha^3} + \dots = 0, \\ P_3 &\equiv \frac{dC}{d\alpha} - \frac{dA}{d\beta} && \equiv b_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \alpha^3} + \dots = 0, \\ Q_2 &\equiv \frac{dA}{d\beta} && \equiv a_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots = 0, \\ Q_3 &\equiv \frac{dB}{d\alpha} && \equiv b_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots = 0, \\ R_2 &\equiv \frac{dC}{d\beta} - \frac{dB}{d\alpha} && \equiv a_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \beta^3} + \dots = 0, \\ R_3 &\equiv \frac{dB}{d\beta} && \equiv b_i \frac{\partial^3 x^i}{\partial \beta^3} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Hier wurden die Punkte an Stelle von Ausdrücken gesetzt, die keine zweiten Ableitungen der gesuchten Funktionen  $x^i$  mehr enthalten.

Bezeichnet man mit  $L_{ik}$  bzw.  $M_{ik}$  bzw.  $N_{ik}$  die zur  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne gehörige algebraische Unterdeterminante von  $L$  bzw.  $M$  bzw.  $N$ , so ist

$$(12b) \quad F' \equiv FN_{11} + P_1N_{21} + P_2N_{31} + Q_1M_{21} + Q_2M_{31} + R_2L_{21} + R_3L_{31}$$

ersichtlich von der Gestalt

$$(13) \quad F^i \equiv N x_{\alpha\alpha}^i + M x_{\alpha\beta}^i + L x_{\beta\beta}^i + \dots,$$

wobei  $L, M, N$  keine Ableitungen zweiter Ordnung enthalten und die Punkte ebenfalls für Glieder ohne zweite Ableitungen stehen. Natürlich gilt für jedes Lösungstripel  $x^1, x^2, x^3$  von (4a) bzw. (4b) auch

$$(14) \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = 0.$$

#### § 4.

##### Die Definition der charakteristischen Linien.

Die charakteristische Gleichung des Systems (10) ist die dritte Potenz der Gleichung

$$(15) \quad N \varphi_\alpha^3 + M \varphi_\alpha \varphi_\beta + L \varphi_\beta^3 = 0;$$

die drei Differentialgleichungen (10) besitzen also nur eine zweiparametrische Schar von charakteristischen Linien  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const.}$

Die Gleichung (15) wird als charakteristische Gleichung des Systems (4b) bzw. (4a) bezeichnet. Danach besitzt also auch das System (4a) nur eine zweiparametrische Schar von charakteristischen Linien  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const.}$

Wenn (für ein bestimmtes Lösungssystem von (4a))  $4LN - M^2 < 0$  ausfällt, so nennen wir das System (4a) (für dieses Lösungssystem) hyperbolisch; im Falle  $4LN - M^2 > 0$  elliptisch.

Die Rechtfertigung für diese Bezeichnungsweise ergibt sich daraus, daß die so bezeichneten Begriffe dieselben Eigenschaften besitzen wie die entsprechenden Begriffe in den nicht ausgearteten Fällen<sup>9)</sup>.

Der Fall  $4LN - M^2 = 0$  wird ausgeschlossen, um eine Ausartung auch des abgeleiteten Systems zu vermeiden. Die damit erhobene Forderung  $4LN - M^2 \neq 0$  enthält von selbst die in § 2 formulierte Voraussetzung, wonach der Rang von  $m = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$  gleich 2 sein sollte. Wäre nämlich der Rang von  $m$  kleiner als 2, so müßte  $L = N = M = 0$  sein.

Nach der eben gegebenen Definition heißt eine Kurve  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  für ein Lösungssystem  $x^i$  von (4a) dann charakteristisch, wenn

$$N \varphi_\alpha^3 + M \varphi_\alpha \varphi_\beta + L \varphi_\beta^3 = 0$$

gilt. Von Interesse ist folgender

Satz: Wenn eine Kurve  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  für ein Lösungssystem  $x^i$  charakteristisch ist, dann ist sie es auch für jedes Lösungssystem  $\bar{x}^i$ , das mit  $x^i$  längs der Kurve  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  übereinstimmt.

<sup>9)</sup> Insbesondere zeigen die so definierten Charakteristiken die übliche Invarianzeigenschaft.

Beweis: Schreibt man die Kurve  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  in der Form

$$\alpha = \alpha(s), \quad \beta = \beta(s)$$

mit  $s$  als Bogenlänge und deutet Differentiation nach  $s$  durch einen Punkt an, so wird nach (11)

$$(15a) \quad L\dot{\alpha}^2 - M\dot{\alpha}\dot{\beta} + N\dot{\beta}^2 \equiv \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

mit

$$H_i \equiv \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^i} \dot{\alpha}^2 - \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^i} \dot{\alpha}\dot{\beta} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^i} \dot{\beta}^2 \quad i = 1, 2, 3.$$

Da die linke Seite von (15a) bis auf einen Proportionalitätsfaktor mit der linken Seite von (15) übereinstimmt und die  $a_i, b_i$  nur von  $\alpha, \beta, x^i$  abhängen, ist nur zu zeigen, daß auch die  $H_i$  eindeutig festgelegt sind, sobald die  $x^i$  längs  $\alpha = \alpha(s), \beta = \beta(s)$  gegeben sind. Nun ist nach (12) und (12a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^i} &= \left( \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) x_{\alpha}^k + \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^i} &= - \left( \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) x_{\beta}^k - \left( \frac{\partial b_i}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \right) x_{\alpha}^k + \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^i} &= \left( \frac{\partial b_i}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \right) x_{\beta}^k + \dots, \end{aligned}$$

wobei die Punkte für Glieder stehen, die von  $\alpha, \beta, x^i$ , aber nicht von  $x_{\alpha}^i, x_{\beta}^i$  oder höheren Ableitungen abhängen. Daraus folgt

$$H_i = \left( \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i} \right) \dot{x}^k \dot{\alpha} + \left( \frac{\partial b_i}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \right) \dot{x}^k \dot{\beta}$$

mit derselben Bedeutung der Punkte. Damit ist alles bewiesen.

Beispiel. Das geläufigste in unserem Sinne ausgeartete System der Form (4a) ist das bei der Infinitesimalverbiegung auftretende. Bedeutet  $\xi^i(\alpha, \beta)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Fläche,  $x^i(\alpha, \beta)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) den Vektor der infinitesimalen Verbiegung, so lauten die Gleichungen der Infinitesimalverbiegung

$$(4d) \quad A \equiv a_i \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} = 0, \quad B \equiv b_i \frac{\partial x^i}{\partial \beta} = 0, \quad C \equiv b_i \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} + a_i \frac{\partial x^i}{\partial \beta} = 0,$$

wobei  $a^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \alpha}$ ,  $b_i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \beta}$  bekannte Funktionen von  $\alpha, \beta$  sind. Nach (12) wird

$$F \equiv x_{\alpha\alpha}^i \xi_{\beta\beta}^i + x_{\beta\beta}^i \xi_{\alpha\alpha}^i - 2 x_{\alpha\beta}^i \xi_{\alpha\beta}^i.$$

Nach (15) und (11) sind die Charakteristiken von (4 d) durch

$$\begin{vmatrix} \xi_{\beta\beta}^1, & \xi_{\beta\beta}^2, & \xi_{\beta\beta}^3 \\ \xi_{\alpha}^1, & \xi_{\alpha}^2, & \xi_{\alpha}^3 \\ \xi_{\beta}^1, & \xi_{\beta}^2, & \xi_{\beta}^3 \end{vmatrix} \varphi_{\alpha}^2 - 2 \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta}^1, & \xi_{\alpha\beta}^2, & \xi_{\alpha\beta}^3 \\ \xi_{\alpha}^1, & \xi_{\alpha}^2, & \xi_{\alpha}^3 \\ \xi_{\beta}^1, & \xi_{\beta}^2, & \xi_{\beta}^3 \end{vmatrix} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\alpha}^1, & \xi_{\alpha\alpha}^2, & \xi_{\alpha\alpha}^3 \\ \xi_{\alpha}^1, & \xi_{\alpha}^2, & \xi_{\alpha}^3 \\ \xi_{\beta}^1, & \xi_{\beta}^2, & \xi_{\beta}^3 \end{vmatrix} \varphi_{\beta}^2 = 0$$

gegeben. Sie sind die Asymptotenlinien der Fläche  $\xi^i(\alpha, \beta)$ .

### § 5.

#### Der Zusammenhang des neuen Systems mit dem alten.

Es erhebt sich die Frage: Sind die Lösungen des neuen Systems (14) auch Lösungen des ursprünglichen Systems (4 b) und damit auch von (4 a)? Dies ist im allgemeinen *nicht* zu bejahen. Für ein beliebiges Lösungstriple  $x^1, x^2, x^3$  von (14) muß nicht  $A = 0, B = 0, C = 0$  sein. Wohl aber müssen die für ein solches Lösungstriple gebildeten Ausdrücke  $A, B, C$  den homogenen, partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} N \frac{d^2 A}{d\alpha^2} + M \frac{d^2 A}{d\alpha d\beta} + L \frac{d^2 A}{d\beta^2} + \dots &= 0, \\ (16) \quad N \frac{d^2 B}{d\alpha^2} + M \frac{d^2 B}{d\alpha d\beta} + L \frac{d^2 B}{d\beta^2} + \dots &= 0, \\ N \frac{d^2 C}{d\alpha^2} + M \frac{d^2 C}{d\alpha d\beta} + L \frac{d^2 C}{d\beta^2} + \dots &= 0 \end{aligned}$$

genügen, wobei die Punkte gewisse homogene Linearkombinationen in den Ableitungen  $\frac{dA}{d\alpha}, \frac{dA}{d\beta}, \frac{dB}{d\alpha}, \frac{dB}{d\beta}, \frac{dC}{d\alpha}, \frac{dC}{d\beta}$  bedeuten und  $L, M, N$  die durch (11) definierten Determinanten sind.

Zum Beweis von (16) multipliziert man die Gleichungen (12b) mit  $a_i$  und summiert über  $i$  von 1 bis 3; so erhält man

$$a_i F^i \equiv N P_2 + M Q_2 + L R_2,$$

oder nach (12a)

$$(17) \quad N \frac{dA}{d\alpha} + M \frac{dA}{d\beta} + L \left( \frac{dC}{d\beta} - \frac{dB}{d\alpha} \right) \equiv a_i F^i.$$

Ebenso aus (12) durch Multiplikation mit  $b_i$  und Summation über  $i$ :

$$b_i F^i \equiv N P_2 + M Q_2 + L R_2,$$

d. h. nach (12a):

$$(17a) \quad N \left( \frac{dC}{d\alpha} - \frac{dA}{d\beta} \right) + M \frac{dB}{d\alpha} + L \frac{dB}{d\beta} \equiv b_i F^i.$$

Wenn nun  $x^1, x^2, x^3$  Lösungen des Systems  $F^1 = F^2 = F^3 = 0$  sind, so entstehen aus den Identitäten (17) und (17a) Gleichungen mit verschwin-

denden rechten Seiten. Differenziert man außerdem (17) nach  $\alpha$  und (17a) nach  $\beta$ , so ergibt sich

$$(18) \quad N \frac{d^2 A}{d\alpha^2} + M \frac{d^2 A}{d\alpha d\beta} + L \left( \frac{d^2 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^2 B}{d\alpha^2} \right) + \dots = 0,$$

$$(19) \quad N \left( \frac{d^2 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^2 A}{d\beta^2} \right) + M \frac{d^2 B}{d\alpha d\beta} + L \frac{d^2 B}{d\beta^2} + \dots = 0,$$

wobei die Punkte für einen linearen homogenen Ausdruck in den sechs ersten Ableitungen  $\frac{dA}{d\alpha}$ ,  $\frac{dA}{d\beta}$ ,  $\frac{dB}{d\alpha}$ ,  $\frac{dB}{d\beta}$ ,  $\frac{dC}{d\alpha}$ ,  $\frac{dC}{d\beta}$  stehen. Differenziert man (17) nach  $\beta$  und (17a) nach  $\alpha$  und addiert die beiden entstandenen Gleichungen, so ergibt sich

$$(20) \quad N \frac{d^2 C}{d\alpha^2} + M \left( \frac{d^2 A}{d\beta^2} + \frac{d^2 B}{d\alpha^2} \right) + L \frac{d^2 C}{d\beta^2} + \dots = 0.$$

Nach (12b) läßt sich wegen  $F^i = 0$  auch  $F$  als homogene lineare Kombination dieser sechs Ableitungen darstellen; man beachte, daß  $N_{1i} = 0$  nicht für alle  $i$  möglich ist. Das heißt: es ist auch — siehe (12) —

$$(21) \quad \frac{d^2 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^2 A}{d\beta^2} - \frac{d^2 B}{d\alpha^2} + \dots = 0$$

mit derselben Bedeutung der Punkte. Verwendet man diese Gleichung in (18), (19) und (20), so ergibt sich unmittelbar die Behauptung (16).

Ob und wie man  $A = B = C = 0$  aus (16) schließen kann, hängt ganz von dem Problem ab, das für (4a) gestellt war. Für das zu (4a) gehörige Cauchysche Anfangswertproblem ist das in § 6 genau ausgeführt. Es scheint mir aber besonders bemerkenswert, daß auch im elliptischen Fall die Form, auf welche das ursprüngliche System durch (10) reduziert wird, den üblichen Methoden zugänglich ist. Das erkennt man z. B., wenn man sich die Frage nach dem analytischen Charakter der Lösungen von (4a) stellt — natürlich jetzt unter den Voraussetzungen, daß die  $A^i$  analytisch von ihren Argumenten abhängen und daß  $4LN - M^2 > 0$  ist.

## § 6.

### Das Cauchysche Anfangswertproblem.

#### 1. Die Bestimmung der ersten und höheren Ableitungen längs einer Anfangskurve.

Denkt man sich längs einer Anfangskurve in der  $\alpha, \beta$ -Ebene  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  mit der Bogenlänge  $s$  die Werte von  $x^1, x^2, x^3$  vorgeschrieben, so genügen die drei Differentialgleichungen (4a) bzw. (4b) zusammen mit den drei Streifenrelationen

$$x_\alpha^i \dot{\alpha} + x_\beta^i \dot{\beta} = \dot{x}^i$$

(Punkt bedeutet Differentiation nach der Bogenlänge  $s$ ) nicht, um die sechs Ableitungen erster Ordnung  $x'_\alpha, x'_\beta$  längs der Anfangskurve festzulegen; das war ja gerade der Ausgangspunkt der ganzen Überlegung. Es zeigt sich vielmehr, daß bereits die drei Funktionen  $x^i(s)$  gar nicht willkürlich vorgeschrieben werden dürfen, sondern daß sie der aus (4b) folgenden Gleichung

$$(23) \quad A \dot{\alpha}^3 + B \dot{\beta}^3 + C \dot{\alpha} \dot{\beta} \equiv (a_i \dot{\alpha} + b_i \dot{\beta}) \dot{x}^i + e \dot{\alpha}^3 + f \dot{\beta}^3 + g \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0$$

gehören müssen. Wir denken uns für das folgende die  $x^i$  so gewählt, daß längs der Anfangskurve (23) erfüllt ist. Außerdem setzen wir  $\dot{\alpha} \neq 0, \dot{\beta} \neq 0$  voraus, was nötigenfalls durch eine Koordinatentransformation erzielt werden kann.

Zur Bestimmung der  $x^i_\alpha, x^i_\beta$  reichen nun die sechs Gleichungen aus:

$$(24) \quad \begin{aligned} S_1 &\equiv \frac{dA}{d\alpha} \dot{\alpha}^3 + \frac{dB}{d\alpha} \dot{\beta}^3 + \frac{dC}{d\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0, & A &= 0, B = 0, \\ x^i_\alpha \dot{\alpha} + x^i_\beta \dot{\beta} &= \dot{x}^i & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Das Fehlen der Gleichung  $C = 0$  bedeutet nur eine scheinbare Unsymmetrie: Wegen  $\dot{\alpha} \dot{\beta} \neq 0$  und (23) folgt aus  $A = B = 0$  auch  $C = 0$ . Ferner können die in  $S_1$  vorkommenden zweiten Ableitungen der  $x^i$  nach  $\alpha, \beta$  eliminiert werden. Da nämlich längs der Anfangskurve

$$\frac{dA}{d\alpha} \dot{\alpha} + \frac{dA}{d\beta} \dot{\beta} = \frac{dB}{d\alpha} \dot{\alpha} + \frac{dB}{d\beta} \dot{\beta} = \frac{dC}{d\alpha} \dot{\alpha} + \frac{dC}{d\beta} \dot{\beta} = 0$$

ist, ergibt sich dort

$$T_1 \equiv \frac{dA}{d\alpha} \dot{\alpha}^3 + 2 \frac{dA}{d\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left( \frac{dC}{d\beta} - \frac{dB}{d\alpha} \right) \dot{\beta}^3 = -S_1.$$

Nach (12a<sub>1</sub>), (12a<sub>2</sub>), (12a<sub>3</sub>) treten in  $T_1$  die zweiten Ableitungen nur in der Kombination

$$(25) \quad x^i_{\alpha\alpha} \dot{\alpha}^3 + 2 x^i_{\alpha\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + x^i_{\beta\beta} \dot{\beta}^3 = \ddot{x}^i - x^i_\alpha \ddot{\alpha} - x^i_\beta \ddot{\beta}$$

auf. Substituiert man (25) im Ausdruck  $T_1$ , so enthält dieser keine Ableitungen zweiter Ordnung nach  $\alpha, \beta$ . Schließlich ersetzen wir in dem so erhaltenen Ausdruck und in den Gleichungen  $A = 0, B = 0$  noch  $x^i_\beta$  durch  $-\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} x^i_\alpha + \frac{\dot{x}^i}{\dot{\beta}}$  und erhalten drei Gleichungen

$$(24a) \quad \bar{T}_1 = 0, \quad \bar{A} = 0, \quad \bar{B} = 0$$

für die drei Unbekannten  $x^i_\alpha$ . Wenn  $x^i_\alpha$  aus (24a) eindeutig errechenbar sind, dann gilt dasselbe für  $x^i_\alpha, x^i_\beta$  bezüglich (24).

Denkt man sich für den Augenblick die ersten Ableitungen nach (24 a) bzw. (24) bestimmt, so ergeben sich die neun zweiten Ableitungen aus den Gleichungen

$$(26) \quad \begin{aligned} S_2 &= \frac{d^3 A}{d\alpha^3} \dot{\alpha}^3 + \frac{d^3 B}{d\alpha^2 d\beta} \dot{\alpha}^2 \dot{\beta} + \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta^2} \dot{\alpha} \dot{\beta}^2 = 0, & \frac{dA}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dB}{d\alpha} = 0, \\ x_{\alpha\alpha\alpha} \dot{\alpha}^3 + x_{\alpha\alpha\beta} \dot{\alpha}^2 \dot{\beta} &= \dot{x}_{\alpha\alpha}, & x_{\alpha\alpha\beta} \dot{\alpha}^2 + x_{\alpha\beta\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} &= \dot{x}_{\beta} \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

die wir wieder auf drei Gleichungen für  $x_{\alpha\alpha}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) reduzieren: Längs der Anfangskurve ist

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} = 0,$$

also nach (24) auch

$$\frac{dC}{d\alpha} = 0,$$

d. h. auch

$$\frac{d^3 A}{d\alpha^3} \dot{\alpha} + \frac{d^3 A}{d\alpha d\beta^2} \dot{\beta} = \frac{d^3 B}{d\alpha^2} \dot{\alpha} + \frac{d^3 B}{d\alpha d\beta} \dot{\beta} = \frac{d^3 C}{d\alpha^3} \dot{\alpha} + \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta} \dot{\beta} = 0,$$

woraus

$$(27) \quad T_2 = \frac{d^3 A}{d\alpha^3} \dot{\alpha}^3 + 2 \frac{d^3 A}{d\alpha d\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left( \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta} - \frac{d^3 B}{d\alpha^2} \right) \dot{\beta}^2 = -S_2$$

folgt. Daran sieht man wie oben, daß in  $T_2$  vermöge

$$x_{\alpha\alpha\alpha} \dot{\alpha}^3 + 2 x_{\alpha\alpha\beta} \dot{\alpha}^2 \dot{\beta} + x_{\alpha\beta\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta}^2 = \dot{x}_{\alpha} - x_{\alpha\alpha} \ddot{\alpha} - x_{\alpha\beta} \ddot{\beta}$$

die dritten Ableitungen eliminiert werden können. Außerdem denken wir uns wieder in  $T_2 = 0$  und  $\frac{dA}{d\alpha} = 0$ ,  $\frac{dB}{d\alpha} = 0$  alle zweiten und ersten Ableitungen durch  $x_{\alpha\alpha}^i$  und  $x_{\alpha}^i$  ausgedrückt und erhalten so für  $x_{\alpha\alpha}^i$  drei Gleichungen

$$(28a) \quad \bar{T}_2 = 0, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial \alpha} = 0.$$

Danach ist klar, wie man auch alle höheren Ableitungen sukzessiv berechnen kann.

**Behauptung:** Die eben geschilderte Berechnung der ersten (bzw. der höheren) Ableitungen ist immer dann *eindeutig* möglich, wenn die Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  in dem in § 4 festgelegten Sinne *nichtcharakteristisch* ist, d. h. nach (15), wenn längs der Anfangskurve

$$(28b) \quad N\dot{\beta}^3 - M\dot{\alpha}\dot{\beta} + L\dot{\alpha}^3 \neq 0$$

ist.

**Beweis:** Zunächst ist ersichtlich die Funktionaldeterminante

$$(29) \quad \frac{\partial(\bar{T}_2, \bar{A}, \bar{B})}{\partial(x_{\alpha\alpha}^1, x_{\alpha\alpha}^2, x_{\alpha\alpha}^3)} = \frac{\partial\left(\bar{T}_2, \frac{\partial \bar{A}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{B}}{\partial \alpha}\right)}{\partial(x_{\alpha\alpha}^1, x_{\alpha\alpha}^2, x_{\alpha\alpha}^3)}.$$



Die rechte Seite von (29) stimmt aber mit der linken Seite von (28) überein. Nach (27) folgt nämlich

$$S_1 = \left( \frac{d^3 A}{d\beta^3} + \frac{d^3 B}{d\alpha^3} - \frac{d^3 C}{d\alpha d\beta} \right) \dot{\beta}^2,$$

also mit der Bezeichnung (12):  $S_1 = -\dot{\beta}^2 F$ .

Es ist also längs der Anfangskurve das System (26 a) äquivalent mit dem System  $F^1 = 0$ ,  $F^2 = 0$ ,  $F^3 = 0$ , wenn man nur in diesem alle zweiten Ableitungen durch die  $x_{\alpha\alpha}^i$  ersetzt. Die linke Seite von (28) ist aber bekanntlich bis auf nichtverschwindende Faktoren nichts weiter als als die Funktionaldeterminante nach den  $x_{\alpha\alpha}^i$ , stimmt daher im wesentlichen mit der rechten Seite von (29) überein.

Außerdem ist (26 a) in  $x_{\alpha\alpha}^i$  linear. Desgleichen (24 a) in  $x_{\alpha}^i$ ; denn nach (4b) sind die in  $x_{\alpha}^i, x_{\beta}^i$  quadratischen Glieder von  $-S_1$  gegeben durch

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^k} x_{\alpha}^k x_{\alpha}^i \dot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial a_i}{\partial x^k} x_{\beta}^k x_{\alpha}^i \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{\partial b_i}{\partial x^k} x_{\beta}^k x_{\alpha}^i \dot{\beta}^2 + \frac{\partial a_i}{\partial x^k} x_{\beta}^k x_{\beta}^i \dot{\beta}^2 - \frac{\partial b_i}{\partial x^k} x_{\alpha}^k x_{\beta}^i \dot{\beta}^2;$$

sie fallen weg, sobald man  $x_{\beta}^k = -\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} x_{\alpha}^k + \frac{x}{\dot{\beta}}$  setzt.

Damit ist die obige Behauptung vollständig bewiesen. Es ist sogar mehr gezeigt: Die Berechnung der zweiten (und höheren) Ableitungen nach (26 a) liefert dasselbe Resultat, wie die Berechnung nach dem System (14).

## 2. Das Cauchysche Anfangswertproblem.

Aus dem Gesagten ergibt sich unmittelbar, daß das Cauchysche Anfangswertproblem für das ursprüngliche Problem zurückgeführt ist auf das entsprechende Problem für ein nicht ausgeartetes System. Es gilt der

**Satz:** *Gibt man längs einer Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  in der  $\alpha, \beta$ -Ebene die Werte der Funktionen  $x^i$  so vor, daß längs der Anfangskurve*

$$A \dot{\alpha}^3 + B \dot{\beta}^3 + C \dot{\alpha} \dot{\beta} \equiv a_i x^i \dot{\alpha} + b_i x^i \dot{\beta} + e \dot{\alpha}^3 + f \dot{\beta}^2 + g \dot{\alpha} \dot{\beta} = 0$$

*gilt, und ist die Anfangskurve mit diesen Vorgaben nicht charakteristisch, so gibt es in einer Umgebung der Anfangskurve eine und nur eine Lösung des Systems (4 a). Das Abhängigkeitsgebiet der Lösung wird durch die im § 4 angegebenen Charakteristiken geliefert.*

Zum Beweis dieses Satzes liegt alles vor. Man berechne zuerst die ersten und zweiten Ableitungen der  $x^i$  längs der Anfangskurve in der oben beschriebenen Weise, so daß die Gleichungen (24) und (26) und

damit zugleich die Gleichungen (14) längs der Anfangskurve erfüllt sind. Mit diesen Anfangswerten löse man das Cauchysche Anfangswertproblem zu dem System (14). Bei analytischer Differentialgleichung und analytischen Anfangswerten ist das nach Cauchy-Kowalewski sowohl bei  $4LN - M^2 < 0$  als auch bei  $4LN - M^2 > 0$  möglich. Im nichtanalytischen Fall setzen wir  $4LN - M^2 < 0$  voraus. Dann existiert<sup>10)</sup> eindeutig eine Lösung in der Nachbarschaft der Anfangskurve und das Abhängigkeitsgebiet wird von den durch (15) definierten Charakteristiken bestimmt. Dieses so bestimmte Lösungsstripel genügt auch den Ausgangsgleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Denn da längs der Anfangskurve wegen (24), (26)

$$A = B = C = \frac{dA}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} = \frac{dC}{d\alpha} = \frac{dA}{d\beta} = \frac{dB}{d\beta} = \frac{dC}{d\beta} = 0$$

ist, so gilt wegen § 5 (insbesondere S. 725)  $A = 0, B = 0, C = 0$  in einer ganzen Umgebung der Anfangskurve.

## II. Der allgemeine Fall.

### § 7.

#### Zurückführung auf ein nicht ausgeartetes System.

In diesem Abschnitt wird der allgemeine Fall eines Systems

$$(30) \quad A^i \equiv A^i(x_\alpha^1, x_\beta^1, x_\alpha^2, x_\beta^2, x_\alpha^3, x_\beta^3, x^1, x^2, x^3, \alpha, \beta) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

zugrunde gelegt, bei dem die dreireihige Determinante

$$\left\| \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^i} \xi + \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^i} \eta \right\|$$

für jeden Wert von  $\xi: \eta$  verschwindet (siehe § 1, 2).

Nach § 1, 3 existieren neun Größen  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), mit denen die Gleichungen (7) gelten, wenn man dort

$$X_i^k = \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^i}, \quad Y_i^k = \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^i}$$

<sup>10)</sup> Meines Wissens liegt allerdings ein Existenzbeweis, wie er hier benötigt wird, im nichtanalytischen Fall auch für ein System der Form (14) nicht explizit vor. Indessen läßt sich etwa die Methode von Hans Lewy [Über das Anfangswertproblem bei einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, Math. Annalen 98 (1927), S. 179–191] zur Integration hyperbolischer Differentialgleichungen mühelos auf Systeme der Form (14) übertragen.

setzt; die  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  hängen ab von den Argumenten  $x_\alpha^i, x_\beta^i, x^i, \alpha, \beta$ . Der Rang der mit diesen  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  gebildeten Matrix<sup>11)</sup>

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \nu_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^1}, & \nu_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^2}, & \nu_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^3} \\ \lambda_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^1}, & \lambda_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^2}, & \lambda_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^3} \end{pmatrix}$$

wird gleich 2 vorausgesetzt. Aus (7) folgt, daß die linke Seite von <sup>11)</sup>

$$(31) \quad F \equiv \lambda_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \alpha^2} + \mu_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \beta^2} = 0$$

ein Differentialausdruck ist, der keine dritten Ableitungen von  $x^i$  und die zweiten Ableitungen von  $x^i$  quadratisch enthält. Weiter erhält man nach (7) die sechs Gleichungen

$$(32) \quad \begin{aligned} P_1 &\equiv \nu_k \frac{dA^k}{d\alpha} \equiv a_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha^2} + \dots = 0, \\ P_2 &\equiv -\mu_k \frac{dA^k}{d\alpha} - \nu_k \frac{dA^k}{d\beta} \equiv b_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha^2} + \dots = 0, \\ Q_1 &\equiv \nu_k \frac{dA^k}{d\beta} \equiv a_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots = 0, \\ Q_2 &\equiv \lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} \equiv b_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \alpha \partial \beta} + \dots = 0, \\ R_1 &\equiv -\lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} - \mu_k \frac{dA^k}{d\beta} \equiv a_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \beta^2} + \dots = 0, \\ R_2 &\equiv \lambda_k \frac{dA^k}{d\beta} \equiv b_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \beta^2} + \dots = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\nu_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\alpha^i} = a_i, \quad \lambda_k \frac{\partial A^k}{\partial x_\beta^i} = b_i$$

gesetzt wurde und die Punkte für Glieder stehen, die keine zweiten Ableitungen der  $x^i$  enthalten.

Mit Hilfe der sieben Gleichungen (32) und (31) werden drei Gleichungen  $F^1 = 0, F^2 = 0, F^3 = 0$  abgeleitet, von denen jede die zweiten Ableitungen jeweils nur von einer der drei gesuchten Funktionen enthält.

Dazu benötigt man, daß in dem betrachteten Gebiet alle drei Ausdrücke  $a_1 b_2 - a_2 b_1, a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3$  von Null verschieden sind. Die obige Voraussetzung, der Rang von

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

<sup>11)</sup> Über doppelt auftretende lateinische Indizes, wie hier über  $k$ , ist von 1 bis 3 zu summieren.

sei 2, besagt allerdings nur, daß die drei aufgezählten Determinanten nirgends *gleichzeitig* verschwinden können. Geht man aber in (30) von den gesuchten Funktionen  $x^i$  zu den neuen gesuchten Funktionen  $\bar{x}^i$  mit  $x^i = \gamma_{ik} \bar{x}^k$  über, wo  $((\gamma_{ik}))$  etwa eine orthogonale Matrix mit konstanten Koeffizienten bedeutet, so kann man offenbar diese Matrix so bestimmen, daß in einem Punkt und damit in einer ganzen Umgebung dieses Punktes alle drei zu den neuen Differentialgleichungen  $\bar{A}^i \equiv A^i(\gamma_{1k} \bar{x}_a^k, \dots, \beta) = 0$  gebildeten Größen  $\bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 \bar{b}_1$ ,  $\bar{a}_2 \bar{b}_3 - \bar{a}_3 \bar{b}_2$ ,  $\bar{a}_3 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_3$  von Null verschieden sind. Das folgt so: in den Gleichungen (7), gebildet für die neuen Differentialgleichungen  $\bar{A}^i = 0$ , können den  $\lambda_k$ ,  $\bar{\mu}_k$ ,  $\bar{\nu}_k$  ihre alten Werte  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ ,  $\nu_k$  gegeben werden, da z. B.

$$A_{x_a}^k \lambda_k = A_{x_a}^k \gamma_{li} \lambda_k = A_{x_a}^k \lambda_k \gamma_{li} = 0$$

ist. Demnach

$$\bar{a}_i = \bar{A}_{x_a}^k \nu_k = a_i \gamma_{li}, \quad \bar{b}_i = b_i \gamma_{li},$$

woraus die Möglichkeit ersichtlich ist, die  $\gamma_{ik}$  geeignet zu wählen. Für alles Folgende sind die ungestrichenen Größen  $x^i$  beibehalten, d. h. es wird von vornherein

$$(33) \quad \Delta_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0, \quad \Delta_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0, \\ \Delta_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \neq 0$$

für einen bestimmten Bereich angenommen.

Wegen (33) lassen sich aus den sechs Gleichungen (32) die sechs Ableitungen  $x_{aa}^2$ ,  $x_{a\beta}^2$ ,  $x_{\beta\beta}^2$ ,  $x_{aa}^3$ ,  $x_{a\beta}^3$ ,  $x_{\beta\beta}^3$  linear durch  $x_{aa}^1$ ,  $x_{a\beta}^1$ ,  $x_{\beta\beta}^1$  ausdrücken. Setzt man dies in den Ausdruck  $\Delta_1 \cdot F$  ein, so erhält man einen Differentialausdruck zweiter Ordnung  $F^1$ , der an zweiten Ableitungen nur  $x_{aa}^1$ ,  $x_{a\beta}^1$ ,  $x_{\beta\beta}^1$  enthält und diese nur quadratisch und linear. Analog erhält man  $F^2$  bzw.  $F^3$ , indem man in  $\Delta_2 \cdot F$  bzw. in  $\Delta_3 \cdot F$  mit Hilfe von (32) die zweiten Ableitungen alle durch  $x_{aa}^2$ ,  $x_{a\beta}^2$ ,  $x_{\beta\beta}^2$  bzw.  $x_{aa}^3$ ,  $x_{a\beta}^3$ ,  $x_{\beta\beta}^3$  ausdrückt. So ergibt sich:

$$(34) \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = 0$$

Damit ist gezeigt, daß jedes Lösungssystem der Ausgangsgleichungen (30) drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit besonders einfachem Bau genügt: sie enthalten die zweiten Ableitungen nur quadratisch und linear und außerdem enthält jede Gleichung zweite Ableitungen nur von *einer* der gesuchten Funktionen. Damit ist das ursprüngliche System (30) auf ein neues reduziert, das die in der Theorie der nicht ausgearteten Differentialgleichungssysteme üblichen Methoden unmittelbar anzuwenden gestattet.

## § 8.

## Der Monge-Ampèresche Charakter des neuen Systems.

Behauptung:  $F^i$  ist linear in den vier Größen

$$x_{\alpha\alpha}^i x_{\beta\beta}^i - (x_{\alpha\beta}^i)^2 \text{ } ^{19)}, \quad x_{\alpha\alpha}^i, \quad x_{\alpha\beta}^i, \quad x_{\beta\beta}^i$$

mit Koeffizienten, die nur von  $x_{\alpha}^i, x_{\beta}^i, x^i, \alpha, \beta$  abhängen.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $i = 1$ .  $F^1$  entsteht, indem man in  $\Delta_1 \cdot F$  (zur Bezeichnung siehe S. 732) die zweiten Ableitungen nach (32), d. h. in der Form

$$(35) \quad x_{\alpha\alpha}^i = \frac{\Delta_i}{\Delta_1} x_{\alpha\alpha}^1 + \dots, \quad x_{\alpha\beta}^i = \frac{\Delta_i}{\Delta_1} x_{\alpha\beta}^1 + \dots, \quad x_{\beta\beta}^i = \frac{\Delta_i}{\Delta_1} x_{\beta\beta}^1 + \dots$$

durch  $x_{\alpha\alpha}, x_{\alpha\beta}, x_{\beta\beta}$  ausdrückt; dabei sind die Bezeichnungen (33) verwandt und es stehen die Punkte für Glieder, die keine zweiten Ableitungen mehr enthalten. Setzt man (35) in die Ausdrücke  $P, P_2, Q, Q_2, R, R_2$  (siehe (32)) ein, so kommt natürlich Null heraus;

also auch  $\nu_k \frac{dA^k}{d\alpha} = 0$  (wegen  $P_2 = 0$ ), ebenso  $\lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} = 0$  (wegen

$Q_2 = 0$ ) und  $\mu_k \frac{dA^k}{d\alpha} = 0$  (wegen  $Q_2 - P_2 = 0$ ). Da die Determinante

$(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$  nicht verschwindet, folgt daraus, daß  $\frac{dA^k}{d\alpha}$  verschwindet, wenn

man in diesem Ausdruck (35) einsetzt; dasselbe folgt für  $\frac{dA^k}{d\beta}$ .

Also gilt nach Einsetzung von (35)

$$\lambda_k \frac{d^2 A^k}{d\alpha^2} + \mu_k \frac{d^2 A^k}{d\alpha d\beta} + \nu_k \frac{d^2 A^k}{d\beta^2} = \frac{d}{d\alpha} \left( \lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} \right) + \frac{d}{d\beta} \left( \mu_k \frac{dA^k}{d\alpha} + \nu_k \frac{dA^k}{d\beta} \right).$$

Also kann  $F^1$  auch dadurch gewonnen werden, daß man (35) in  $\Delta_1 \cdot F'$  mit

$$F' = \frac{d}{d\alpha} \left( \lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} \right) + \frac{d}{d\beta} \left( \mu_k \frac{dA^k}{d\alpha} + \nu_k \frac{dA^k}{d\beta} \right)$$

einsetzt. Es ist also alles bewiesen, wenn von  $F'$  nach Einsetzung von (35) der oben präzipierte Monge-Ampèresche Charakter nachgewiesen wird. Nach (32) ist

$$F' \equiv \frac{\partial b_i}{\partial x_{\alpha}^k} (x_{\alpha\alpha}^k x_{\alpha\beta}^i - x_{\alpha\beta}^k x_{\alpha\alpha}^i) + \frac{\partial b_i}{\partial x_{\beta}^k} (x_{\alpha\beta}^k x_{\alpha\beta}^i - x_{\beta\beta}^k x_{\alpha\alpha}^i)$$

also nach (33)

$$F' = \frac{1}{\Delta_1^2} \frac{\partial b_i}{\partial x_{\beta}^k} \Delta_i \Delta_k ((x_{\alpha\beta}^1)^2 - x_{\alpha\alpha}^1 x_{\beta\beta}^1) + \dots,$$

<sup>19)</sup> In diesem Ausdruck ist ausnahmsweise nicht über  $i$  zu summieren.

wo die Punkte für Glieder stehen, die in den zweiten Ableitungen von  $x$  linear sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

## § 9:

## Die charakteristischen Kurven.

Die Gleichung für die charakteristischen Kurven  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  des Systems  $F^1 = 0, F^2 = 0, F^3 = 0$  ist gegeben durch

$$(37) \quad \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F^i}{\partial x_{\alpha\alpha}^i} \varphi_{\alpha}^2 + \frac{\partial F^i}{\partial x_{\alpha\beta}^i} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{\partial F^i}{\partial x_{\beta\beta}^i} \varphi_{\beta}^2 \right) = 0,$$

wonach man eine sechseparametrische Schar von charakteristischen Kurven zu erwarten hat. Wir beweisen jedoch: für alle Lösungssysteme von  $F^1 = 0, F^2 = 0, F^3 = 0$ , die zugleich  $\frac{dA^k}{d\alpha} = 0, \frac{dA^k}{d\beta} = 0$  erfüllen (also a fortiori für alle Lösungen des ursprünglichen Systems (30)) gibt es nur eine zweiparametrische Schar von Charakteristiken. Für solche Lösungen zeigt sich (mit Benutzung der Abkürzungen  $L, M, N$ )

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F^1}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} &= \frac{\partial F^2}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} = \frac{\partial F^3}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} = N, \\ \frac{\partial F^1}{\partial x_{\alpha\beta}^1} &= \frac{\partial F^2}{\partial x_{\alpha\beta}^2} = \frac{\partial F^3}{\partial x_{\alpha\beta}^3} = M, \\ \frac{\partial F^1}{\partial x_{\beta\beta}^1} &= \frac{\partial F^2}{\partial x_{\beta\beta}^2} = \frac{\partial F^3}{\partial x_{\beta\beta}^3} = L, \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} = \Delta_1 \left( \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \right),$$

(zur Bezeichnung siehe (33)), und weiter

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} = \Delta_2 \left( \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \right),$$

$$\frac{\partial F^3}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} = \Delta_3 \left( \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} \frac{\Delta_1}{\Delta_3} + \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \right).$$

In der Tat sind also diese drei Ausdrücke gleich und zwar

$$(39_1) \quad N = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^1} & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^2} & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\alpha}^3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Genau ebenso findet man

$$(39_2) \quad M = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^1} & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^2} & \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha\beta}^3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^1} & \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^2} & \frac{\partial F}{\partial x_{\beta\beta}^3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Damit ist gezeigt, daß jede charakteristische Kurve  $\varphi(\alpha, \beta) = \text{const}$  des Systems  $F^1 = 0$ ,  $F^2 = 0$ ,  $F^3 = 0$  für solche Lösungen, die auch den Gleichungen (32), also um so mehr dem ursprünglichen System (30) genügen, enthalten ist in der zweiparametrischen Lösungsschar der charakteristischen Gleichung

$$(37a) \quad N \varphi_\alpha^2 + M \varphi_\alpha \varphi_\beta + L \varphi_\beta^2 = 0.$$

Diese zweiparametrische Schar nennen wir die *Charakteristiken des Systems*  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0$ ,  $A^3 = 0$ .

Genau wie im linearen Fall, auch mit derselben Begründung, nennen wir dieses System (für ein bestimmtes Lösungssystem  $x^i$ ) *hyperbolisch*, wenn  $4LN - M^2 < 0$  ist und *elliptisch*, wenn  $4LN - M^2 > 0$  ist. Der Fall  $4LN - M^2 = 0$  wird wieder ausgeschlossen und dadurch erreicht, daß der Rang der Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

gleich 2 wird.

## § 10.

### Der Zusammenhang des neuen Systems mit dem alten.

Jedes Lösungstriplet  $x^1, x^2, x^3$  des ursprünglichen Systems  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0$ ,  $A^3 = 0$  genügt dem neuen System  $F^1 = 0$ ,  $F^2 = 0$ ,  $F^3 = 0$ , während das Umgekehrte im allgemeinen nicht richtig ist. Es läßt sich jedoch zeigen: Die Ausdrücke  $A^1, A^2, A^3$  genügen, wenn man sie für ein Lösungssystem von  $F^1 = 0$ ,  $F^2 = 0$ ,  $F^3 = 0$  bildet, gewissen Differentialgleichungen, die jedenfalls für  $A^1 = A^2 = A^3 = 0$  erfüllt sind.

Um den Nachweis hierfür analog zu § 5 führen zu können, linearisieren wir alle vorkommenden Differentialgleichungen durch eine Differentiation, die durch einen Punkt angedeutet werden möge, nach irgendeiner festen Richtung in der  $\alpha, \beta$ -Ebene. Die (16) entsprechenden Gleichungen lauten dann

$$(40) \quad N \frac{d^2 A^k}{d\alpha^2} + M \frac{d^2 A^k}{d\alpha d\beta} + L \frac{d^2 A^k}{d\beta^2} + \dots = 0 \quad k = 1, 2, 3,$$

wobei die Punkte für einen (quadratischen) Ausdruck in den

$$\frac{dA^k}{d\alpha}, \frac{dA^k}{d\beta}, \frac{dA^k}{d\alpha}, \frac{dA^k}{d\beta}, \frac{d^2 A^k}{d\alpha^2}, \frac{d^2 A^k}{d\alpha d\beta}, \frac{d^2 A^k}{d\beta^2}$$

stehen, der verschwindet, sobald  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$  ist.

Die Herleitung von (40) erfolgt dann ähnlich wie im linearen Fall; aus diesem Grunde unterbleibt hier die nähere Ausführung.



## § 11.

**Das Cauchysche Anfangswertproblem.****1. Die Bestimmung der ersten und höheren Ableitungen längs einer Anfangskurve.**

Ebenso wie im linearen Fall stehen längs einer Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  (von der wieder  $\frac{d\alpha}{ds} \neq 0$  und  $\frac{d\beta}{ds} \neq 0$  vorausgesetzt sei) zur Bestimmung von  $x^i$ ,  $x_{\alpha}^i$ ,  $x_{\beta}^i$  die Gleichungen zur Verfügung:

$$(45) \quad A^i = 0$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$(46) \quad x_{\alpha}^i \dot{\alpha} + x_{\beta}^i \dot{\beta} = \dot{x}^i$$

$$(47) \quad S_1 = (v_k \dot{\alpha}^k - \mu_k \dot{\alpha} \dot{\beta} + \lambda_k \dot{\beta}^k) \frac{dA^k}{d\alpha} = 0$$

(Punkt bedeutet Differentiation nach der Bogenlänge  $s$ ). Dabei ist längs der Anfangskurve  $\frac{dA^i}{d\alpha} \dot{\alpha} + \frac{dA^i}{d\beta} \dot{\beta} = 0$ , also

$$(47^*) \quad S_1 = -v_k \frac{dA^k}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 - 2v_k \frac{dA^k}{d\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left( \lambda_k \frac{dA^k}{d\alpha} + \mu_k \frac{dA^k}{d\beta} \right) \dot{\beta}^2,$$

so daß nach (32<sub>1</sub>), (32<sub>2</sub>), (32<sub>3</sub>) die zweiten Ableitungen der  $x^i$  durch

$$x_{\alpha\alpha}^i \dot{\alpha}^2 + 2x_{\alpha\beta}^i \dot{\alpha} \dot{\beta} + x_{\beta\beta}^i \dot{\beta}^2 = \ddot{x}^i - x_{\alpha}^i \ddot{\alpha} - x_{\beta}^i \ddot{\beta}$$

eliminiert werden können. So ergibt sich eine Gleichung

$$(47a) \quad T_1 = 0,$$

die keine zweiten Ableitungen nach  $\alpha$ ,  $\beta$  mehr enthält.

Längs der Anfangskurve wären demnach bei vorgegebenem  $x^i$  zur Bestimmung der neun Größen  $x^i$ ,  $x_{\alpha}^i$ ,  $x_{\beta}^i$  die sieben Gleichungen (45), (46), (47a) vorhanden. Es dürfen also im allgemeinen bereits die  $x^i$  längs der Anfangskurve nicht mehr willkürlich vorgegeben werden.

Denkt man sich neun Funktionen  $x^i$ ,  $x_{\alpha}^i$ ,  $x_{\beta}^i$  von  $s$  vorgelegt, die den Gleichungen (45), (46), (47a) genügen, so bestimmen sich die neun weiteren Ableitungen  $x_{\alpha\alpha}^i$ ,  $x_{\alpha\beta}^i$ ,  $x_{\beta\beta}^i$  (falls  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  nichtcharakteristisch ist) eindeutig aus den neun Gleichungen

$$(48) \quad S_2 = (v_k \dot{\alpha}^2 - \mu_k \dot{\alpha} \dot{\beta} + \lambda_k \dot{\beta}^2) \frac{d^2 A^k}{d\alpha^2} = 0,$$

$$(49) \quad \frac{dA^1}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dA^2}{d\alpha} = 0,$$

$$(50) \quad x_{\alpha\alpha}^i \dot{\alpha} + x_{\alpha\beta}^i \dot{\beta} = \dot{x}_{\alpha}^i, \quad x_{\alpha\beta}^i \dot{\alpha} + x_{\beta\beta}^i \dot{\beta} = \dot{x}_{\beta}^i \quad i = 1, 2, 3.$$

Dazu ist folgendes zu sagen:

1. Die dritten Ableitungen, die in  $S_2$  vorkommen, eliminiere man nach der Formel

$$x_{\alpha\alpha\alpha}^i \dot{\alpha}^2 + 2x_{\alpha\alpha\beta}^i \dot{\alpha} \dot{\beta} + x_{\alpha\beta\beta}^i \dot{\beta}^2 = \dot{x}_\alpha^i - x_{\alpha\alpha}^i \ddot{\alpha} - x_{\alpha\beta}^i \ddot{\beta}.$$

2. Da  $\nu_k \dot{\alpha}^2 - \mu_k \dot{\alpha} \dot{\beta} + \lambda_k \dot{\beta}^2 = 0$  nicht für  $k = 1, 2, 3$  gelten kann, wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\nu_3 \dot{\alpha}^2 - \mu_3 \dot{\alpha} \dot{\beta} + \lambda_3 \dot{\beta}^2 \neq 0$  angenommen, so daß aus (47) und (48) auch

$$(49a) \quad \frac{dA^3}{d\alpha} = 0$$

folgt.

3. Die Gleichungen (49), (50) sind in den Unbekannten linear, hingegen (48) quadratisch.

4. Die Gleichungen (48), (49), (50) sind längs der Anfangskurve äquivalent mit den Gleichungen (34) und (50). Es ist nämlich längs der Anfangskurve

$$S_2 = \left( \lambda_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \alpha^2} + \mu_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu_k \frac{\partial^2 A^k}{\partial \beta^2} \right) \dot{\beta}^2,$$

also ist wegen  $\dot{\beta} \neq 0$  mit der Bezeichnung (31) die Gleichung  $S_2 = 0$  gleichbedeutend mit  $F = 0$ . Da aus (49) und (49a) die Gleichungen (32) folgen (und umgekehrt), so ist damit die Äquivalenz von (48), (49), (50) mit (34), (50) längs der Anfangskurve nachgewiesen.

5. Die Funktionaldeterminante der Gleichungen (48), (49), (50) nach den neun zweiten Ableitungen verschwindet nicht, wenn die Anfangskurve nichtcharakteristisch ist, d. h. wenn mit den Bezeichnungen (39)

$$(51) \quad N \dot{\beta}^2 - M \dot{\alpha} \dot{\beta} + L \dot{\alpha}^2 \neq 0$$

ist; dies folgt daraus, daß die Funktionaldeterminante von (34), (50) mit der linken Seite von (51) bis auf nicht verschwindende Faktoren übereinstimmt.

6. Obwohl das Gleichungssystem (48), (49), (50) bzw. das äquivalente (34), (50) in den Unbekannten nicht linear ist, lassen diese sich eindeutig berechnen; das folgt aus dem in § 6 bewiesenen Monge-Ampèreschen Charakter der Gleichungen (34).

Nachdem so die zweiten Ableitungen bestimmt sind, ist klar, wie sich die dritten und höheren Ableitungen (eindeutig) berechnen lassen.

Die Funktionaldeterminante der sechs Gleichungen (47), (46) und  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0$  nach den sechs Größen  $x_\alpha^i$ ,  $x_\beta^i$  stimmt offenbar bis auf einen nicht verschwindenden Faktor mit der von (48), (49), (50) nach  $x_{\alpha\alpha}^i$ ,  $x_{\alpha\beta}^i$ ,  $x_{\beta\beta}^i$  überein, ist also (im nichtcharakteristischen Fall) von Null verschieden. Man kann sich  $x_\alpha^i$ ,  $x_\beta^i$  als Funktionen von  $x^i$ ,  $\dot{x}^i$  be-

rechnen, in die Gleichung  $A^3 = 0$  einsetzen und erhält so eine Beziehung der Form

$$f(x', \dot{x}', s) = 0,$$

die der Gleichung (23) im linearen Fall entspricht.

## 2. Das Cauchysche Anfangswertproblem.

Nach der vorangegangenen Nummer ist klar, wie man das Cauchysche Anfangswertproblem für das System  $A^1 = 0$ ,  $A^2 = 0$ ,  $A^3 = 0$  zu behandeln hat. Man denke sich längs der Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  neun Funktionen so vorgegeben, daß die Gleichungen (45), (46), (47) erfüllt sind und berechne daraus nach (48), (49), (50) eindeutig  $x'_{\alpha\alpha}$ ,  $x'_{\alpha\beta}$ ,  $x'_{\beta\beta}$ . Das ist immer möglich, falls

$$N\dot{\beta}^2 - M\dot{\alpha}\dot{\beta} + L\dot{\alpha}^2 \neq 0$$

ist. Nach dem oben Bemerkten darf man im Falle  $4LN - M^2 \neq 0$  voraussetzen, daß längs  $\alpha = \alpha(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$  die Ungleichungen (33) gelten. Die längs der Anfangskurve festgelegten Werte von  $x'$ ,  $x'_{\alpha}$ ,  $x'_{\beta}$ ,  $x'_{\alpha\alpha}$ ,  $x'_{\alpha\beta}$ ,  $x'_{\beta\beta}$  genügen daher auch den Gleichungen

$$(34) \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = 0.$$

Wenn die Anfangswerte und die Ausdrücke  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  analytische Funktionen ihrer Argumente sind, so kann man auf (34) die üblichen Existenzsätze anwenden. Im nichtanalytischen Falle muß  $4LN - M^2 < 0$  vorausgesetzt werden. Dann ergibt sich die Existenz eines Lösungssystems von (34) in einer gewissen von den Charakteristiken begrenzten Umgebung der Anfangskurve<sup>13)</sup>.

Daß in derselben Umgebung die so gewonnene Lösung von  $F^i = 0$  auch eine Lösung von  $A^1 = A^2 = A^3 = 0$  ist, folgt so: Längs der Anfangskurve gelten die Gleichungen

$$A^i = \frac{dA^i}{d\alpha} = \frac{dA^i}{d\beta} = \frac{d^2A^i}{d\alpha^2} = \frac{d^2A^i}{d\alpha d\beta} = \frac{d^2A^i}{d\beta^2} = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

Daraus ergibt sich aber wegen (40)  $A^i = 0$  in einer Umgebung der Anfangskurve, die von Charakteristiken begrenzt ist. Man beachte, daß (40) ein Gleichungssystem dritter Ordnung ist, dessen dritte charakteristische Richtung durch die mit einem Punkt bezeichnete Richtung gegeben ist. Diese dritte Richtung war seinerzeit völlig willkürlich wählbar. Man kann also in einer genügend kleinen Umgebung der Anfangskurve voraus-

<sup>13)</sup> Man beachte jedoch Anm. <sup>10)</sup>. Das dort Gesagte gilt auch hier.

setzen, daß die beiden durch (37 a) gelieferten Charakteristiken die äußeren<sup>14)</sup> sind, während diese dritte Charakteristik zwischen diesen beiden äußeren verläuft. Man ist dadurch sicher, daß das Gebiet, wo  $A^1 = A^2 = A^3 = 0$  gefolgert werden kann, nicht kleiner ist als das oben genannte Existenzgebiet der Lösungen von (34).

## § 12.

**Über die Bestimmung aller Realisationen  
eines zweidimensionalen Linienelementes in einem vorgelegten  
dreidimensionalen Riemannschen Raum.**

Es sei

$$ds^2 = e d\alpha^2 + 2f d\alpha d\beta + g d\beta^2$$

das Linienelement, das in den Riemannschen Raum  $V_3$  mit der Maßbestimmung

$$dS^2 = G_{ik} dx^i dx^k$$

eingebettet werden soll. Von den  $G_{ik}$  setzen wir zweimalige stetige Differenzierbarkeit nach ihren Argumenten  $x^1, x^2, x^3$  voraus, desgleichen von  $e, f, g$  nach den Argumenten  $\alpha, \beta$ . Die im Titel genannte Aufgabe fällt offenbar mit dem Cauchyschen Anfangswertproblem für das Differentialgleichungsproblem

$$(56) \quad \begin{aligned} A^1 &\equiv G_{1k} x_\alpha^k - e = 0, \\ A^2 &\equiv G_{2k} x_\beta^k - f = 0, \\ A^3 &\equiv G_{3k} x_\beta^k - g = 0 \end{aligned}$$

zusammen; es zeigt die oben behandelte Ausartung.

Bei diesem speziellen Beispiel sehen die allgemeinen Überlegungen von § 7 bis § 11 so aus: Für  $\lambda_k, \mu_k, \nu_k$  kann man wählen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= \frac{1}{2}, & \lambda_3 &= 0; \\ \mu_1 &= 0, & \mu_2 &= 0, & \mu_3 &= -1; \\ \nu_1 &= \frac{1}{2}, & \nu_2 &= 0, & \nu_3 &= 0, \end{aligned}$$

so daß die Matrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} G_{1k} x_\alpha^k & G_{2k} x_\alpha^k & G_{3k} x_\alpha^k \\ G_{1k} x_\beta^k & G_{2k} x_\beta^k & G_{3k} x_\beta^k \end{pmatrix}$$

dann den Rang 2 hat, wenn  $eg - f^2$  und die Determinante  $\|G_{ik}\|$  nicht Null ist.

<sup>14)</sup> Zum Begriff der äußeren Charakteristik vgl. K. Friedrichs und H. Lewy, Das Anfangswertproblem einer beliebigen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet, Math. Annalen 99 (1928).

Den Gleichungen (32) entsprechen die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dA^1}{d\alpha} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{dA^1}{d\beta} &= 0, & \frac{dA^2}{d\beta} - \frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\alpha} &= 0, \\ \frac{dA^3}{d\alpha} - \frac{1}{2} \frac{dA^1}{d\beta} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{dA^3}{d\alpha} &= 0, & \frac{1}{2} \frac{dA^3}{d\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Der Gleichung (31) entspricht

$$(57) \quad F = \frac{1}{2} \frac{d^2 A^3}{d\alpha^2} - \frac{d^2 A^3}{d\alpha d\beta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 A^1}{d\beta^2}.$$

Drückt man mit Hilfe der ersten Gleichungen alle zweiten Ableitungen von (57) durch  $x_{\alpha\alpha}^1, x_{\alpha\beta}^1, x_{\beta\beta}^1$  bzw.  $x_{\alpha\alpha}^2, x_{\alpha\beta}^2, x_{\beta\beta}^2$  bzw.  $x_{\alpha\alpha}^3, x_{\alpha\beta}^3, x_{\beta\beta}^3$  aus, so erhält man der Reihe nach

$$F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = 0.$$

Als charakteristische Gleichung ergibt sich nach (37a), (39) und (57)

$$N \varphi_\alpha^2 + M \varphi_\alpha \varphi_\beta + L \varphi_\beta^2 = 0,$$

wobei, wie man leicht nachrechnet, die  $L, M, N$  gerade die Komponenten des zweiten Fundamentaltensors sind; d. h. die Charakteristiken sind die *Asymptotenlinien* der Fläche.

Was die Bestimmung der ersten (und höheren) Ableitungen von  $x, y, z$  längs einer Anfangskurve  $\alpha = \alpha(s), \beta = \beta(s)$  betrifft, so lautet die Beziehung, der  $x, y, z$  genügen müssen, hier

$$G_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = e \dot{\alpha}^2 + 2f \dot{\alpha} \dot{\beta} + g \dot{\beta}^2,$$

wie unmittelbar aus (56) folgt. Zur Berechnung der sechs ersten Ableitungen ziehen wir außer den Streifenrelationen

$$\dot{x}^i = x_\alpha^i \dot{\alpha} + x_\beta^i \dot{\beta} \quad (i = 1, 2, 3)$$

die drei Gleichungen

$$(58) \quad A^1 = 0, \quad A^2 = 0, \quad S_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{dA^1}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{dA^2}{d\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\alpha} \dot{\beta}^2 = 0$$

heran. Ersetzt man  $S_1 = 0$  durch die längs der Anfangskurve äquivalente Gleichung (vgl. 47\*)

$$S_1 = -\frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 - \frac{dA^2}{d\beta} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left( \frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\alpha} - \frac{dA^3}{d\beta} \right) \dot{\beta}^2 = 0,$$

so ergibt sich

$$(59) \quad -S_1 = G_{j\tau} x_\alpha^j [\ddot{x}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{x}^i \dot{x}^k - x_{\alpha i}^j (\ddot{\alpha}^i + \gamma_{im}^i \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_m)] = 0,$$

wo  $\Gamma_{ik}^j$  bzw.  $\gamma_{im}^j$  die Christoffelschen Symbole zweiter Art sind, die zu

$$dS^2 = G_{ik} dx^i dx^k$$

bzw. zu

$$ds^2 = e d\alpha^2 + 2f d\alpha_1 d\alpha_2 + g d\alpha_2^2 \quad (\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta)$$

gehören. Diese Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung: Projiziert man die beiden Seiten der Vektorgleichung „Absolute Krümmung der Kurve  $x^i(s)$  gleich erzwungener Krümmung + relativer Krümmung“<sup>15)</sup> auf die durch  $x_\alpha^i$  gegebene Richtungen, so entsteht gerade (59). Nun ersetzen wir in den drei Gleichungen (59),  $A^1 = 0$  und  $A^2 - A^1 = 0$  die Größen  $x_\beta^i$  durch  $\frac{x^i}{\beta} - \frac{\dot{\alpha}}{\beta} x_\alpha^i$ . Dann erhalten wir drei Gleichungen für die drei Größen  $x_\alpha^i$ , von denen die aus (59) und  $A^2 - A^1 = 0$  entstandenen linear in den Unbekannten  $x_\alpha^i$  sind, während  $A^1 = 0$  darin quadratisch ist. Über den allgemeinen Fall hinaus läßt sich jetzt sogar sagen: Diese drei so entstandenen Gleichungen lassen immer zwei und nur zwei reelle Lösungen zu, wenn der Betrag der absoluten Krümmung der Kurve  $x^i(s)$  größer ist, als der Betrag der relativen Krümmung.

Damit sind alle oben allgemein entwickelten Begriffe an diesem speziellen Beispiel erläutert. Die Lösung des zu (50) gehörigen Cauchy-schen Anfangswertproblems und damit der in der Einleitung genannte Satz ergibt sich wie im allgemeinen Fall.

### III. Abschnitt.

#### § 13.

#### Verallgemeinerung auf ein System von $n$ Differentialgleichungen.

Im folgenden wird der allgemeine Fall von  $n > 3$  Differentialgleichungen mit  $n$  gesuchten Funktionen  $x^i(\alpha, \beta)$  von  $\alpha, \beta$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$(62) \quad A^k \left( \frac{\partial x^i}{\partial \alpha}, \frac{\partial x^i}{\partial \beta}, x^i, \alpha, \beta \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

kurz skizziert. Das identische Verschwinden der in der üblichen Weise gebildeten charakteristischen Determinante besagt

$$\|A_{p_i}^k \varphi_\alpha + A_{q_i}^k \varphi_\beta\| = 0$$

$$\left( p_i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha}, \quad q_i = \frac{\partial x^i}{\partial \beta}, \quad A_{p_i}^k = \frac{\partial A^k}{\partial p_i}, \quad A_{q_i}^k = \frac{\partial A^k}{\partial q_i} \right)$$

für alle Verhältnisse  $\varphi_\alpha : \varphi_\beta$  und alle Werte der Argumente  $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha}, \frac{\partial x^i}{\partial \beta}, x^i, \alpha, \beta$ . Daraus ergibt sich die Existenz von  $n^2$  Größen  $\lambda_k^i$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ), die nicht gleichzeitig verschwinden und für die

$$(63) \quad \lambda_k^1 A_{p_i}^k = 0, \quad \lambda_k^2 A_{q_i}^k = 0, \quad \lambda_k^r A_{q_i}^k + \lambda_{k+1}^{r+1} A_{p_i}^k = 0; \quad r = 1, 2, \dots, n-1$$

<sup>15)</sup> Siehe etwa L. P. Eisenhart, „Riemannian Geometry“, S. 151, Formel (44. 1).

ist. Setzt man den Rang der Matrix

$$m = ((\lambda_k^i A_i^k)) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 2, 3, \dots, n \end{matrix}$$

gleich  $n-2$  voraus, so ist die Determinante  $|\lambda_k^i|$  von Null verschieden.

Um von (62) auf ein nichtausgeartetes System zu kommen, bilde man

$$(64) \quad F \equiv \lambda_k^1 \frac{d^{n-1} A^k}{d\alpha^{n-1}} + \lambda_k^2 \frac{d^{n-1} A^k}{d\alpha^{n-2} d\beta} + \dots + \lambda_k^n \frac{d^{n-1} A^k}{d\beta^{n-1}} = 0.$$

Auf Grund von (63) enthält  $F$  nur Ableitungen  $(n-1)$ -ter Ordnung. Wegen  $n > 3$  kommen die  $(n-1)$ -ten Ableitungen in  $F$  linear vor.

Den Gleichungen (32) von früher entsprechen hier die Gleichungen

$$(65) \quad \begin{aligned} & \lambda_k^n \frac{d^{n-2} A^k}{d\alpha^{n-2-\nu-\mu} d\beta^{\nu+\mu}} + \lambda_k^{n-1} \frac{d^{n-2} A^k}{d\alpha^{n-1-\nu-\mu} d\beta^{\nu+\mu-1}} + \dots \\ & \quad + \lambda_k^{n-\nu} \frac{d^{n-2} A^k}{d\alpha^{n-2-\mu} d\beta^{\mu}} \\ & \equiv \lambda_k^{n-\nu} A_{p_i}^k \frac{\partial^{n-1} x^i}{\partial \alpha^{n-1-\mu} \partial \beta^{\mu}} + \dots, \end{aligned}$$

die man mit Hilfe von (63) gewinnt. Bei festem  $\mu$  sind das  $n-1$  Gleichungen, da  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-2$ . Wegen  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$  erhält man im ganzen  $n(n-1)$  Gleichungen, die in den  $n^3$  Ableitungen  $(n-1)$ -ter Ordnung  $\frac{\partial^{n-1} x^i}{\partial \alpha^{n-1-k} \partial \beta^k}$  linear sind. Die Punkte auf der rechten Seite von (65) stehen für Glieder, die keine  $(n-1)$ -ten Ableitungen mehr enthalten. Man kann also durch lineare Kombination aus (64) und (65)  $n$  Gleichungen  $F^i = 0$  erhalten, deren jede die  $(n-1)$ -ten Ableitungen nur von *einer* der gesuchten Funktionen  $x^i$  enthält. Wie man aus (65) und (64) sieht, haben die Gleichungen  $F^i = 0$  die Form

$$(66) \quad F^i \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} L_{\nu} \frac{\partial^{n-1} x^i}{\partial \alpha^{n-1-\nu} \partial \beta^{\nu}} + \dots = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dabei bedeuten die Punkte Glieder ohne  $(n-1)$ -te Ableitungen, die im allgemeinen von  $i$  abhängen. Die  $L_{\nu}$  hängen *nicht* vom Index  $i$  ab; sie enthalten gleichfalls keine Ableitungen  $(n-1)$ -ter Ordnung. Es ist

$$L_{\nu} \equiv \begin{vmatrix} F_{1,\nu} & F_{2,\nu} & \dots & F_{n,\nu} \\ \lambda_1^2 A_{p_1}^2 & \lambda_1^2 A_{p_2}^2 & \dots & \lambda_1^2 A_{p_n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n A_{p_1}^n & \lambda_1^n A_{p_2}^n & \dots & \lambda_1^n A_{p_n}^n \end{vmatrix},$$

wo  $F_{i,\nu}$  die partielle Ableitung von  $F$  nach  $\frac{\partial^{n-1} x^i}{\partial \alpha^{n-1-\nu} \partial \beta^{\nu}}$  bedeutet.



Damit ist das System (62) auf das nichtausgeartete System (65) reduziert. Als charakteristische Gleichung von (62) werden wir demnach die Gleichung

$$\sum_{v=0}^{n-1} L_v \varphi_{\alpha}^{n-1-v} \varphi_{\beta}^v = 0$$

ansehen.

#### § 14.

**Verallgemeinerung auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche.**

Vorgelegt sei das System

$$(67) \quad A^i \equiv a_{k,1}^i \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_1} + a_{k,2}^i \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2} + \dots + a_{k,m}^i \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_m} + b_i = 0$$

( $i = 1, 2, 3$ ; über  $k$  von 1 bis 3 summieren!),

in dem die gesuchten Funktionen  $x^1, x^2, x^3$  von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  abhängen. Die  $b_i$  sind Funktionen von  $x^1, x^2, x^3, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ , während die  $a_{k,1}^i, a_{k,2}^i, \dots, a_{k,m}^i$  *Konstante sein sollen*. Außerdem sei die in der üblichen Weise gebildete charakteristische Determinante identisch Null, d. h. es verschwinde die dreireihige Determinante

$$\Delta = \|a_{k,1}^i \varphi_{\alpha_1} + a_{k,2}^i \varphi_{\alpha_2} + \dots + a_{k,m}^i \varphi_{\alpha_m}\|$$

für jeden Wert von  $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \dots, \varphi_{\alpha_m}$ . Führt man die Operatoren

$$l_{ik} = a_{k,1}^i \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + a_{k,2}^i \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \dots + a_{k,m}^i \frac{\partial}{\partial \alpha_m}$$

ein, so erhält (67) die Gestalt

$$(67a) \quad \begin{aligned} A^1 &\equiv l_{11} x^1 + l_{12} x^2 + l_{13} x^3 + b_1 = 0, \\ A^2 &\equiv l_{21} x^1 + l_{22} x^2 + l_{23} x^3 + b_2 = 0, \\ A^3 &\equiv l_{31} x^1 + l_{32} x^2 + l_{33} x^3 + b_3 = 0. \end{aligned}$$

Das identische Verschwinden der Determinante  $\Delta$  drückt sich jetzt so aus. Es sei

$$L = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}$$

derjenige Differentialoperator dritter Ordnung, der durch formales Ausrechnen der Determinante  $\|l_{ik}\|$  entsteht. Dann ist das identische Verschwinden von  $\Delta$  äquivalent damit, daß für jede dreimal stetig differenzierbare Funktion  $w$  der Argumente  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  identisch in diesen Argumenten  $Lw = 0$  gilt.

Es sei  $L_{ik}$  die zur  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Kolonne gehörige Unterdeterminante von  $L$ ; die  $L_{ik}$  sind also Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Bildet man  $L_{11}A^1 + L_{21}A^2 + L_{31}A^3$ , so ergibt sich wegen  $Lx^1 = 0$  sofort

$$L_{11}A^1 + L_{21}A^2 + L_{31}A^3 \equiv L_{11}b_1 + L_{21}b_2 + L_{31}b_3 = 0.$$

Damit ist eine Gleichung zweiter Ordnung abgeleitet, der jedenfalls jedes Lösungssystem  $x^1, x^2, x^3$  von (67) genügt. Ausgeführt lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} F \equiv & \left( \frac{\partial b_1}{\partial x^1} L_{11} + \frac{\partial b_2}{\partial x^1} L_{21} + \frac{\partial b_3}{\partial x^1} L_{31} \right) x_1 \\ & + \left( \frac{\partial b_1}{\partial x^2} L_{11} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} L_{21} + \frac{\partial b_3}{\partial x^2} L_{31} \right) x^2 \\ & + \left( \frac{\partial b_1}{\partial x^3} L_{11} + \frac{\partial b_2}{\partial x^3} L_{21} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3} L_{31} \right) x^3 + \dots = 0, \end{aligned}$$

wobei die Punkte an Stelle von Gliedern stehen, die *keine* zweiten Ableitungen der  $x^i$  mehr enthalten. Um hieraus eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, in der zweite Ableitungen nur von  $x^1$  vorkommen, bilden wir aus (67a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_{22}x^1 - L_{21}x^2 + l_{22}b_1 - l_{21}b_2 &= 0; & -L_{32}x^1 + L_{31}x^2 + l_{32}b_1 - l_{31}b_2 &= 0; \\ -L_{22}x^1 + L_{21}x^2 + l_{22}b_1 - l_{21}b_2 &= 0; & L_{32}x^1 - L_{31}x^2 + l_{32}b_1 - l_{31}b_2 &= 0; \\ -L_{12}x^1 + L_{11}x^2 + l_{12}b_1 - l_{11}b_2 &= 0; & L_{12}x^1 - L_{11}x^2 + l_{12}b_1 - l_{11}b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser sechs Gleichungen lassen sich die zweiten Ableitungen von  $x^2$  und  $x^3$ , die in  $F = 0$  vorkommen, durch solche von  $x^1$  ausdrücken. Führt man das aus, so ergibt sich

$$(68.) \quad \Lambda x^1 + \dots = 0,$$

wobei  $\Lambda$  der Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{\partial b_1}{\partial x^1} L_{11} + \frac{\partial b_2}{\partial x^1} L_{21} + \frac{\partial b_3}{\partial x^1} L_{31} + \frac{\partial b_1}{\partial x^2} L_{12} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} L_{22} + \frac{\partial b_3}{\partial x^2} L_{32} \\ & + \frac{\partial b_1}{\partial x^3} L_{13} + \frac{\partial b_2}{\partial x^3} L_{23} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3} L_{33} \end{aligned}$$

ist und die Punkte Ausdrücke bedeuten, die keine zweiten Ableitungen mehr enthalten. Übrigens läßt sich  $\Lambda$  symbolisch in der Form schreiben:

$$\Lambda \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x^1} & l_{12} & l_{13} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x^1} & l_{22} & l_{23} \\ \frac{\partial b_3}{\partial x^1} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{11} & \frac{\partial b_1}{\partial x^2} & l_{13} \\ l_{21} & \frac{\partial b_2}{\partial x^2} & l_{23} \\ l_{31} & \frac{\partial b_3}{\partial x^2} & l_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \frac{\partial b_1}{\partial x^3} \\ l_{21} & l_{22} & \frac{\partial b_2}{\partial x^3} \\ l_{31} & l_{32} & \frac{\partial b_3}{\partial x^3} \end{vmatrix},$$

wenn man die drei Determinanten so formal ausrechnet, als ob die  $\frac{\partial b_1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial b_3}{\partial x^3}$  konstant wären.

Genau wie (68<sub>1</sub>) erhält man

$$(68_1) \quad \Lambda x^2 + \dots = 0,$$

$$(68_2) \quad \Lambda x^3 + \dots = 0,$$

wobei der Operator  $\Lambda$  in (68<sub>1</sub>), (68<sub>2</sub>), (68<sub>3</sub>) derselbe ist, während die Punkte in den einzelnen Gleichungen im allgemeinen verschiedene Bedeutung haben; ihnen ist nur gemeinsam, daß sie Glieder ohne zweite Ableitungen der  $x^i$  darstellen.

In (68<sub>1</sub>), (68<sub>2</sub>), (68<sub>3</sub>) ist ein System der gewünschten Form abgeleitet, dem jedes Lösungssystem von (67) genügt. Umgekehrt gelten, wie eine leichte Rechnung zeigt, für jedes Lösungssystem  $x^1, x^2, x^3$  von (68<sub>1</sub>), (68<sub>2</sub>), (68<sub>3</sub>) die drei Gleichungen

$$\Lambda A^1 + \dots = 0,$$

$$\Lambda A^2 + \dots = 0,$$

$$\Lambda A^3 + \dots = 0,$$

wobei die Punkte in den einzelnen Gleichungen zwar verschiedene Bedeutung haben, jedoch in jeder Gleichung ein lineares *homogenes* Aggregat von  $A^1, A^2, A^3, \frac{\partial A^1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial A^1}{\partial x_m}, \frac{\partial A^2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial A^2}{\partial x_m}, \frac{\partial A^3}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial A^3}{\partial x_m}$  bedeuten.

(Eingegangen am 16. 10. 1933.)

# The Du Bois-Reymond Relation in the Calculus of Variations.

Von

E. J. McShane in Göttingen.

---

## § 1.

### Introduction.

In many places in the literature occur proofs that solutions of the variation problem

$$\int_a^b F(x, y, y') dx = \min.$$

satisfy the Du Bois-Reymond form of the Euler-Lagrange equations, the assumption being made that these solutions have continuous derivatives except at a finite number of corners or else that they satisfy a Lipschitz condition. But the theorems on the existence of solutions of such problems state that under suitable hypotheses, there exists an absolutely continuous function  $y = y(x)$  for which the integral has minimum value. To these solutions the Du Bois-Reymond condition can not directly be applied. It is therefore desirable to find conditions on the function  $F$  which will ensure that every absolutely continuous solution of our problem will satisfy the Du Bois-Reymond condition. Such a set of conditions has been given by Tonelli<sup>1</sup>). We here derive the Du Bois-Reymond condition under weaker conditions — conditions weak enough in fact to be satisfied by every positive-valued differentiable integrand of the form  $\varphi(x, y) \psi(y')$ , as well as many others.

For a slight added generality we here consider problems in space instead of problems in the plane.

## § 2.

### Notation.

The curves which we shall consider are those in a space of  $q+1$  dimensions. For the coordinates of points in this space we shall use two different notations; first,  $(x, y^1, \dots, y^q)$ , abbreviated to  $(x, y)$ , which is

<sup>1</sup>) L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 321.

most convenient when dealing with ordinary integrands; and second,  $(z^0, z^1, \dots, z^q)$ , abbreviated to  $z$ , which is useful when handling parametric problems. Here  $z^0 = x$ ,  $z^i = y^i$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

The letter bearing a suffix will always indicate unambiguously the range of that suffix. But for an additional safeguard against confusion the suffix  $i$  will always have the range  $1, 2, \dots, q$  and the suffix  $j$  will always have the range  $0, 1, \dots, q$ .

For the derivatives of functions  $F(x, y, y') \equiv F(x, y^1, \dots, y^q, y^1, \dots, y^q)$  and  $G(z, z') \equiv G(z^0, \dots, z^q, z^0, \dots, z^q)$  with respect to the last set of arguments we shall use the symbols

$$F_i = \frac{\partial}{\partial y^i} F(x, y, y') \quad (i = 1, \dots, q),$$

$$G_j = \frac{\partial}{\partial z^j} G(z, z') \quad (j = 0, 1, \dots, q).$$

Unit vectors  $z'$ , that is vectors such that  $\Sigma (z^j)^2 = 1$ , will be denoted by the symbol  $z'_u$  and modifications of it.

### § 3.

#### The Associated Parametric Integrand.

Let  $F(x, y, y')$  be a function defined continuous and possessing continuous first partial derivatives for all  $(x, y)$  on a set  $A$  and all  $y'$ . We define the *associated parametric integrand*  $G$  by the equations

$$(1) \quad G(z, z') = G(x, y, x', y') = x' F\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right), \quad x' > 0,$$

$$G(z, 0) = G(z^0, \dots, z^q, 0, \dots, 0) = 0.$$

For all  $z$  on  $A$  and all  $z'$  with  $z^{0'} > 0$  this function is continuous and has continuous partial derivatives. Moreover,  $G$  is positively homogeneous of degree 1 in  $z'$ , and its partial derivatives  $G_j$  are positively homogeneous of degree 0 in  $z'$ . These derivatives are given by the formulas

$$(2) \quad G_0(z, z') = G_0(x, y, x', y') = F(x, y, y') - \frac{1}{x'} \sum_{i=1}^q y^i F_i\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right),$$

$$(3) \quad G_i(z, z') = G_i(x, y, x', y') = F_i\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) \\ (i = 1, \dots, q).$$

Let the functions  $y^i = y^i(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , which we abbreviate to

$$(4) \quad y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

be continuous and of limited total variation, and let

$$(5) \quad C: z = z(s), \quad 0 \leq s \leq L,$$

be a parametric representation of the curve (4),  $s$  being length of arc. Then<sup>2)</sup> the functions  $y(x)$  are all absolutely continuous if and only if the inequality

$$(6) \quad z''(s) > 0$$

holds for almost all values of  $s$ . If this is the case, the function

$$(7) \quad G(z(s), z'(s))$$

is defined for almost all  $s$ ; for the remaining set of measure 0, we assign it the value 0. Since  $G(z, z')$  is continuous on the set  $[z \text{ on } C; z'' > 0]$ , the function (7) is measurable<sup>3)</sup>.

Moreover, let  $s = s(t)$  be an absolutely continuous monotonic function such that  $s'(t) > 0$  for almost all  $t$ , so that it has an absolutely continuous inverse<sup>4)</sup>.

We thus obtain for the curve  $C$  the representation

$$(8) \quad z = \bar{z}(t) \equiv z(s(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

For almost all  $t$  we have  $\bar{z}'(t) = z'(s) \cdot s'(t) > 0$ , so that the function

$$(9) \quad G(\bar{z}(t), \bar{z}'(t))$$

is almost everywhere defined and is measurable.

We now cite the result proved elsewhere<sup>5)</sup>:

*Let  $s'(t)$  be positive for almost all values of  $t$ . Then if either of the integrals*

$$(10) \quad I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

*and*

$$(11) \quad J[C] = \int_{t_0}^{t_1} G(\bar{z}(t), \bar{z}'(t)) dt$$

*exists, so does the other, and the two are equal.*

### § 3.

#### Statement of the Theorem.

The integrands  $F(x, y, y')$  with which we shall be concerned are those which, besides the usual conditions of being continuous together with their partial derivatives for all  $(x, y)$  on a set  $A$  and all  $y'$ , satisfy one or more of the following  $q + 1$  conditions:

<sup>2)</sup> Existence Theorems for Ordinary Problems of the Calculus of Variations, to appear in *Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa*.

<sup>3)</sup> Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, p. 377.

<sup>4)</sup> *l. c.* <sup>3)</sup>, p. 584.

<sup>5)</sup> *l. c.* <sup>3)</sup>.

(12<sub>0</sub>). There exist positive numbers  $M_1, M_2, \delta$  such that for all  $y'$ , for all points  $(x, y)$  of  $A$ , and for all points  $(\bar{x}, y)$  of  $A$  with  $|\bar{x} - x| < \delta$  the inequality

$$|F_x(\bar{x}, y, y')| \leq M_1 F(x, y, y') + M_2 [1 + \Sigma(y'')^2]^{1/2}$$

holds.

(12<sub>1</sub>). There exist positive numbers  $M_1, M_2, \delta$  such that for all  $y'$ , all points  $(x, y)$  of  $A$  and all points  $(x, \bar{y})$  of  $A$  such that  $|\bar{y}' - y'| < \delta$ ,  $\bar{y}^k = y^k$  ( $k \neq i$ ) the inequality

$$|F_{y^i}(x, \bar{y}, y')| \leq M_1 F(x, y, y') + M_2 [1 + \Sigma(y'')^2]^{1/2}$$

holds.

The conclusion which we wish to reach is that there exist constants  $c_0, c_1, \dots, c_q$  such that the equations

$$(13_0) \quad F(x, y(x), y'(x)) - \sum_{i=1}^q y''(x) F_i(x, y(x), y'(x)) \\ - \int_a^x F_x(x, y(x), y'(x)) dx = c_0,$$

$$(13_i) \quad F_i(x, y(x), y'(x)) - \int_a^x F_{y^i}(x, y(x), y'(x)) dx = c_i \\ (i = 1, \dots, q)$$

hold for almost all values of  $x$ .

The theorem which we shall prove is the following:

**Theorem I.** *Let the function*

$$(14) \quad y = y(x), \quad a \leq x \leq b$$

*minimize the integral  $I[y]$  in the class of all absolutely continuous functions whose graphs lie in  $A$  and join the end points  $(a, y(a))$  and  $(b, y(b))$ , and let the curve  $y = y(x)$  lie entirely interior to the region  $A$ . Then if any one of the conditions (12<sub>j</sub>) ( $j = 0, 1, \dots, q$ ) is satisfied, there exists a constant  $c_j$  such that the corresponding equation (13<sub>j</sub>) is satisfied for almost all values of  $x$ .*

Stated in terms of the associated parametric integrand  $G$  conditions (12<sub>j</sub>) become

(12<sub>j</sub>). There exist positive numbers  $M_1, M_2, \delta$  such that for every vector  $z'$  with  $z^{0'} > 0$ , every point  $z$  of  $A$ , and every point  $\bar{z}$  of  $A$  such that  $|\bar{z}^j - z^j| < \delta$ ,  $\bar{z}^k = z^k$  ( $k \neq j$ ) the inequality

$$|G_{z^j}(\bar{z}, z')| \leq M_1 G(z, z') + M_2 \left[ \sum_{k=1}^q (z^{k'})^2 \right]^{1/2}$$

holds.



Let us suppose that the curve (14) has also the representation

$$(15) \quad z^0 = x = z^0(s), \quad z^i = y^i = z^i(s), \quad 0 \leq s \leq L \quad (i = 1, \dots, q).$$

Since the functions  $y(x)$  have been assumed absolutely continuous, every set of values of  $x$  of measure 0 corresponds to a set of values of  $s$  of measure 0 and conversely, and the desired conclusion becomes: There exist constants  $c_i$  such that the equations

$$(13'_i) \quad \Phi_i(s) \equiv G_i(z(s), z'(s)) - \int_0^s G_{i,j}(z(s), z'(s)) ds = c_i$$

hold for almost all  $s$ .

Thus our theorem can be given the second formulation:

**Theorem I'.** *Let the functions*

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b$$

*minimize the integral  $I[y]$  in the class of all absolutely continuous functions whose graphs join the points  $(a, y(a))$  and  $(b, y(b))$ . Let the curve (14) lie entirely interior to the set  $A$ , and have the parametric representation (15). Then if any one of the conditions  $(12'_i)$  is fulfilled, there exists a constant  $c_i$  such that the corresponding equation  $(13'_i)$  is satisfied for almost all values of  $s$ .*

It is in this last form that we shall prove the theorem. This form has the objection of being stated in terms of the associated integrand  $G$  instead of the original integrand  $F$ . But on the other hand we here have the advantage that the derivatives  $z'(s)$  are bounded, which increases the manageability of the functions involved<sup>6)</sup>.

#### § 4.

#### Proof of the Theorem.

The proof is indirect. Suppose that the condition  $(12'_i)$  is satisfied, but that for no  $c_i$  is  $\Phi_i(s) = c_i$  almost everywhere. Then there exist two constants  $d_1$  and  $d_2 > d_1$  and two sets  $E_1^*, E_2^*$  of positive measure such that the relations

$$(16) \quad \begin{aligned} \Phi_i(s) &\leq d_1 \quad (s \text{ on } E_1^*), \\ \Phi_i(s) &\geq d_2 \quad (s \text{ on } E_2^*) \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> The usefulness of this boundedness of  $z'$  is shown in my note „Über die Unlösbarkeit eines einfachen Problems der Variationsrechnung“. Göttinger Nachrichten 1933, p. 359.

hold. We reject the set of measure 0 on which the  $z'(s)$  are not all defined or  $z^{0'} = 0$ . Then we can find a positive number  $k$  and measurable subsets  $E_1, E_2$  of  $E_1^*, E_2^*$  respectively, such that

$$(17) \quad \begin{aligned} m(E_1) &> 0; \quad z^{0'}(s) \geq k > 0, \quad \Phi_j(s) \leq d_1, \quad (s \text{ on } E_1), \\ m(E_2) &> 0; \quad z^{0'}(s) \geq k > 0, \quad \Phi_j(s) \geq d_2 > d_1 \quad (s \text{ on } E_2). \end{aligned}$$

Denoting by  $\chi_1(s)$  the function which has the value 1 on  $E_1$  and 0 on the complement of  $E_1$ , and defining  $\chi_2(s)$  analogously we define

$$(18) \quad \varphi(s) = \int_0^s [m(E_2) \cdot \chi_1(s) - m(E_1) \cdot \chi_2(s)] ds.$$

We have at once

$$(19) \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0;$$

and remembering that the derivative of the integral of  $\chi_k$  has almost everywhere the value  $\chi_k$  ( $k = 1, 2$ ), we find

$$(20) \quad \begin{aligned} \varphi'(s) &= -m(E_1) \text{ for almost all } s \text{ in } E_2, \\ \varphi'(s) &= m(E_2) \text{ for almost all } s \text{ in } E_1, \\ \varphi'(s) &= 0 \text{ for almost all } s \text{ in } C(E_1 + E_2), \end{aligned}$$

where  $C(E_1 + E_2)$  is the set complementary to  $E_1 + E_2$ .

We define the curve  $C_\alpha$  by the equations

$$(21) \quad \begin{aligned} C_\alpha: \quad z^j &= z_\alpha^j(s) = z^j(s) + \alpha \varphi(s). \\ z^k &= z_\alpha^k(s) = z^k(s) & (k \neq j), \\ 0 &\leq s \leq L, \quad |\alpha| \leq 1. \end{aligned}$$

Since the curve  $C$  is interior to  $A$ , so is  $C_\alpha$  for all sufficiently small values of  $\alpha$ . It remains to show that the  $C_\alpha$  are admissible comparison curves. That  $C_\alpha$  has the same end points as  $C$  is a consequence of equation (19). That the  $C_\alpha$  actually can be represented by absolutely continuous functions  $y = y(x)$  requires proof; we distinguish between the cases  $j = 0$  and  $j > 0$ .

If  $j = 0$ , we have for all  $s$  except those on a set of measure zero:

$$(22) \quad \begin{aligned} z_\alpha^{0'}(s) &= z^{0'}(s), & s \text{ on } C(E_1 + E_2), \\ z_\alpha^{0'}(s) &= z^{0'}(s) + \alpha m(E_2) \geq k - |\alpha| \cdot m(E_2), & s \text{ on } E_1, \\ z_\alpha^{0'}(s) &= z^{0'}(s) - \alpha m(E_1) \geq k - |\alpha| \cdot m(E_1), & s \text{ on } E_2. \end{aligned}$$

Hence for all sufficiently small values of  $\alpha$  the inequality  $z_\alpha^{0'}(s) > 0$  holds almost everywhere, so that the functions

$$G(z_\alpha(s), z_\alpha'(s)), \quad G_{z,j}(z_\alpha(s), z_\alpha'(s)), \quad G_j(z_\alpha(s), z_\alpha'(s))$$

are all defined for almost all  $s$  and are measurable. Also, if  $\sigma$  is the length of arc on  $C_a$ , then

$$(23) \quad \sigma = \int_0^s \left[ \sum_{k=0}^q (z_a^k(s))^2 \right]^{1/2} ds,$$

and  $\sigma'(s) \geq z_a^{0'}(s) > 0$  almost everywhere. Hence  $\sigma(s)$  has an absolutely continuous inverse  $s(\sigma)$ . Equation (23) also shows that  $\sigma'(s)$  is never  $+\infty$ . Hence for almost all  $s$  the derivative  $s'(\sigma)$  exists and is positive; and recalling that to every set of values of  $s$  with measure 0 there corresponds a set of  $\sigma$  with measure 0, we find that for almost all  $\sigma$

$$\frac{d}{d\sigma} z_a^0(s(\sigma)) = z_a^{0'}(s) \cdot s'(\sigma) > 0.$$

This is a necessary and sufficient condition that  $C_a$  have a representation  $y = y_a(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , with absolutely continuous functions  $y_a(x)$ . Moreover by § 2 we know that  $I[y_a] = J[C_a]$ , so that

$$(24) \quad J[C_a] \geq J[C]$$

for all sufficiently small values of  $\alpha$ .

For the case  $j > 0$ , we notice that since the function  $z_a^0(s) = z^0(s)$  has almost everywhere a positive derivative, it has an absolutely continuous monotonic inverse. Hence  $\varphi(s(z_0)) = \varphi(s(x))$  is absolutely continuous, and so is the function

$$y_a^j(x) = z_a^j(s(x)) = z^j(s(x)) + \alpha \varphi(s(x)).$$

The other functions  $y_a^k(x) = z^k(s(x))$  are unchanged and so remain absolutely continuous. Hence  $C$  has an absolutely continuous representation  $y = y(x)$ . Introducing the length of arc  $\sigma$  on  $C$  as in equation (23), we find as before that  $s'(\sigma) > 0$  almost everywhere, so that by § 2 the inequality (24) again holds.

Disregarding the set for which  $z_a'(s)$  is undefined or  $z_a^{0'}(s) = 0$ , the function  $G(z_a(s), z_a'(s))$  is differentiable with respect to  $\alpha$ , and

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} G(z_a(s), z_a'(s)) = G_{\alpha j}(z_a, z_a') \cdot \varphi(s) + G_j(z_a, z_a') \cdot \varphi'(s).$$

We further discard the set of measure 0 on which equations (20) fail to hold. For the remaining points of  $E_1 + E_2$  we have for all sufficiently small  $\alpha$  (by way of (20) and (21))

$$(26) \quad \frac{k}{2} \leq z_a^{0'}(s) \leq 2, \quad |z_a^{i'}(s)| \leq 2, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

For these arguments the terms on the right are bounded, say less than  $N$ . For the remaining points of  $C(E_1 + E_2)$  we have  $\varphi'(s) = 0$ , so that the

last term in (25) is zero. For the other term we have, using inequalities (26) and condition (12'),

$$|G_{z,j}(z_\alpha, z'_\alpha)| = |G_{z,j}(z_\alpha, z')| \leq M_1 G(z, z') + 2(q+1)M_2.$$

Hence for all small  $\alpha$  the partial derivative in (25) is bounded by a summable function of  $s$ . We may therefore<sup>7)</sup> differentiate under the integral sign in the equation

$$J(C_\alpha) = \int_0^L G(z_\alpha(s), z'_\alpha(s)) ds,$$

obtaining for  $\alpha = 0$  the equation

$$(27) \quad J'[C_\alpha]_{\alpha=0} = \int_0^L [G_{z,j}(z, z') \cdot \varphi(s) + G_j(z, z') \varphi'(s)] ds.$$

But by (24) the left member must be 0. Integrating by parts and using equation (19) yields

$$0 = \int_0^L \varphi'(s) \left\{ G_j(z, z') - \int_0^s G_{z,j}(z, z') ds \right\} ds = \int_0^L \Phi_j(s) \varphi'(s) ds.$$

By (20) and (17) this implies

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{E_1} m(E_2) \cdot \Phi_j(s) ds - \int_{E_2} m(E_1) \cdot \Phi_j(s) ds \\ &\leq m(E_1) m(E_2) d_1 - m(E_2) m(E_1) d_2. \end{aligned}$$

This contradicts (17), and our theorem is established.

## § 5.

### Corollaries.

Suppose that the set  $A$  is a cylindrical set, in the sense that there exists a set  $B$  in the  $q$ -dimensional space of the  $y$ 's and an interval  $\alpha \leq x \leq \beta$  such that the set  $A$  consists of all the points  $(x, y)$  with  $\alpha \leq x \leq \beta$  and  $y$  in  $B$ . Then in proving equation (13') the comparison curves  $C_\alpha$  all belong to  $A$ , even when  $C$  has points on the boundary of  $A$ . For we have seen that for sufficiently small  $\alpha$  the inequality  $x'_\alpha(s) = z''_\alpha(s) \geq 0$  holds almost everywhere, so that

$$\alpha \leq a \leq x_\alpha(0) \leq x_\alpha(s) \leq x_\alpha(L) = b \leq \beta.$$

The function  $y^1(s), \dots, y^q(s)$ , or  $z^1(s), \dots, z^q(s)$ , remain the same for  $C_\alpha$  as for  $C$ , so that for every  $s$  the point  $(x_\alpha(s), y(s))$  is in  $A$ . Hence we can state

<sup>7)</sup> Carathéodory, l. c. <sup>3)</sup>, p. 664.

Corollary 1. *If*

- a) *the set  $A$  is a cylindrical set, in the sense defined;*
  - b) *the functions  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , are absolutely continuous;*
  - c) *the curve  $y = y(x)$  has the parametric representation  $C: z = z(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , where  $s$  is the length of arc;*
  - d)  *$C$  lies in  $A$  (but does not necessarily consist exclusively of interior points);*
  - e) *the functions  $y(x)$  minimize  $I[y]$  in the class of all absolutely continuous functions whose graphs lie in  $A$  and join the points  $(a, y(a))$  and  $(b, y(b))$ ;*
  - f) *condition  $(12'_0)$  is satisfied;*
- then there exists a constant  $c_0$  such that*

$$G_0(z(s), z'(s)) - \int_0^s G_{z,s}(z(s), z'(s)) ds = c_0$$

*for almost all values of  $s$ .*

Further, we notice that conditions  $(12'_j)$  were used only to prove the uniform summability of  $\frac{\partial}{\partial x} G(z_\alpha, z'_\alpha)$ . In case the functions  $y = y(x)$  satisfy a Lipschitz condition, we readily find that  $z^{0'}$  is bounded from zero, and the same is therefore true of  $z_\alpha^{0'}$  for all sufficiently small values of  $\alpha$ . Hence for such values of  $\alpha$  the right side of equation (25) is uniformly bounded, and we have no need of  $(12'_j)$ . We can therefore state:

Corollary 2. *If the hypotheses of theorems I or I' are satisfied with the omission of those relating to  $(12_j)$  or  $(12'_j)$ , and if further the functions  $y(x)$  satisfy a Lipschitz condition, then the conclusion of theorems I and I' are valid.*

It is possible that it might be convenient to use some other representation than (15) for the curve  $C$ . We therefore state:

Corollary 3. *If the curve  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , has in addition to the representations (14) and (15) the third representation*

$$(28) \quad C: z = \bar{z}(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

*where the functions  $\bar{z}(t)$  are absolutely continuous and  $s'(t) > 0$  for almost all  $t$ , and if for any  $j$  equation  $(13_j)$  or  $(13'_j)$  is satisfied, then for that  $j$  we have*

$$(29_j) \quad G_j(\bar{z}(t), \bar{z}'(t)) - \int_\alpha^t G_{z,j}(\bar{z}(t), \bar{z}'(t)) dt = c_j$$

*for almost all  $t$ .*

The same proof<sup>8)</sup> which we applied to  $\int G ds$  serves to show that

$$\int_a^{t(s)} G_{zj}(\bar{z}, \bar{z}') dt = \int_0^s G_{zj}(z, z) ds.$$

Let  $s$  be a number such that the  $z'(s)$  are all defined and  $z''(s) > 0$ , and also  $s'(t)$  exists and is not zero (the remaining values of  $s$  form a set of measure 0). Since  $G_j$  is positively homogeneous of degree 0 in  $z$ , we have

$$\begin{aligned} G_j(\bar{z}(t), \bar{z}'(t)) &= G_j(z(s(t)), z'(s(t)) \cdot s'(t)) \\ &= G_j(z(s(t)), z'(s(t))). \end{aligned}$$

Hence (29<sub>j</sub>) holds except for those values of  $t$  which correspond to a set of values of  $s$  having measure 0. By the absolute continuity<sup>9)</sup> of  $t(s)$ , these exceptional values of  $t$  form a set of measure 0, and so (29<sub>j</sub>) holds for almost all  $t$ .

<sup>8)</sup> l. c. <sup>3)</sup>.

<sup>9)</sup> l. c. <sup>4)</sup>.

(Eingegangen am 5. 7. 1933.)

# Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete.

Von

G. Aumann und C. Carathéodory in München.

## Inhalt.

	Seite
1. Der Starrheitssatz . . . . .	756
2. Eine Abschätzung der Starrheitskonstanten $\Omega_0$ . . . . .	758
3. Fälle mit $\Omega_0 = 0$ . . . . .	761

### 1. Wir beweisen den

**Starrheitssatz.** *Es sei  $G$  ein schlichtes mehrfach zusammenhängendes Gebiet der  $z$ -Ebene, das den Punkt  $z = 0$  in seinem Innern enthält und mindestens zwei im Endlichen gelegene Punkte zu Randpunkten hat. Die Funktion  $f(z)$  sei regulär und eindeutig in  $G$ ; es sei außerdem  $f(0) = 0$  und es werde durch  $z' = f(z)$  das Gebiet  $G$  auf eine Punktmenge abgebildet, die in  $G$  enthalten ist. Dann gibt es positive Zahlen  $\Omega < 1$ , so daß jede Funktion  $f(z)$ , die die angegebenen Eigenschaften besitzt, eine topologische Selbstabbildung von  $G$  liefert, sobald*

$$|f'(0)| > \Omega$$

ist.

*Es gilt dann sogar  $f'(0) = e^{\frac{2\pi i q}{p}}$ , wobei  $p, q$  teilerfremde positive ganze Zahlen bedeuten, und nur wenn  $z = 0$  ein Symmetriepunkt von  $G$  ist, kann  $p > 1$  und die erwähnte topologische Selbstabbildung von  $G$  von der identischen Abbildung verschieden sein.*

**Bemerkungen:** 1. Für andere als die im obigen Satz gekennzeichneten Gebiete gilt, wie einfache Beispiele lehren, die Behauptung nicht.

2. Ersetzt man die Voraussetzung, daß  $G$  zwei im Endlichen gelegene Randpunkte besitzt, durch die engere, daß  $G$  beschränkt ist, so wird aus obigem Satz im wesentlichen ein Satz des einen der Verfasser<sup>1)</sup>. Die unter dieser speziellen Voraussetzung l. c. angewandte Beweismethode

<sup>1)</sup> C. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden, Math. Zeitschr. 34 (1932), 758—792; Satz 14, S. 786.



kann so modifiziert werden, daß sich damit auch unser allgemeiner Starrheitssatz beweisen ließe. Im folgenden geben wir einen Beweis, der in seiner Einfachheit der begrifflich elementaren Formulierung des Satzes selbst angemessen ist und bei dem im übrigen von den Ergebnissen der zitierten Arbeit keinerlei Gebrauch gemacht wird.

Beweis. Unter den über  $G$  gemachten Voraussetzungen gibt es nach dem Grenzkreistheorem der Uniformisierung eine in  $|u| < 1$  eindeutige analytische Funktion

$$(1, 1) \quad z = \chi(u),$$

welche die Überlagerungsfläche  $\tilde{G}$  des Gebietes  $G$  umkehrbar eindeutig auf den Einheitskreis  $E$  der  $u$ -Ebene abbildet. Wir dürfen annehmen, daß  $\chi(0) = 0$  ist. Die automorphe Funktion  $\chi(u)$  hat in  $E$  die unendlich vielen Nullstellen  $u_0 = 0, u_1, u_2, \dots$ , über deren Durchnummerierung wir so verfügen, daß

$$(1, 2) \quad 0 < |u_1| \leq |u_2| \leq \dots < 1,$$

und die wir aus  $u_0$  dadurch erhalten, daß wir auf  $u_0$  der Reihe nach alle Transformationen der Automorphiegruppe anwenden.

Nun sei

$$(1, 3) \quad v = f(z)$$

eine Funktion, die den Voraussetzungen unseres Satzes genügt. Die Auflösung der Gleichung

$$(1, 4) \quad \chi(v) = f(\chi(u))$$

nach  $v$  bezeichnen wir mit

$$(1, 5) \quad v = \varphi(u);$$

durch die Festsetzung  $\varphi(0) = 0$  wird  $\varphi(u)$  nach dem Monodromiesatz zu einer in  $E$  eindeutigen regulären Funktion. Es ist

$$(1, 6) \quad \varphi'(0) = f'(0)$$

und  $|\varphi(u)| < 1$ . Weiter folgt aus (1, 4) und (1, 5)

$$\chi(\varphi(u)) = f(\chi(u)),$$

so daß stets

$$(1, 7) \quad \varphi(u_j) = u_{k_j} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

ist. Wegen des Schwarzschen Lemmas haben wir dabei immer

$$|u_{k_j}| \leq |u_j|.$$

Gilt nun für einen einzigen Wert von  $j$  die Gleichung  $|u_{k_j}| = |u_j|$ , so muß  $v = \varphi(u) = \lambda u$  mit  $|\lambda| = 1$  sein. Ist insbesondere  $\lambda = 1$ , dann ist nach (1, 4) und (1, 1)

$$f(z) \equiv z.$$

Ist  $\lambda \neq 1$ , so muß nach (1, 7) mit  $u_j$  auch der Punkt  $\lambda u_j$  eine Nullstelle von  $\chi(u)$  sein. Es sind daher alle Punkte  $\lambda^v u_j$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) Nullstellen von  $\chi(u)$ . Da es deren auf dem Kreise  $|u| = |u_j|$  nur endlich viele geben kann, so ist  $\lambda$  eine  $p$ -te Einheitswurzel und man hat

$$f'(0) = \varphi'(0) = \lambda = e^{\frac{2\pi i q}{p}}$$

Der Punkt  $z = 0$  ist dann Symmetriepunkt von  $G$ , die Abbildung  $v = \lambda u$  bedeutet eine topologische Selbstabbildung von  $\tilde{G}$  und somit (1, 3) eine solche von  $G$ .

In jedem anderen Falle muß notwendig immer

$$(1, 8) \quad |u_{2j}| < |u_j|$$

und insbesondere

$$\varphi(u_1) = u_{21} = u_0 = 0$$

sein. Dann setzen wir<sup>2)</sup>

$$\varphi(u) = u \frac{u - u_1}{\bar{u}_1 u - 1} \psi(u);$$

dabei ist  $\psi(u)$  in  $E$  regulär und

$$(1, 9) \quad \varphi'(0) = u_1 \cdot \psi(0).$$

Nach dem Schwarzschen Lemma ist

$$\left| \frac{u - u_1}{\bar{u}_1 u - 1} \psi(u) \right| \leq 1,$$

also nach dem Satz vom Maximum für  $0 < r < 1$

$$(1, 10) \quad |\psi(0)| \leq \max_{|u|=r} |\psi(u)| \leq \max_{|u|=r} r \cdot \left| \frac{\bar{u}_1 u - 1}{u_1 u - r^2} \right|.$$

Für  $r \rightarrow 1$  ergibt sich hieraus

$$(1, 11) \quad |\psi(0)| \leq 1.$$

Aus (1, 8), (1, 9) und (1, 11) folgt

$$(1, 12) \quad |f'(0)| \leq |u_1|;$$

mit  $\Omega = |u_1| < 1$  ist daher die Behauptung unseres Satzes richtig und damit der Satz bewiesen.

2. Bleiben wir noch bei dem eben behandelten, durch (1, 8) gekennzeichneten Fall. Es ist leicht einzusehen, daß in (1, 12) nur das Kleinerzeichen stehen kann. Im Gleichheitsfalle wäre nach (1, 10) nämlich  $\psi(u) \equiv \psi(0)$  mit  $|\psi(0)| = 1$ , also

$$\varphi(u) = u \frac{u - u_1}{\bar{u}_1 u - 1} \psi(0).$$

<sup>2)</sup> Vgl. C. Carathéodory et L. Fejér, Remarques sur le théorème de M. Jensen, Compt. rend. 145 (1906), p. 163.

Das ist aber unmöglich, da  $\varphi(u)$  unendlich viele Nullstellen hat. Ist in der Tat  $u' = l_1(u)$  diejenige Transformation der Automorphiegruppe, die  $u = 0$  in  $u = u_1$  überführt, so hat man

$$\chi(\varphi(l_1(u))) = f(\chi(l_1(u))) = f(\chi(u)) = \chi(\varphi(u)).$$

Demnach gibt es eine zweite Transformation der Gruppe,  $u' = l_0(u)$ , so daß

$$\varphi(l_1(u)) = l_0(\varphi(u)).$$

Für  $u = 0$  erhalten wir, wegen  $\varphi(l_1(0)) = \varphi(u_1) = 0$ ,

$$0 = l_0(0).$$

Unter den Transformationen der Gruppe ist aber die Identität die einzige, welche einen Fixpunkt hat. Daher ist  $l_0(u) \equiv u$ , und es gilt:

$$(2, 1) \quad \varphi(l_1(u)) = \varphi(u).$$

Unter den Nullstellen von  $\varphi(u)$  befinden sich also nach (2, 1) auch jene unendlich vielen,

$$(2, 2) \quad \dots, u^{(-2)}, u^{(-1)}, u^{(0)} = 0, u^{(1)} = u_1, u^{(2)}, \dots,$$

die man aus  $u = 0$  erhält durch iterierte Anwendung der Transformation  $u' = l_1(u)$  und ihrer Inversen<sup>3)</sup>. Es ist somit:

$$(2, 3) \quad |\varphi'(0)| < |u_1|.$$

Bezeichnet man nun die untere Grenze der im Starrheitssatz zulässigen  $\Omega$  mit  $\Omega_0$ , die „Starrheitskonstante von  $G$  in bezug auf  $z = 0$ “, so ist

$$\Omega_0 < |u_1|.$$

Diese Abschätzung von  $\Omega_0$  wollen wir jetzt noch wesentlich verbessern. Zu diesem Zweck brauchen wir nur die Ungleichung (2, 3) zu verschärfen, und das gelingt ohne weiteres durch Anwendung der allgemeinen Jensenschen Ungleichung auf die Funktion  $\frac{\varphi(u)}{u}$ . Nach der Jensenschen Ungleichung ist nämlich<sup>3)</sup>

$$|\varphi'(0)| \leq \prod_{\mu} |\omega_{\mu}|,$$

das Produkt gebildet über alle Nullstellen  $\omega_{\mu}$  von  $\frac{\varphi(u)}{u}$ . Erst recht gilt daher:

$$(2, 4) \quad |\varphi'(0)| \leq \prod_{v=1}^{\infty} |u^{(v)} u^{(-v)}|,$$

<sup>3)</sup> Daß die Punkte der Folge (2, 2) alle voneinander verschieden sind, hat seinen Grund darin, daß man die Transformation  $u' = l_1(u)$  aufzufassen hat als das Ergebnis der Zusammensetzung zweier Spiegelungen an zwei zu  $|u| = 1$  orthogonalen Kreisen, die sich im Innern von  $E$  nicht treffen.

wobei die  $u^{(v)}$  dieselbe Bedeutung haben wie in (2, 2). Wir berechnen jetzt von der rechten Seite von (2, 4), die ja bereits von  $f(z)$  unabhängig ist, aber noch von  $l_1(u)$  abhängt, die obere Grenze bei festem  $u_1$ . Wir müssen also jene lineare Transformation  $u' = l_1(u)$  von  $E$  in sich bestimmen, welche 0 in  $u_1$  überführt und für welche die Punkte der Folge (2, 2) möglichst rasch gegen den Rand von  $E$  konvergieren. Nun ist ja die nichteuklidische Entfernung  $d$  der Punkte  $u^{(v)}$ ,  $u^{(v+1)}$  gleich der von  $u^{(0)}$ ,  $u^{(1)}$ . Legt man daher um  $u^{(v)}$  den nichteuklidischen Kreis mit dem Radius  $d$ , so liegt  $u^{(v+1)}$  auf seiner Peripherie. Für unsere Abschätzung hat der Punkt  $u^{(v+1)}$  die ungünstigste Lage, wenn er dem Rand von  $|u| = 1$  am nächsten liegt. Es befinden sich alsdann  $u^{(v)}$  und  $u^{(v+1)}$  auf demselben Durchmesser von  $|u| = 1$ . Ist dies für ein einziges Paar von aufeinander folgenden Punkten der Folge (2, 2) der Fall, dann gilt das bereits für jedes solche Paar. Wir dürfen daher annehmen, daß die Punkte dieser Folge alle auf dem reellen Durchmesser von  $E$  liegen und daß insbesondere  $u_1$  positiv ist. Die zugehörige Transformation  $u' = l_1(u)$  kann dann geschrieben werden

$$(2, 5) \quad \frac{u' - 1}{u' + 1} = h \cdot \frac{u - 1}{u + 1}, \quad h = \frac{1 - u_1}{1 + u_1}.$$

Die Iterierten von (2, 5) und deren Inverse haben die Gestalt

$$(2, 6) \quad \frac{u' - 1}{u' + 1} = h^v \cdot \frac{u - 1}{u + 1}, \quad v = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für  $u = 0$  wird  $u' = u^{(v)}$ , und man erhält aus (2, 6)

$$(2, 7) \quad u^{(v)} = \frac{1 - h^v}{1 + h^v}.$$

Aus (1, 6), (2, 4), (2, 7) folgt somit die Abschätzung

$$|f'(0)| \leq \prod_{v=1}^{\infty} \left( \frac{1 - h^v}{1 + h^v} \right)^2,$$

und infolgedessen ist auch

$$(2, 8) \quad \sqrt{\Omega_0} \leq \prod_{v=1}^{\infty} \frac{1 - h^v}{1 + h^v} = 1 + 2 \cdot \sum_{v=1}^{\infty} (-h)^{v^2} {}^4),$$

mit  $h = \frac{1 - |u_1|}{1 + |u_1|}$ . Erst recht gilt also:

$$\Omega_0 < \left( \frac{1 - h}{1 + h} \right)^2 = |u_1|^2.$$

<sup>4)</sup> Siehe Jacobi, Werke, Bd. I, S. 234.

3. Über die Starrheitskonstante  $\Omega_0$  lassen sich auch ohne Kenntnis der Gruppe der Decktransformationen von  $\tilde{G}$  einige Aussagen machen.

Zunächst ergibt sich, daß  $\Omega_0$  sicher positiv ist für ein beschränktes mehrfach zusammenhängendes Gebiet. Liegt nämlich  $G$  im Innern von  $|z| < R$  und die Kreisscheibe  $|z| < r < R$  im Innern von  $G$ , dann ist

$$f(z) = \frac{r}{R} z$$

eine „innere Abbildung“<sup>5)</sup> von  $G$  mit dem Fixpunkt 0, aber keine topologische Selbstabbildung von  $G$ ; also ist sicher

$$\Omega_0 \geq \frac{r}{R}.$$

Allgemeiner gilt für jedes mehrfach zusammenhängende Gebiet  $G$ , dessen Rand ein mehrpunktiges Kontinuum enthält,

$$\Omega_0 > 0;$$

denn jedes solche Gebiet  $G$  läßt sich durch eine schlichte konforme Abbildung in ein beschränktes mehrfach zusammenhängendes Gebiet überführen. Gegenüber solchen Abbildungen verhält sich aber  $\Omega_0$  invariant. Damit haben wir das Ergebnis:

*$\Omega_0$  kann nur dann Null sein, wenn der Rand von  $G$  eine diskontinuierliche Punktmenge ist.*

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel bestätigt:

Sei  $|\alpha| > 1$ ,  $G$  entstehe aus der ganzen endlichen Ebene durch Wegnahme der Punkte  $z = \alpha^v$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ; dann ist

$$f(z) = \frac{z}{\alpha}$$

eine innere Abbildung, aber keine topologische Selbstabbildung, also ist

$$\Omega_0 \geq \frac{1}{|\alpha|}.$$

Null ist  $\Omega_0$  beispielsweise für das Gebiet, das aus der Ebene entsteht, wenn man die Punkte  $+1, -1$  ausschließt<sup>6)</sup>, und allgemeiner für alle Gebiete  $G$ , deren Rand aus nur endlich vielen Punkten besteht. Mit dem Verhalten dieser Gebiete hinsichtlich unseres Starrheitssatzes wollen wir uns jetzt noch etwas ausführlicher beschäftigen; die Verhältnisse lassen sich hier nämlich vollständig überblicken.

<sup>5)</sup> „Transformation intérieure“ bei H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 760.

<sup>6)</sup> Siehe l. c. <sup>1)</sup>, S. 786.

In jedem isolierten Randpunkt eines unserer Gebiete muß jede der betrachteten Funktionen  $f(z)$ , wegen des Picardschen Satzes, regulär sein, wenn sie dort nicht einen Pol hat.

Gibt es also nur endlich viele Randpunkte von  $G$ , die mit  $a_0 = \infty$ ,  $a_1, \dots, a_m$  bezeichnet sein mögen, so muß jede Funktion  $f(z)$  in der ganzen Ebene und für  $z = \infty$  rationalen Charakter haben, und daher überhaupt rational sein. Dann muß aber  $f(z)$  auch alle Werte  $a_0, \dots, a_m$  wirklich annehmen und da dies nach Voraussetzung nur in den Punkten  $z = a_0, \dots, a_m$  stattfinden kann, müssen durch die Transformation  $z' = f(z)$  die Randpunkte von  $G$  untereinander permutiert werden, wenn sie nicht Fixpunkte der Transformation sind. Im Falle, daß alle Randpunkte von  $G$  Fixpunkte der Transformation  $z' = f(z)$  sind, muß  $f(z)$  ein Polynom sein, das die Werte  $a_1$  und  $a_2$  nur in diesen Punkten selbst annimmt; deshalb gilt:

$$f(z) = a_1 + b_1(z - a_1)^n = a_2 + b_2(z - a_2)^n.$$

Hieraus folgt aber sofort  $b_1 = b_2$ ; wegen  $a_1 \neq a_2$  dann  $n = 1$  und  $b_1 = 1$ , d. h.  $f(z) = z$ .

Werden im allgemeinen Fall die Randpunkte durch  $z' = f(z)$  permutiert, so gibt es unter den Funktionen

$$f_2(z) = f(f(z)), \quad f_3(z) = f_2(f(z)), \quad \dots$$

eine erste Funktion  $f_p(z)$ , für welche alle Punkte  $a_0, \dots, a_m$  Fixpunkte der Transformation  $z' = f_p(z)$  sind. Da diese letzte Transformation wieder eine innere Abbildung unseres Gebietes mit dem Fixpunkt  $z = 0$  darstellt, muß nach dem Vorhergehenden  $f_p(z) = z$  sein. Dann ist aber

$$(3, 1) \quad f_p'(0) = (f'(0))^p = 1,$$

woraus folgt, daß notwendig  $\Omega_0$  für  $G$  gleich Null ist.

Es läßt sich nun sofort die Gestalt von  $f(z)$  für den Fall  $p > 1$  angeben. Da die Funktion  $f_p(z) = z$  in der ganzen Ebene einschließlich  $z = \infty$  schlicht ist, so muß das auch  $z' = f(z)$  selbst sein.  $f(z)$  ist also eine Möbiussche Transformation, und hat wegen (3, 1) die Gestalt:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2\pi i q}{p} \cdot z}}{c \cdot z + 1}.$$

Ein Gebiet  $G$ , bei welchem diese Funktion eine Selbstabbildung erzeugt, muß notwendig mit jedem Randpunkt  $a$  auch den Randpunkt  $f(a)$  und,

wenn  $c \neq 0$  ist, jedenfalls den Punkt  $\frac{1}{c} e^{\frac{2\pi i q}{p}}$  als Randpunkt besitzen.

Man sieht leicht ein, daß man auf diese Weise, bei beliebig vorgegebenen

$p, q$  und bei beliebigem (reellem oder komplexem)  $c$ , derartige Gebiete mit endlich vielen Randpunkten erzeugen kann. Der Punkt  $z = 0$  ist dann ein  $p$ -facher Symmetriepunkt; die Anzahl der Randpunkte einschließlich (oder ausschließlich)  $z = \infty$  ist ein Multiplum von  $p$  je nachdem  $c \neq 0$  (oder  $c = 0$ ) ist.

Auf Grund dieser Bemerkungen ist es dann ein leichtes, zu prüfen, ob und was für ein Symmetriepunkt der Punkt  $z = 0$  für ein vorgegebenes Gebiet mit endlich vielen Randpunkten ist.

München, im Dezember 1933.

(Eingegangen am 25. 12. 1933.)



### Berichtigung

zu der Arbeit von Arnold Scholz: „Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. I.“, dieser Band S. 161–190.

Als Kriterium für die Erweiterbarkeit des Körpers  $K^0 = K_{p_1}^{l^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{l^{h_2}}$  zu einem (reinverzweigten) Zweigkörper vom Typus  $(l^{h_1}, l^{h_2}, l^k)$  ist auf S. 175 und in Satz 3 auf S. 176 die Gültigkeit der Ungleichung

$$(9) \quad r \neq q^X \nu \sigma^l$$

für ein Ideal  $r$  der Grundidealklasse in  $K^0$  mit  $r = N(r)$  und beliebige Zahlidealpotenzen  $q$  von  $r$  angegeben. Dieses Kriterium ist aber für  $k > 1$  nicht scharf genug. Damit nämlich der Führer  $q$  von  $K/K^0$  so wie in Satz 3 angegeben gewählt werden kann, muß

$$(9)^k \quad \nu^{lk-1} \neq q^X \nu \sigma^k$$

gelten. Dann erst liegt  $\sqrt[l]{r}$  nicht im Körper (10).

Im Falle  $l > 2$  ist dies jedoch ohne Einfluß auf die Existenz von Zweigkörpern mit  $k > 1$ : es ist  $(9)^k$  immer gleichzeitig mit (9) erfüllt, und der Beweis von  $(9)^k$  läßt sich in dem in Kap. 3 vorliegenden Spezialfall mit denselben Worten führen wie für (9), ebenso in dem am Schluß der Note angekündigten allgemeinen Fall. Es bleibt somit gegenseitiger  $l$ -ter Potenzrest von  $p_1$  und  $p_2$  das Kriterium für die Existenz eines Zweigkörpers vom Typ  $(l, l, l^k)$ .

Dagegen ist im Falle  $l = 2$  die auf S. 188 angegebene notwendige Bedingung für die Existenz eines (reellen) Zweigkörpers vom Typ  $(2, 2, 2^k)$  für  $k > 1$  nicht hinreichend, sondern notwendig und hinreichend ist erst, daß  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitige biquadratische Reste sind. Dies wird dann in der angekündigten Note ebenfalls bewiesen werden.

Sonstige Berichtigungen: Auf S. 174 Mitte fehlt das  $k$  in

$$\nu^X \nu \equiv \alpha^{lk}(q).$$

Auf S. 184 fehlt bei einigen Exemplaren das  $\eta^l$  in

$$(20) \quad \eta^l = \varepsilon_1 \prod \eta_a^{H_a}.$$

Arnold Scholz.

### Berichtigung

zu der Arbeit von Karl Kommerell: „Gebietsteilung durch eine Kurve zweiter Ordnung“, dieser Band S. 307–312.

Herr Mohrmann hat mich auf eine falsche Behauptung in der Einleitung meiner genannten Arbeit aufmerksam gemacht, nämlich die Behauptung, daß mein Beweis ohne Stetigkeitsaxiome auskomme. Daß dies unmöglich ist, ist ja bereits an dem Beispiel des Kreises bekannt. Der Ort, wo bei mir Stetigkeitsaxiome (Dedekindsches oder Vollständigkeitsaxiom) benutzt werden, ist bei der Einteilung der Involutionen in elliptische und hyperbolische. Es ist also die auf die Stetigkeit bezügliche Stelle in der Einleitung zu streichen. Die Konstruktionen selbst sind richtig.

K. Kommerell.

